Сојузен натпревар 1974

Седмо одделение

1. Со делење на некој број со бројот 72 се добива количник n и остаток 68. Определи ги количникот и остатокот ако истиот тој број се подели со 24.

   Решение. Дадениот број може да се запише во видот $72n+68$. Оттука $(72n+68):24$ дава количник $3n+2$ и остаток 20.

2. Даден е трицифрен број. Со разместување на неговите цифри добиени се сите броеви запишани со тие цифри. Збирот на сите овие броеви е 1998. Со кои цифри е запишан дадениот трицифрен број? Определи ги сите решенија.

   Решение. Дадениот број може да има две еднакви цифри и третата да е различна или сите три негови цифри да се различни (сите се различни од нула).

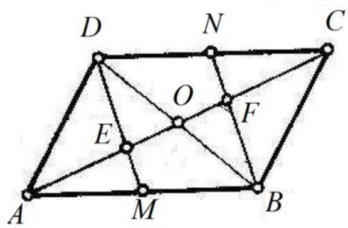
   а) Ако сите цифри се различни, да кажеме: a,b,c , тогаш го добиваме дека збирот на броевите
$$100a+10b+c, 100c+10a+b, 100b+10c+a,$$
$$100a+10c+b, 100b+10a+c, 100c+10b+a$$
   е еднаков на 1998, т.е. го добиваме равенството
$$222a+222b+222c=1998$$
   од каде
$$a+b+c=9.$$
   Според тоа, дадениот број може да биде запишан со цифрит 1, 2, 6 или 1, 3, 5 или 2, 3, 4.

   б) Ако дадениот број има само две различни цифри, да кажеме x и y, тогаш збирот на броевите
$$100x+10x+y, 100x+10y+x, 100y+10x+x$$
   е еднаков на 1998, односно
$$222x+111y=1998,$$
   од каде
$$2x+y=18.$$
   Според тоа, дадениот број може да биде запишан со цифрите 5, 5, 6 или 7, 7, 4 или 8, 8, 2.

3. Збирот на два броја е 135, а 35% од едниот број се еднакви на 28% на другиот број. Определи ги овие броеви.

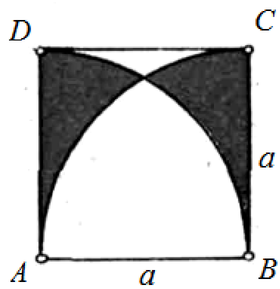
Решение. Нека едниот број е a. Тогаш другиот е $135-a$. Според условот $\frac{35a}{100}=\frac{28(135-a)}{100}$. Оттука добиваме $a=60$, па другиот број е 75.

4. Даден е паралелограм $ABCD$. Точката M е средина на страната AB, а точката N е средина на страната CD. Докажи дека правите DM и BN ја делат дијагоналата AC на три еднакви дела.

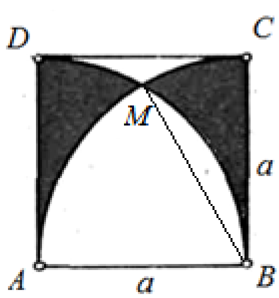


Решение. Нека E,O и F се соодветно пресечните точки на отсечките DM,BD и BN со дијагоналата AC. Бидејќи $ABCD$ е паралелограм, точката O е средина на дијагоналите AC и BD. Бидејќи M е средина на отсечката AB, следува дека E е тежиште на триаголникот ABD. Аналогно F е тежиште на триаголникот BCD. Од својствата на тежиптето следува $AE=\frac{2}{3}AO$ и $CF=\frac{2}{3}CO$, па затоа $AF=FC$. Бидејќи $OE=\frac{1}{3}AO$ и $FO=\frac{1}{3}CO$, добиваме $EF=EO+OF=\frac{1}{3}AO+\frac{1}{3}CO=\frac{2}{3}AO=AE=FC$, што и требаше да се докаже.

5. Определи ја плоштината на осенчениот дел на квадратот прикажан на цртежот десно. Центрите на кружниците се точките A и B.



Решение. Половината од осенчената фигура ќе ја добиеме ако од четвртина од површината на кругот со радиус a ги одземеме иечокот ABM (со агол од 60°) и отсечокот над тетивата BM од истиот круг (повторно со агол 60°), цртеж лево.



Според тоа плоштината на осенчената фигура е еднаква на

$$P=2\left(\frac{\pi a^2}{2}-\frac{\pi a^2}{6}-\left(\frac{\pi a^2}{6}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\right)=\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{6}.$$

Осмо одделение

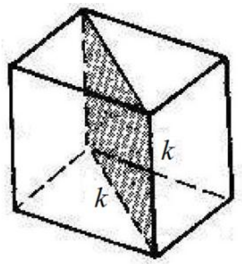
1. Основата на права четиристрана призма е ромб со плоштина $\frac{2}{3}k^2$.

   Помалиот дијагонален пресек на призмата е квадрат со плоштина k^2.

   а) Пресметај ја плоштината и волуменот на призмата изразени со помош на k.

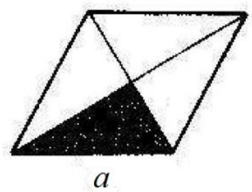
   б) Определи го k ако мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви.

   Решение. Од плоштината на малиот дијагонален пресек заклучуваме дека помалата дијагонала на ромбот и висината имаат должина k (цртеж десно). Од плоштината на ромбот ја добиваме непознатата дијагонала:



$$\frac{dk}{2}=\frac{2}{3}k^2\text{, т.е. } d=\frac{4}{3}k.$$

Страната на ромбот ја пресметуваме од осенчениот правоаголен триаголник на цртежот лево. Имаме



$$a^2=(\tfrac{k}{2})^2+(\tfrac{2k}{3})^2\text{, т.е. } a=\frac{5}{6}k.$$

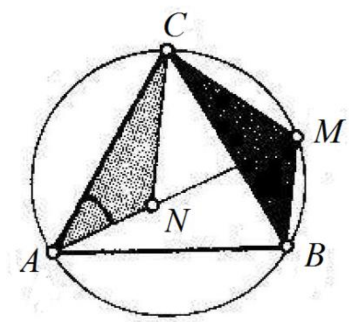
а) За волуменот и плоштината на призмата имаме:

$V=\frac{2}{3}k^2k=\frac{2}{3}k^3$ и $P=2\cdot\frac{2}{3}k^2+4\cdot\frac{5}{6}k^2=\frac{14}{3}k^2$.

б) Имаме $V=P$, односно $\frac{2}{3}k^3=\frac{14}{3}k^2$, од каде добиваме $k=7$.

2. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC. Произволна точка M припаѓа на лакот BC кој не ја содржи точката A. Докажи дека $BM+CM=AM$.

   Решение. Нека N е точка од отсечката AM таква што $MN=CM$. Имаме $\measuredangle AMC=\measuredangle ABC$, како агли над иста тетива во кружница, па затоа триаголникот CMN е рамностран, односно $CN=CM$. За триаголниците ACN и BCM имаме: $CN=CM$, $AC=BC$ и $\measuredangle CAN=\measuredangle CBM$, како агли над истат тетива CM, па затоа тие се складни. Од складноста на овие



триаголници следува $AN = BM$. Конечно,

$$AM = AN + NM = BM + CM,$$

што и требаше да се докаже.

3. На кружна патека долга $1650\,m$ со константни брзини се движат два моторциклисти. Ако моторциклистите се движат во спротивни насоки се среќаваат секоја минута, а ако се движат во иста насока моторциклистот кој има поголема брзина го стигнува другиот моторциклист секои единаесет минути. Определи ги брзините на моторциклистите.

Решение. Нека побрзиот мотоциклист минува x метри во минута, а поспориот минува y метри во минута. Од првиот услов имаме $x + y = 1650$, а од вториот $x - y = \frac{1650}{11} = 150$. Решението на добиениот систем равенки е $x = 900\,m/\min$ и $y = 700m/\min$. Значи, првиот мотоциклист се движел со брзина $54\,km/h$, а вториот со брзина $45\,km/h$.

4. Во правоаголен координатен систем се дадени прави p_1 и p_2 чии равенки се:

$$p':\quad y = x - 4 \qquad \text{и} \qquad p_2:\quad y - 2x + 2 = 0.$$

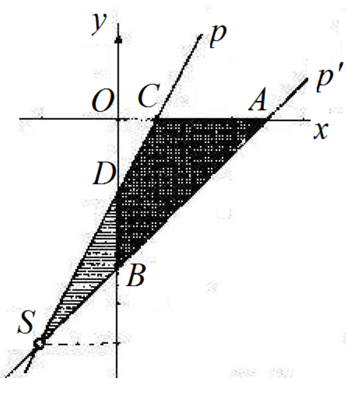
а) Пресметај ја плоштината на фигурата определена со правите p_1 и p' и координатните оски.

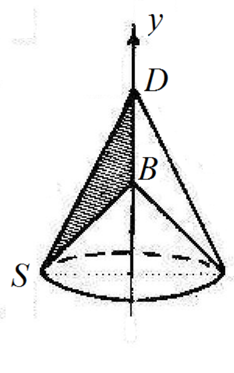
б) Пресметај го волуменот на ротационото тело кое настанува кога триаголникот ограничен со правите p_1 и p' и ординатната оска ротира околу ординатната оска.

Решение. а) Имаме

$$P_{ABCD} = P_{OAB} - P_{OCD}$$
$$= 7\,cm^2.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.





б) Бараниот волумен е еднаков на разликата на волумените на двата конуси со темиња D и B (види цртеж десно). Според тоа:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{2^2\pi\cdot 4}{3} - \frac{2^2\pi\cdot 2}{3} = \frac{8\pi}{3},$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Реши ја равенката:

$$(0{,}8x-0{,}5)^2+(0{,}6x-1{,}3)^2=4(0{,}5x-0{,}7)(0{,}5x+0{,}7)-6(0{,}15x+0{,}08)$$

Решение. Со квадрирање се добива линеарна равенка чие решение е $x=3$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.