БМО 1996

1. Нека G и O се соодветно тежиштето и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а R и r соодветно се радиусите на опишаната и вписаната кружница. Докажи дека $\overline{OG} \le \sqrt{R(R-2r)}$.

   Решение. Ако го искористиме равенството на Лајбниц $\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството
$$a^2+b^2+c^2 \ge 18Rr.$$
   Но, $R=\frac{abc}{4P}$ и $r=\frac{2P}{a+b+c}$, па затоа доволно е да докажеме дека
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 9abc.$$
   Последното следува ако ги помножиме неравенствата
$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \text{ и } a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

2. Нека $p>5$ е прост број и $X=\{p-n^2 \mid n\in\mathbb{N}, n^2<p\}$. Докажи, дека множеството X содржи два различни елементи x и y такви што $x\neq 1$ и $x \mid y$.

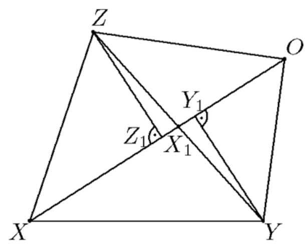
   Решение. *Прв начин*. Нека $m=[\sqrt{p}]$, $x=p-m^2$ и $y=p-|m-x|^2$. Тогаш
$$y=m^2+x-(m-x)^2=x(2m+1-x),$$
   па затоа $x\mid y$. Освен тоа, од $x+m^2=p<(m+1)^2$ следува дека $x<2m+1$, т.е. $y>0$. Исто така, $m\neq x$ бидејќи $p\neq m^2$. Освен тоа, $y\neq x$, бидејќи во спротивно $x=0$ или $x=2m$, од каде следува $p=m^2$ или $p=m(m+2)$, т.е. $m=1$ и $p=3$. Од досега изнесеното следува дека $x,y\in X$ и $x\mid y$. Ако $x\neq 1$, тогаш задачата е решена. За $x=1$ следува дека m е парен број и затоа $2m= p-(m-1)^2$ е делител на $m^2=p-1^2$. Останува да забележиме дека $2m<m^2$, бидејќи во спротивно $m=2$ и $p=1+2^2=5$.

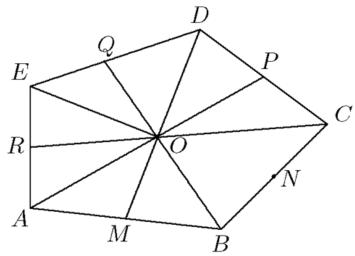
   Втор начин. Нека $n^2<p<(n+1)^2$. Ако е $p-n^2>1$ земаме $x=p-n^2$. Јасно, $x\mid p-(x-n)^2$. Бидејќи броевите n^2+n и n^2+2n се сложени, нора да важи $x\le 2n-1$ и $x\neq n$, т.е. $0<|x-n|<n$, па можеме да земеме $y=p-(x-n)^2$.
   Ако е $p-n^2=1$, земаме $x=p-(n-1)^2=2n$ и $y=p-1^2=n^2$. Бројот n мора да е парен, па затоа $2n\mid n^2$.

3. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник и нека M,N,P,Q и R се средините на

страните AB, BC, CD, DE и EA, соодветно. Ако AP, BQ, CR и DM се сечат во една точка, докажи дека таа точка лежи на отсечката EN.

Решение. Ќе докажеме, дека точката O лежи на тежишната линија XX_1 на $\triangle XYZ$ ако и само ако $P_{XYO} = P_{XZO}$. Навистина, $\frac{P_{XYO}}{P_{XZO}} = \frac{\overline{Y_1Y}}{\overline{Z_1Z}} = \frac{\overline{X_1Y}}{\overline{X_1Z}}$. Според тоа, $P_{XYO} = P_{XZO}$ ако и само ако X_1 е средина на YZ.





Сега, ако O е заедничка точка на AP, BQ, CR и DM, последователно добиваме $P_{BEO} = P_{BDO} = P_{ADO} = P_{ACO} = P_{CEO}$. Според тоа, $P_{BEO} = P_{CEO}$, т.е. EO минува низ средината N на отсечката BC.

4. Докажи, дека постои подмножество A на множеството $\{1, 2, 3, 4, ..., 2^{1996} - 1\}$ со следниве својства:

1) $1, 2^{1996} - 1 \in A$,
2) Секој елемент од $A \setminus \{1\}$ е збир на два (не задолжително различни) елементи од A,
3) Бројот на елементите на A е најмногу 2012.

Решение. *Прв начин*. Нека $f(n)$ е најмалиот можен број на елементи на подмножеството A од множеството $\{1, 2, 3, 4, ..., 2^n\}$, кое ги задоволува условите 1) и 2). Тогаш

- $f(2^{n+1} - 1) \le f(2^n - 1) + 2$. Навистина, $B = A \cup \{2^{n+1} - 2, 2^{n+1} - 1\}$ е подмножество на $\{1, 2, 3, ..., 2^{n+1}\}$ кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи

$$2^{n+1} - 2 = 2^n - 1 + 2^n - 1 \text{ и } 2^{n+1} - 1 = 1 + 2^{n+1} - 2.$$

- $f(2^{2n} - 1) \le f(2^n - 1) + (n+1)$. Навистина

$$C = A \cup \{2(2^n - 1), 2^2(2^n - 1), ..., 2^n(2^n - 1), 2^{2n} - 1\}$$

е подмножество на $\{1, 2, 3, ..., 2^{2n} - 1\}$, кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи

$$2^{j+1}(2^n - 1) = 2^j(2^n - 1) + 2^j(2^n - 1), \text{ за } j = 0, 1, ..., n-1$$

и

$$2^{2n}-1=2^n(2^n-1)+2^n-1.$$

Тогаш

$$f(2^{1996}-1)\le f(2^{998}-1)+999,\quad f(2^{998}-1)\le f(2^{499}-1)+500,$$
$$f(2^{499}-1)\le f(2^{498}-1)+2,\quad f(2^{498}-1)\le f(2^{249}-1)+250,$$
$$f(2^{249}-1)\le f(2^{248}-1)+2,\quad f(2^{248}-1)\le f(2^{124}-1)+125,$$
$$f(2^{124}-1)\le f(2^{62}-1)+63,\quad f(2^{62}-1)\le f(2^{31}-1)+32,$$
$$f(2^{31}-1)\le f(2^{30}-1)+2,\quad f(2^{30}-1)\le f(2^{15}-1)+16,$$
$$f(2^{15}-1)\le f(2^{14}-1)+2,\quad f(2^{14}-1)\le f(2^{7}-1)+8,$$
$$f(2^{7}-1)\le f(2^{6}-1)+2,\quad f(2^{6}-1)\le f(2^{3}-1)+4,$$
$$f(2^{3}-1)\le f(2^{2}-1)+2,\quad f(2^{2}-1)\le f(2^{1}-1)+2,$$
$$f(2^{1}-1)\le 1.$$

Ако ги собереме горните неравенства, после скратувањето добиваме

$$f(2^{1996}-1)\le 2012.$$

Втор начин. Со $a_0(x)$ и $a_1(x)$ ќе го означуваме бројот на нулите и единиците во бинарниот запис на природниот број x. Со индукција по n ќе докажеме дека постои множество $A_n\subset\mathbb{N}$ кое го задоволува условот 2) такво што $1,2^n-1\in A_n$ и $|A_n|\le n-2+a_0(n)+2a_1(n)$. Бидејќи $a_0(1996)=4$ и $a_1(1996)=7$ ($1996=11111001100_2$), од тука ќе следува тврдењето на задачата.

За $n=1$ тврдењето важи. Нека претпоставиме дека $n=2k, k\in\mathbb{N}$. Тогаш за множеството A_n доволно е да земеме

$$A_k\cup\{2^{k+1}-2,2^{k+2}-2^2,\dots,2^{2k}-2^k,2^{2k}-1\}.$$

Навистина, лесно се гледа дека множеството го задоволува условот 2) и има $2k-1+a_0(k)+2a_1(k)=n-2+a_0(n)+2a_1(n)$ елементи.

Нека сега $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$. Слично како во претходниот случај за множеството A_n можеме да го земеме множеството

$$A_k\cup\{2^{k+1}-2,2^{k+2}-2^2,\dots,2^{2k+1}-2^{k+1},2^{k+1}-1,2^{2k+1}-1\}.$$