Владимир Стојановиќ
Белград

ЗАНИМЛИВИ СВОЈСТВА НА СТЕПЕНИТЕ 2^n И 3^n

1. Со пресметување на степените со основа 2, ги добиваме следниве броеви: $2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16$ итн., кои ја формираат низата 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Имаме:

$$1=2^0,\ 2=2^1,\ 3=1+2=2^0+2^1,\ 4=2^2,\ 5=1+4=2^0+2^2,$$
$$6=2+4=2^1+2^2,\ 7=1+2+4=2^0+2^1+2^2,\ 8=2^3.$$

Гледаме дека секој природен број, помал од 2^3 може да се изрази како степен $2^0, 2^1$ или 2^2, или како збир на степените $2^0, 2^1, 2^2$, така што во овој збир секој од степените $2^0, 2^1, 2^2$ се појавува најмногу еднаш.

Ако не секој од броевите 1, 2, ..., 7 го додадеме бројот $2^3=8$, ќе ги добиеме природните броеви 9, 10, ..., 15. На тој начин секој природен број помал од 16, или е еден од елементите, или е збир на два, три или четири елементи на множеството $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$. Следниот природен број е $16=2^4$. Ако бројот $16=2^4$ го додадеме на секој од броевите 1, 2, ..., 15, добиваме дека секој природен број од 1 до 31 може да се изрази преку степените $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ и 2^4. Продолжувајчи ја постапката добиваме дека секој природен број $n<2^{k+1}$ или е елемент на множеството $S=\{2^0, 2^1, ..., 2^k\}$ или на единствен начин може да се претстави како збир на елементи од множеството S. Притоа ниту еден елемент од множеството S не може да се појави како собирок повеќе од еднаш во изразувањето на еден број.

2. До сличен заклучок можеме да дојдеме разгчедувајќи ја низата степени со основа 3: $3^0=1, 3^1=3, 3^2=9, ...$ кои ја формираат низата 1, 3, 9, 27, ... За пресметување на природните броеви со помош на елементите на множеството $T=\{3^0, 3^1, 3^2, ..., 3^k\}$ нема да биде доволна операцијата собирање. Но, ако користиме собирање и одземање, тогаш секој природен број $n<\frac{3^{k+1}}{2}$ може да се изрази со помош на елементите на множеството T. Ова тврдење може непосредно да се провери за секој даден природен број

n. Може да се докаже дека за секој природен број n не е можно да се најде друго множество, да кажеме S, кое има помалку елементи од множеството T, а чии елементи го имаат ова својство.На пример, за првите 15 природни броеви, бидејќи $15<\frac{3^{3+1}}{2}$, доволно е да се комбинираат степените $3^0, 3^1, 3^2$ и 3^3. Имаме

$$1=3^0, 2=3^1-3^0, 3=3^1, 4=3^0+3^1, 5=3^2-3^1-3^0, 6=3^2-3^1,$$
$$7=3^2-3^1+3^0, 8=3^2-3^0, 9=3^2, 10=3^2+3^0, 11=3^2+3^1-3^0,$$
$$12=3^2+3^1, 13=3^2+3^1+3^0, 14=3^3-3^2-3^1-3^0, 15=3^3-3^2-3^1.$$

3. Користејќи ги наведените својства на степените 2^n и 3^n, може да се состават доста тешки математички проблеми за мерење. Се разбира, овие задачи ќе бидат тешки за оние кои не се запознаени со претходно наведените својства на степените, додека на нашите читатели тоа ќе им биде забавно.

Пример 1. Докажи дека на вага со помош на 4 тегови може да се измери секоја маса до $40\,kg$, изразена со природен број килограми. Кои се тоа тегови?

Решение. Според претходните разгледувања тоа не може да се постигне така што само на едната страна на вагата ќе ставаме тегови, бидејќи според формулата $n<2^{k+1}$, во овој случај треба да биде $40<2^{k+1}$, од каде добиваме $k\geq 5$.

Ако теговите ги ставаме на двете страни на вагата, тогаш нивниот број се добива од неравенката $40<\frac{3^{k+1}}{2}$, од каде следува $k=3$. Според тоа, најмалиот број тегови е 4 и тоа се теговите $3^0, 3^1, 3^2$ и $3^3\,kg$, односно 1, 3, 9 и $27\,kg$.

Да забележиме дека оваа задача има уште едно решение. Имено, бараното мерење може да се направи и ако наместо тегот од $1\,kg$ земеме тег од $2\,kg$. ■

Пример 2. Располагаме со вага на која може да се врши мерење на два начина: со ставање тегови само на еден тас на вагата, или со ставање тегови на двата таса на вагата. Дозволено е мерење со три тега кои сами ги избираме, но така да со нив можеме со едно мерење да ја измериме секоја маса во килограми, изразена редоследно со природните броеви $1, 2, ..., k$.

Кои тегови треба да ги земеме и колкав е бројот k (најголемиот број измерени килограми), ако мерењето го вршиме:

а) со ставање тегови само на еден тас,

б) со ставање тегови на двата таса на вагата.

Решение. а) Треба да определиме три природни броја со чие собирање се добива почеток на низата природни броеви. Тоа се степените со основа 2: $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4$. На овој начин може најмногу да узмериме $7\,kg$, т.е. $k = 7$.

б) При мерењето комбинираме собирање и одземање, па ќе ги земеме теговите $3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 9$. Овде $k = 1 + 3 + 9 = 13\,kg$. ■

Пример 3. Децималната вага е конструирана така што со секој тег се мери 10 пати поголема маса (тег од $100g$ е во рамнотежа со маса од $1kg$). Кој е најмалиот број тегови, со кои користејќи децимална вага може со едно мерење да се измери било кој цел број килограми од 1 до $100kg$? Колкава емасата на секој од овие тегови?

Решение. Користејќи ги својствата на степените со основа 2, заклучуваме дека се потребни 7 тегови, бидејќи $2^6 < 100 < 2^7 = 128$. Сите мерења успешно ќе ги направиме ако располагаме со тегови од:

$$100g, 200g, 400g, 800g, 1{,}6kg, 3{,}2kg \text{ и } 6{,}4kg\,. \blacksquare$$

Пример 4. Продавач изнесол на тезга вага и вреќа со $80kg$ ореви, кои сака да ги продава на килограми (купувачот може да купи $1kg, 2kg, 3kg$ итн., т.е. секој природен број килограми, помал или еднаков на $80kg$). Кој е најмалиот број тегови кои мора да ги има продавачот, за да може било која побарана количина ореви да ја измери со едно мерење? Колку мери секој од овие тегови?

Решение. При определување на бројот на потребните тегови земаме предвид дека веќе имаме измерено $80kg$. Како во пример 1, до $40kg$ мериме користејќи ги теговите $1kg$ (или $2kg$), $3kg, 9kg$ и $27kg$. За мерење количество поголемо од $40kg$, го користиме фактот дека знаеме колку килограми ореви има во вреќата. На пример, ако на почетокот треба да измериме $59\,kg$, ние ќе измериме $21kg$, па во вреќата ќе остане потребното количество ореви, а тоа е $80 - 21 = 59kg$. ■

4. Врз основа на наведените својства, можеш сам да направиш магични картички, кои служат за погаѓање на замислен број. На долниот цртеж се прикажани пет картички кои се направени врз основа на својствата на степените од видот 2^n. Потребно е вашата другарка (другар) да замисли еден природен број до 31 и да ти каже на кои картички тој број е запишан. Ти напамет ќе ги собереш првите броеви од овие картички и ќе го добиеш замислениот број. На пример, ако е замилсен бројот 25, ќе ти ги кажат првата, четвртата и петтата картичка, а ти ќе добиеш $1+8+16=25$.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Со внимателно разгледување на горните картички можеш и сам да заклучиш како истите се направени. Ако оваа игра ја повториш повеќе пати, вашите другари може да го откријат начинот на кој го погаѓаш замислениот број. Меѓутоа, ако за таа цел ги користиш долните картици, тогаш веројатно трикот нема да го открие никој без ваша помош. Секоја од овие седум картици содржи само еден од броевите 1, 3, 9 и 27 (степени на бројот 3). На некои картици овие броеви не се запишани на прво место, бидејќи броевите се запишани во растечки редослед.

	1	4	7	10
13	16	19	22	25

	2	3	4	11
12	13	20	21	22

	5	6	7	8
9	10	11	12	13

1	2	5	8	11
14	17	20	23	26

3	5	6	7	14
15	16	23	24	25

9	14	15	16	17
18	19	20	21	22

	14	15	16	17
18	19	20	21	22
23	24	25	26	27

Овде ги користиме степените со основа 3, и ти треба да знаеш дека на секоја картица главен број е 1, 3, 9 или 27. Вашиот познаник може да замилси некој природен број до 27 и да ви ги покаже картичките на кои овој број е запишан. Ти на тие картички ќе ги воочиш главните броеви. Потоа ќе ги собереш главните броеви од оние картички на кои првиот ред не е исполнет од почетокот (има на лево празно место). Тоа се првите три картици. Потоа од добиениот збир ги одземаш главните броеви кои се запишани на картици кои имаат по десет броја, и на крајот го додаваш главниот број кој е запишан на последната картичка. На пример, ако е замилсен бројот 25, ќе ти ги покажат првата, четвртата и седмата картичка, па затоа $1+27-3=25$.

Овие картици можеш и сам да ги направиш користејќи ги степените од видот 3^n и нивните својства. На пример, да направиш картици за погаѓање на броевите до 81, треба секој од броевите 1, 2, 3, ..., 81 да се изрази преку степените $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$, а потоа на девет картички да ги запишеш гчавните броеви 1, 3, 9, 27, 81, 1, 3, 9, 27 и на секоја картичка да го запишеш бројот кој се изразува со помош на овие броеви. На првите пет картички се главите броеви кои се собираат, а на другите четири се главните броеви кои се одземаат. Потоа на секоја картичка броевите подреди ги по големина.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија