XXV олимпијада

1. Нека x, y и z се ненегативни реални броеви за кои е исполнето равенството $x+y+z=1$. Докажи ги неравенствата

$$0 \le xy+yz+zx-2xyz \le \frac{7}{27}.$$

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во облик

$$xy+yz+zx-2xyz = xy(1-z)+yz(1-x)+zx \ge 0.$$

Последното неравенство е исполнето бидејќи броевите x, y, z се позитивни и $x+y+z=1$.

Ако броевите $\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-y$ и $\frac{1}{2}-z$ се ненегативни тогаш од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$[(\tfrac{1}{2}-x)(\tfrac{1}{2}-y)(\tfrac{1}{2}-z)]^{\frac{1}{3}} \le \tfrac{1}{3}[(\tfrac{1}{2}-x)+(\tfrac{1}{2}-y)+(\tfrac{1}{2}-z)].$$

Значи,

$$(\tfrac{1}{2}-x)(\tfrac{1}{2}-y)(\tfrac{1}{2}-z) \le [\tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{2}-(x+y+z))]^3 = (\tfrac{1}{6})^3, \qquad (1)$$

односно

$$\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{4}(x+y+z)+\tfrac{1}{2}(xy+yz+zx)-xyz \le \tfrac{1}{216}$$

и конечно

$$xy+yz+zx-2xyz \le \frac{7}{27}. \qquad (2)$$

Ако еден од броевите $\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-y$ и $\frac{1}{2}-z$ е негативен, тогаш неравенството (1) е точно, па на потполно ист начин се добива неравенство (2). Два од трите броеви $\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-y$ и $\frac{1}{2}-z$ не може да се негативни. Имено, $\frac{1}{2}-x<0$ и $\frac{1}{2}-y<0$, тогаш ако ги собереме последните неравенства добиваме $1<x+y$, што противречи на $x,y,z \ge 0$ и $x+y+z=1$.

2. Определи природни броеви a и b за кои:

1) производот $ab(a+b)$ не е делив со 7,

2) бројот $(a+b)^7-a^7-b^7$ е делив со 7^7.

Решение. Изразот $A=(a+b)^7-a^7-b^7$, го трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned} A &= 7ab[(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)] \\ &= 7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4) \\ &= 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2. \end{aligned}$$

Бидејќи $ab(a+b)$ не е делив со 7 тогаш $7^3|(a^2+ab+b^2)$, односно

$$a^2+ab+b^2=7^3k\,.$$

За $k=1$ и $b=1$ добиваме $a^2+a+1=343$, т.е. $(a-18)(a+19)=0$, од каде што добиваме $a=18$. Парот $a=18$ и $b=1$ ги задоволува условите од задачата.

3. Во рамнината се дадени две различни точки O и A. За секоја точка X во рамнината, различна од O, со $\alpha(X)$ ја означуваме големината на аголот AOX изразена во радијани ($0\le\alpha(X)<2\pi$ и аголот се мери од кракот AO во насока обратна од движењето на стрелките на часовникот) и со $C(X)$ ја означуваме кружницата со центар во O и радиус $\overline{OX}+\frac{\alpha(X)}{\overline{OX}}$. Точките од рамнината се обоени со конечно многу бои. Докажи дека во рамнината постои точка Y за која $\alpha(Y)>0$ и таква што на кружницата $C(Y)$ се наоѓа точка обоена со истата боја како и Y.

Решение. Разгледуваме произволни кружници $R=(O,r)$ и $S=(O,s)$. На кружницата R земаме точка X со $\alpha(X)=r(s-r)$. За да $0\le\alpha(X)<2\pi$ доволно е да земеме $0<r<s<1$. Кружницата $C(X)$ има радиус

$$\overline{OX}+\frac{\alpha(X)}{\overline{OX}}r+\frac{r(s-r)}{r}=s\,,$$

т.е. таа се совпаѓа со кружницата $S=(O,s)$.

Нека претпоставиме дека бојата на точката X не се појавува на кружницата S, т.е. дека множеството бои на кружницата R е различно од множеството бои на кружницата S. Тоа повлекува дека секои две кружници со радиус помал од единица се обоени со различни множества бои. Според тоа, на секоја кружница $S=(O,s_\nu),\,0<\nu<1$, а нив ги има бесконечно многу, постои боја што ја нема на кружницата R. Последното противречи на условот на задачата дека обојувањето на рамнината е со конечно многу бои.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник, за кој правата CD е тангента на кружницата со дијаметар AB. Докажи дека правата AB е тангента на кружницата со дијаметар CD ако и само ако правите BC и AD се паралелни.

Решение. Ако правите AB и CD се паралелни, бидејќи отсечката CD е тангента на кружницата со дијаметар AB, следува дека растојанието меѓу паралелните прави е $\frac{\overline{AB}}{2}$. За да биде правата што минува низ точките A и B тангента на кружницата со дијаметар CD треба $\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{\overline{AB}}{2}$. Тоа значи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм и $AD\,||\,BC$. Важи и обратното, ако

$AD \parallel BC$, тогаш полукружниците над дијаметрите AB и CD од паралелограмот $ABCD$ ги допираат страните CD и AB, соодветно.

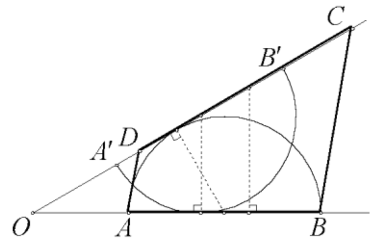
Нека правите AB и CD се сечат во точката O. На правата CD определуваме точки A' и B', така што $\overline{OA} = \overline{OA'}$ и $\overline{OB} = \overline{OB'}$.

Заради симетрија, правата AB ја допира кружницата со дијаметар $A'B'$. Затоа е исполнето: правата AB е тангента на кружницата со дијаметар CD

$\Leftrightarrow$ постои хомотетија таква што

$\overline{OD} = k \cdot \overline{OA'}$ и $\overline{OC} = k \cdot \overline{OB'}$

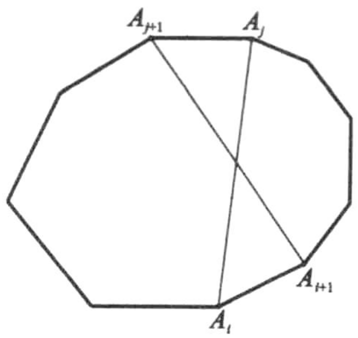
$\Leftrightarrow \frac{\overline{OD}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow AD \parallel BC$.



5. Со d да го означиме збирот на должините на дијагоналите на рамнински конвексен $n-$аголник, ($n > 3$), а со p неговиот периметар. Докажи дека

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < [\tfrac{n}{2}][\tfrac{n+1}{2}] - 2.$$

Решение. Темињата на n- аголникот ги означуваме со $A_1, A_2, ..., A_n$. Нека B е пресек на A_iA_j и $A_{i+1}A_{j+1}$. Од неравенството на триаголник следува (цртеж десно):

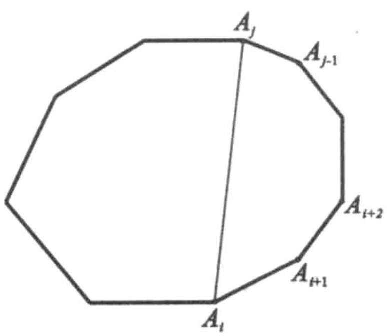


$$\overline{A_iB} + \overline{BA_{i+1}} > \overline{A_iA_{i+1}},$$
$$\overline{A_jB} + \overline{BA_{j+1}} > \overline{A_jA_{j+1}},$$

од каде што

$$\overline{A_iA_j} + \overline{A_{i+1}A_{j+1}} > \overline{A_iA_{i+1}} + \overline{A_jA_{j+1}}.$$

Последоното неравенство важи за сите парови соседни темиња и ако ги собереме овие неравенства, на левата страна ќе се појави двојниот збир на должините на сите дијагонали, а на десната страна $n-3$ пати се среќава должината на секоја страна на многуаголникот. Затоа



$$2d > (n-3)p, \text{ т.е. } n - 3 < \frac{2d}{p}.$$

За секоја дијагонала го применуваме неравенството

$$\overline{A_iA_j} < \sum_{k=i}^{j-1} \overline{A_kA_{k+1}} \qquad (2)$$

(цртеж лево).

На десната страна од неравенството (2)

секогаш ја земаме онаа половина на ликот која има помалку страни, а потоа ќе направиме збир по сите дијагонали ($1\le i< j-1\le n-2$). Нека $n=2m+1$ и нека ги разгледаме дијагоналите $A_1A_3, A_1A_4,..., A_1A_{m+1}$. Тогаш

$$\sum_{j=3}^{m+1}\overline{A_1A_j} < (m-1)\overline{A_1A_2} + (m-1)\overline{A_2A_3} + (m-2)\overline{A_3A_4} + (m-3)\overline{A_4A_5} + \overline{A_{m-1}A_m} \,. \quad (3)$$

На истиот начин се формираат неравенствата за $\sum\limits_{k=i+2}^{m+i}\overline{A_iA_k}$, за $i=2,...,n$, при што земаме $A_{n+i}=A_i$. Збирот на должините на сите дијагонали е даден со $d=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=i+2}^{m+i}\overline{A_iA_k}$, па со примена на (3) добиваме

$$d<(1+2+3+...+(m-1)+(m-1))p=(\tfrac{m(m+1)}{2}-1)p \,,$$

односно

$$\tfrac{2d}{p}<m(m+1)-2=[\tfrac{n}{2}][\tfrac{n+1}{2}]-2 \,.$$

Ако $n=2m$, тогаш на сличен начин се добива

$$d<(1+2+3+...+(m-2)+(m-2)+\tfrac{m}{2})p=(\tfrac{m(m-1)}{2}-1+\tfrac{m}{2})p=(\tfrac{m^2}{2}-1)p$$

т.е.

$$\tfrac{2d}{p}<m^2-2=[\tfrac{n}{2}][\tfrac{n+1}{2}]-2 \,.$$

6. Нека a,b,c и d се непарни природни броеви за кои:

(1) $0<a<b<c<d$,

(2) $ad=bc$ и

(3) $a+d=2^k$, $b+c=2^m$ за некои природни броеви k и n .

Докажи дека $a=1$.

Решение. Ќе докажеме дека $k>m$. Од $ad=bc$ следува $ad-bd=bc-bd$, т.е. $d(b-a)=b(d-c)$ и бидејќи $b<d$ добиваме $d-c>b-a$, односно $a+d>b+c$, што значи $2^k>2^m$ од што следува $k>m$.

Од условите (2) и (3) следува

$$a(2^k-a)=b(2^m-b) \text{, т.е. } (b-a)(b+a)=2^m(b-2^{k-m}a) \,.$$

Ако $b-a$ и $b+a$ се деливи со 4, тогаш $2b$ е делив со 4, што не е можно бидејќи b е непарен број. Значи, $2^{m-1}\,|(b-a)$ или $2^{m-1}\,|(b+a)$.

Во првиот случај имаме:

$$2^{m-1}\,|(b-a) \;\Rightarrow\; b-a\ge 2^{m-1} \;\Rightarrow$$
$$c-a\ge 2^{m-1} \;\Rightarrow\; b+c-2^m>2a \;\Rightarrow\; 0>a$$

што противречи на условот на задачата.

Во вториот случај имаме:

$$2^{m-1} \mid (b+a) \quad \text{и} \quad b+a < b+c = 2^m \quad \Rightarrow \quad b+a = 2^{m-1}.$$

Бидејќи a и b се непарни природни броеви, добиваме дека $\mathrm{NZD}(a,b)=1$. Од равенствата $a+b=2^{m-1}$ и $b+c=2^m$ следува равенството $c-a=2^{m-1}$ односно $\mathrm{NZD}(a,c)=1$. Според тоа, $\mathrm{NZD}(a,c)=1$, $\mathrm{NZD}(a,b)=1$ и како $ad=bc$, следува дека $a=1$.