Сојузен натпревар 1970

1. Дешифрирај го равенството

$$\overline{abcd} = (5c+1)^2.$$

Решение. Според условот на задачата важи

$$1000a + 110b + 10c + d = 25c^2 + 10c + 1,$$

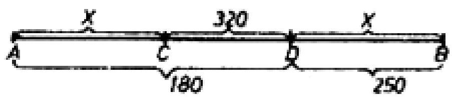
т.е.

$$25(40a + 4b - c^2) = 1 - d.$$

Левата страна е делива со 25, па затоа $25 | 1-d$, од каде добиваме $d = 1$. Според тоа, $40a + 4b - c^2 = 0$, т.е. $4(10a+b) = c^2$, од каде добиваме $4 | c^2$. Но, a,b,c се цифри и како $a \neq 0$ одма се добива дека $c^2 = 64$ и $10a + b = 16$. Значи, $c = 8, b = 6, a = 1$ и бараниот број е $\overline{abcd} = 1681$.

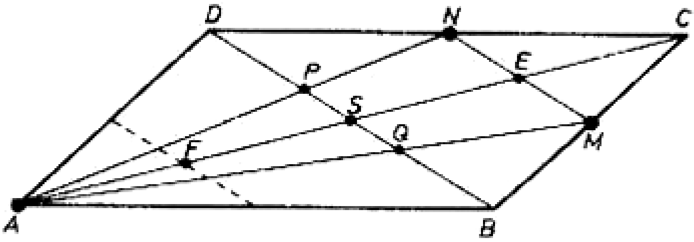
2. Авион летал од A во B и тоа прво со брзина $180\,km/h$, а кога му преостанало да прелета $320\,km$ помалку отколку што веќе прелетал, ја зголемил брзината на $250\,km/h$. На тој начин просечната брзина на авионот на целиот пат од A до B била $200\,km/h$. Определи ја должината на патот од A до B.

Решение. Времето да се помине патот од A до D е $\frac{x+320}{180}$, а времето да се помине патот од D до B е $\frac{x}{250}$. Затоа важи $2x + 320 = 200(\frac{x+320}{180} + \frac{x}{250})$, од каде добиваме $x = 400\,km$. Според тоа, должината на патот од A до B е $2x + 320 = 1120\,km$.



3. Милан нацртал паралелограм $ABCD$, со M ја означил средината на страната BC, со N ја означил средината на страната CD и потоа излегол од собатра. Тогаш неговата сестра Нада дошла до масата и на цртежот избришала се освен точките A, M и N. Помогни му на Милан да го реконструира цртежот, т.е. да ги најде точките B, C и D.

Решение. *Прв начин*. Искористи го фактот дека средината E на отсечката MN лежи на дијагоналата AC и ја дели во во однос 3:1, т.е. $CE = ES = SF = AF$, односно $AE = 3EC$ (види цртеж).

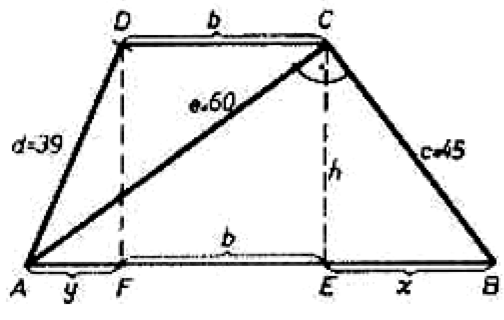


Втор начин. Точката P е тежиште на $\triangle ACD$, па затоа $AP:PN = 2:1$, па точката P може да се определи. Слично, $\triangle ABC$, па точката Q може да се определи. Со тоа се определени правите на кои лежат дијагоналите и нивниот пресек S. Понатаму, $SC = AS$, CN во пресекот со PQ ја дава точката D, а CM во пресекот со PQ ја дава точката B.

Трет начин. Прво докажи дека отсечките AM и AN ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела и дека $AP:PN = 2:1$ и $AQ:QN = 2:1$. Понатаму, $PQ \| NM$ итн. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

4. Краците на трапезот се $39\,mm$ и $45\,mm$, а дијагоналата која е нормална на подолгиот крак има должина $60\,mm$. Конструирај го овој трапез, а потоа пресметај ги неговиот периметар и плоштина.

Решение. Прво ќе ги пресметаме плоштината и периметарот на трапезот. Од првоаголниот $\triangle ABC$ за основата $AB = a$ имаме $a^2 = 60^2 + 45^2$, односно $a = 75\,mm$. Понатаму, за висината h на трапезот важи $\frac{75h}{2} = \frac{60 \cdot 45}{2}$, т.е.



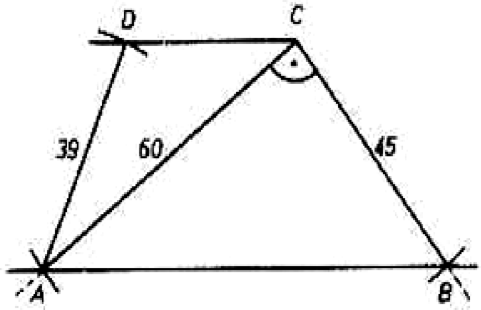
$h = 36\,mm$. Сега за проекциите на краците на основата AB имаме $x^2 = c^2 - h^2$ и $y^2 = d^2 - h^2$, односно $x = 27\,mm$ и $y = 15\,mm$. Затоа $b = a - (x + y) = 33\,mm$. Според тоа, периметарот на трапезот е

$$O = a+b+c+d = 192\,mm,$$

а неговата плоштина е

$$P = \frac{a+b}{2}h = 1944\,mm^2.$$

Конструкција: 1) Го конструираме правоаголниот триаголник ABC (дадени се катетите).
2) Низ точката C повлекуваме права $p \| AB$.
3) Од точката A опишуваме кружен лак со радиус $r = 39\,mm$ и во пресек со правата p ја определуваме точката D.



Трапезот $ABCD$ е бараниот трапез.

5. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $5a^2$, каде a е должината на работ на основата на таа пирамида.
а) Изрази го волуменот на оваа пирамида во функција од a.
б) Пресметај го волуменот на пирамидата ако $a = 6\,dm$.

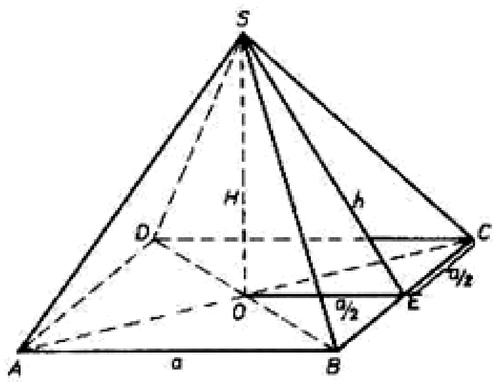
Решение. а) За плоштината на пирамидата има

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{ah}{2} = a^2 + 2ah,$$

па затоа $a^2 + 2ah = 5a^2$, од каде добиваме $h = 2a$. Понатаму, од Питагоровата теорема добиваме

$$H^2 = h^2 - (\tfrac{a}{2})^2 = \frac{15a^2}{4},$$

па затоа $H = \frac{a}{2}\sqrt{15}$.



Според тоа,

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{6}a^3.$$

б) За $a = 6\,dm$ имаме:

$$V = \frac{\sqrt{15}}{6} \cdot 6^3 = 36\sqrt{15}\,dm^3.$$