Владимир Стојановић (Београд)

КАКО ЋЕМО НАЈБРЖЕ ПОГОДИТИ ЗАМИШЉЕНИ ПРИРОДНИ БРОЈ?

Претпоставимо да је неко замислио један природан број и да тај број треба да откријемо само на основу тога што ћемо постављати разна питања, на која ћемо добијати кратке одговоре „да“ или „не“. Ради одређености договорићемо се да бројеве које погађамо записујемо у декадном позиционом бројном систему, мада се у принципу проблем решава сасвим слично и у другим бројним системима (бинарном, окталном, итд). Одговорићемо на три основна питања. Да ли је замишљени број увек могуће открити? Каква питања ћемо постављати? Ако се тај број може увек открити, колико најмање питања морамо поставити, па да сигурно дођемо до решења?

На прво питање можемо одмах одговорити потврдно. Наиме, можемо погађати једну по једну цифру замишљеног броја. На пример, можемо питати: „Да ли је последња (прва с десна) цифра тога броја 1“? Ако добијемо одговор „Да“, онда знамо последњу цифру и можемо прећи на погађање претпоследње. Ако је одговор „Не“, онда питамо: „Да ли је последња цифра 2“? Тако са највише 9 питања можемо сазнати која је последња цифра замишљеног броја. (За цифру 0 не морамо постављати питање, јер ако смо на првих 9 питања добили негативне одговоре, онда знамо да је последња цифра 0). Слично откривамо и остале цифре, а самим тим и замишљени број.

Било би интересантно да знамо колико питања морамо поставити да бисмо на овај начин открили замишљени број. Ово зависи пре свега од величине тог броја, а затим и од врсте питања која постављамо. Нека је, на пример, замишљен неки број, а ми не знамо чак ни колико он има цифара. Постављаћемо питања као што смо напред описали. Видели смо да за откривање последње цифре треба поставити највише 9 питања. Ако ова цифра није 0, онда морамо питати: „Да ли тај број има испред добијене цифре још неку цифру?“ Тако са највише 10 питања одредимо последњу цифру и утврдимо да ли треба наставити са питањима. Исто ће се поновити са другом, трећом и осталим цифрама. Тако, на пример, ако је замишљен неки четвороцифрен број, ми ћемо га открити са највише 40 питања. Ако би био замишљен број 9 999 требало би тачно 40 питања, али ако би то био број 1 111, онда би било довољно да поставимо свега 8 питања. Није тешко уверити се да бисмо на овај начин погодили, на пример, број 3 614 после тачно 18 питања.

Наш следећи задатак биће да утврдимо како се замишљени број може открити са још мањим бројем питања, као и колики је најмањи број неопходних питања. Поступак који смо описали спор је, јер се може догодити да се за сваку цифру мора поставити по 10 питања. Међутим, могуће је сваку цифру и брже погодити.

Поделимо ознаке за цифре на две класе (0, 1, 2, 3, 4) и (5, 6, 7, 8, 9) и поставимо питање: „Да ли је последња цифра тог броја већа од 4?" После добијеног одговора, рецимо да је одговор „Не", одбацимо половину цифара и остају првих пет, које поделимо поново у две класе, рецимо (0, 1) и (2, 3, 4). Сада питамо: „Да ли је последња цифра тог броја већа од 1?" Ако је одговор „Да", онда са још два питања утврдимо која је последња цифра траженог броја. Тако смо већ уштедели пет питања. Затим наставимо са питањима за следећу цифру.

Покушајмо да нађемо још бржи начин погађања замишљеног броја. Уколико се после једног питања одбаци више бројева, односно, уколико се тиме више смањује број могућих решења, утолико је поступак откривања броја бржи. Због природе одговора (постоје увек две могућности), најбрже ћемо доћи до решења ако са сваким питањем одбацимо половину могућих решења, а то ћемо постићи ако бројеве делимо на класе као што је претходно учињено са цифрама. Уочимо то на следећем примеру.

Неко је замислио један троцифрен број. Нека је то, на пример, број 379. Ми знамо да овај број има 3 цифре, али наравно не знамо које су. Бројеве до 999 поделићемо у две класе: до 500 и веће од 500, и поставићемо питање: „Да ли је тај број већи од 500?" Одговор ће бити „Не". Преостале бројеве (до 500) поново распоредимо у две бројно једнаке класе, обухватајући бројеве до 250 и бројеве веће од 250. Друго питање биће: „Да ли је тај број већи од 250?" Одговор ће бити „Да". Сада ћемо бројеве од 251 до 500 поделити у две класе: до 375 и веће од 375. Треће питање биће: „Да ли је тај број већи од 375", итд. Није тешко уверити се да тражени број откривамо после тачно 10 питања.

Може ли се тачно утврдити колико је најмање питања потребно за погађање било којег броја са утврђеним бројем цифара? Одговор ћемо наћи на следећи начин. Непосредним израчунавањем можемо утврдити да највећи могући такав број, тј. број записан само цифрама 9, задовољава услов $2^{k-1}<n_9<2^k$, где се k на основу познатог броја n_9 лако израчуна. На пример, у случају троцифрених бројева је $2^9<999<2^{10}$, јер је $2^9=512$, а $2^{10}=1024$. Како је $2^{k-1}+2^{k-1}=2\cdot 2^{k-1}=2^k$, то се бројеви мањи од 2^k могу поделити у две класе које садрже једнак број елемената (једну класу чине бројеви који су већи од 2^{k-1}). Постављајући прво питање: ,,Да ли је тај број већи од 2^{k-1}?", преполовићемо број могућих решења. (Уместо 2^{k-1} можемо навести вредност овог степена. На пример, у претходном случају то је степен 2^9, односно број 512). После добијеног одговора преосталих 2^{k-1} бројева поделимо на две класе од по 2^{k-2} елемената. Затим постављамо друго питање. После $(k-1)$ питања преостаће само два броја. Одговор на последње $(k-\text{то})$ питање омогућиће нам да погодимо тражени број.

Уколико није познато колико цифара има замишљени број, сличним питањима одредићемо најпре једну класу бројева, са парним бројем елемената, у којој се налази и замишљени број, а затим наставити са питањима као што је напред наведено. Питања ћемо постављати тако, да се непознати број открије утолико брже уколико је он мањи. Показаћемо на једном примеру како треба постављати питања.

Нека је замишљен број 107. Прво питање: ,,Да ли је тај број већи од 1?" Одговор је ,,Да". Друго питање: ,,Да ли је тај број већи од 2?", Одговор је опет ,,Да". Треће питање: ,,Да ли је тај број већи од 4?", затим ,,Да ли је тај број већи од 8?", итд. У ствари ми тражимо одговоре редом на питања да ли је замишљени број већи од 2^0, од 2^1, од 2^2, од 2^3, и тако редом, све дотле док добијамо потврдне одговоре. У наведеном примеру одговор на седмо питање: ,,Да ли је тај број већи од 64?", је потврдан, а одговор на осмо питање: ,,Да ли је тај број већи од 128?" је негативан. Дакле, тражени број је између 65 и 128. Овај скуп бројева поделимо на бројеве до 96 и веће од 96. Девето питање је: ,,Да ли је тај број већи од 96?" Даљим питањима сужавамо интервал у коме се налази тражени број: ,,Да ли је тај број већи од 112?". Једанаесто питање: ,,Да ли је тај број већи од 104?". Одговор на ово питање је ,,Да".

Сада знамо да је непознати број између 105 и 112. Дванаесто питање је: „Да ли је тај број већи од 108“, са одговором „Не“. Тринаесто питање је „Да ли је тај број већи од 106?“. После одговора „Да“, преостају још само две могућности: тражени број је 107 или 108. Последње, четрнаесто питање може да гласи: „Да ли је тај број 107?“, или „Да ли је тај број 108?“ Но, макар какав да је одговор, после тога знаћемо који је тражени број.

Овај пример нам даје објашњење како треба постављати питања да бисмо најбрже погодили замишљени број ако не знамо колико тај број има цифара.

Сада се можете са својим друговима и другарицама играти „погађања замишљеног броја“, а ако они не знају трикове које сте сада научили, можете се са њима такмичити ко ће са мање питања открити неки троцифрени број, четвороцифрени број, итд. Можете чак и да прогнозирате тачно после којег питања ћете погодити замишљени број.

Напомена. Замишљени број се најлакше може погодити ако је записан у бинарном бројном систему, тј. у бројном систему у којем се бројеви записују са само две цифре 0 и 1. Пошто је свака цифра 0 или 1, то за сваку цифру питамо: „Да ли је та цифра 1?“ Ако је одговор „Не“, онда је та цифра 0. Ако је замишљен број у декадном бројном систему, а ви и ваш партнер у игри знате како се број преводи из декадног система у бинарни и обрнуто, онда можете од партнера тражити да замишљени број преведе у бинарни систем. Затим погађате бинарне цифре овог броја. Кад добијете број у бинарном систему, ви га вратите у декадни и проблем је решен.

Задаци

1. Колико највише питања морамо поставити да бисмо погодили број телефона који је у телефонском именику записан са 6 цифара?

2. Са колико највише питања можемо погодити петоцифрен број у декадном бројном систему, ако знамо да је а) дељив са 5; б) непаран?

Статијата првпат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија