

Здравко Цветковски
Ристо Малчески
Скопје

НЕРАВЕНСТВА НА SCHUR И MUIRHEAD

Нека се дадени $x_i \in \mathbb{R}^+$, $i=1,2,\dots,n$ и $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$. Ставаме $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ и со $T[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ да ја означиме сумата од производите $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по сите пермутации на $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, т.е.

$$T[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \sum_{\substack{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \\ \text{е пермутација на} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$$

Пример 1. Имаме:

$$T[1, 0, \dots, 0] = (n-1)!(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad T[a, a, \dots, a] = n! x_1^a x_2^a \dots x_n^a,$$

$$T[1, 2] = x^2 y + x y^2, \quad T[1, 2, 1] = 2x^2 yz + 2y^2 xz + 2z^2 yx,$$

$$T[2, 1, 0] = x^2 y + x^2 z + y^2 x + y^2 z + z^2 x + z^2 y,$$

$$T[3, 0, 0] = 2(x^3 + y^3 + z^3). \blacklozenge$$

Теорема 1 (Schur). Нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Тогаш

$$T[\alpha + 2\beta, 0, 0] + T[\alpha, \beta, \beta] \geq 2T[\alpha + \beta, \beta, 0].$$

Доказ. Нека $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Со помош на елементарни трансформации имаме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T[\alpha + 2\beta, 0, 0] + \frac{1}{2}T[\alpha, \beta, \beta] - T[\alpha + \beta, \beta, 0] &= \\ &= x^\alpha (x^\beta - y^\beta)(x^\beta - z^\beta) + y^\alpha (y^\beta - x^\beta)(y^\beta - z^\beta) + z^\alpha (z^\beta - x^\beta)(z^\beta - y^\beta). \end{aligned}$$

Според тоа, почетното неравенство е еквивалентно со неравенството:

$$x^\alpha (x^\beta - y^\beta)(x^\beta - z^\beta) + y^\alpha (y^\beta - x^\beta)(y^\beta - z^\beta) + z^\alpha (z^\beta - x^\beta)(z^\beta - y^\beta) \geq 0. \quad (1)$$

Без губење на општоста можеме да земеме дека $x \geq y \geq z$. Нека $\alpha \geq 0$. Тогаш:

$$\begin{aligned} x^\alpha (x^\beta - y^\beta)(x^\beta - z^\beta) &\geq x^\alpha (x^\beta - y^\beta)(y^\beta - z^\beta) \\ &\geq y^\alpha (x^\beta - y^\beta)(y^\beta - z^\beta) \\ &= -y^\alpha (y^\beta - x^\beta)(y^\beta - z^\beta), \end{aligned}$$

т.е.

$$x^\alpha (x^\beta - y^\beta)(x^\beta - z^\beta) + y^\alpha (y^\beta - x^\beta)(y^\beta - z^\beta) \geq 0.$$

Но,

$$z^\alpha (z^\beta - x^\beta)(z^\beta - y^\beta) \geq 0,$$

и ако ги собереме последните неравенства го добиваме неравенството (1). Аналогно се разгледува случајот кога $\alpha < 0$. ♦

Пример 2. Ако во Неравенството на Шур ставиме $\alpha = \beta = 1$, добиваме

$$T[3, 0, 0] + T[1, 1, 1] \geq 2T[2, 1, 0],$$

т.е.

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz \geq 2(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y),$$

што значи

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y. \quad \spadesuit \quad (2)$$

Последица 1. Ако $x, y, z > 0$, тогаш

$$3xyz + x^3 + y^3 + z^3 \geq 2((xy)^{3/2} + (yz)^{3/2} + (zx)^{3/2}).$$

Доказ. Од неравенството (2) и неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz &\geq (x^2y + y^2x) + (z^2y + y^2z) + (x^2z + z^2x) \\ &\geq 2((xy)^{3/2} + (yz)^{3/2} + (zx)^{3/2}), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Последица 2. Нека $k \in (0, 3]$. Тогаш за секои $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ важи

$$(3-k) + k(abc)^{2/k} + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Доказ. Ставаме

$$x = a^{2/3}, \quad y = b^{2/3}, \quad z = c^{2/3}.$$

Тогаш даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(3-k) + k(xyz)^{3/k} + x^3 + y^3 + z^3 \geq 2((xy)^{3/2} + (yz)^{3/2} + (zx)^{3/2}).$$

Сега, од последица 1 следува дека доволно е да го докажеме неравенството

$$(3-k) + k(xyz)^{3/k} \geq 3xyz.$$

Но, од обопштена теорема за средини имаме

$$\frac{3-k}{3} \cdot 1 + \frac{k}{3} (xyz)^{3/k} \geq 1^{(3-k)/3} ((xyz)^{3/k})^{k/3} = xyz,$$

т.е.

$$(3-k) + k(xyz)^{3/k} \geq 3xyz. \quad \spadesuit$$

Пример 3. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Да се докаже неравенството:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + ac + bc).$$

Решение. После средовањето, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$8 + (abc)^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9(ab + ac + bc) . \quad (3).$$

Од

$$(ab-1)^2 + (bc-1)^2 + (ca-1)^2 \geq 0$$

добиваме

$$6 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 4(ab + ac + bc) \quad (4)$$

и важи

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab + ac + bc) . \quad (5)$$

Ако во последица 2 земеме $k=1$ имаме:

$$2 + (abc)^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + ac + bc) . \quad (6)$$

Со собирање на (4), (5) и (6) го добиваме неравенството (3).♦

Дефиниција 2. Ќе велиме дека низата $(\alpha_i)_{i=1}^n$ ја мајоризира низата $(\beta_i)_{i=1}^n$, во ознака $(\beta_i) \prec (\alpha_i)$, ако можеме да ги разместиме елементите на низите $(\alpha_i)_{i=1}^n$ и $(\beta_i)_{i=1}^n$, така што за новодобиените низи важат:

$$1^\circ \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$2^\circ \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \text{ и } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$$

$$3^\circ \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s \text{ за секој } 1 \leq s < n . \spadesuit$$

Во врска со претходно дефинираниот поим за мајоризација на низи, без доказ, ќе ја презентираме теоремата на Muirhead.

Теорема 2 (Muirhead). Нека $x_i \in \mathbb{R}^+$, $i=1,2,\dots,n$ и $(\alpha_i)_{i=1}^n$ и $(\beta_i)_{i=1}^n$ се низи од позитивни реални броеви. Ако $(\beta_i) \prec (\alpha_i)$, тогаш $T[\beta_i] \leq T[\alpha_i]$, при што знак за равенство важи ако и само ако низите $(\alpha_i)_{i=1}^n$ и $(\beta_i)_{i=1}^n$ се совпаѓаат или $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.♦

Во натамошните разгледувања со помош на теоремата на Muirhead ќе презентираме решенија на некои нестандартни неравенства, дел од кои се задавани на меѓународни натпревари по математика.

Пример 4. Нека низата променливи е $x, y, z > 0$ и нека се дадени низите $(2,2,1)$ и $(3,1,1)$. Тогаш јасно $(2,2,1) \prec (3,1,1)$. Сега од претходната теорема следува $T[2,2,1] \leq T[3,1,1]$. Според тоа, точно е неравенството

$$2(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x) \leq 2(x^3yz + y^3zx + z^3yx),$$

кое е еквивалентно на добро познатото неравенство

$$xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2. \spadesuit$$

Пример 5. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Да се докаже неравенството

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

Решение. Од теоремата на Muirhead следува

$$T[4, 0, 0] \geq T[2, 1, 1] \Leftrightarrow$$

$$\frac{T[4, 0, 0]}{2} \geq \frac{T[2, 1, 1]}{2} \Leftrightarrow$$

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab \Leftrightarrow$$

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c). \spadesuit$$

Пример 6. Да се докаже дека за позитивните реални броеви a, b, c важи неравенството

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Решение. Равенството (7) го множиме со

$$abc(a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc) > 0$$

и го добиваме еквивалентното равенство

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}T[4, 4, 1] + 2T[5, 2, 2] + \frac{1}{2}T[7, 1, 1] + \frac{1}{2}T[3, 3, 3] &\leq \\ &\leq \frac{1}{2}T[3, 3, 3] + T[6, 3, 0] + \frac{3}{2}T[4, 4, 1] + \frac{1}{2}T[7, 1, 1] + T[5, 2, 2], \end{aligned}$$

т.е. неравенството

$$T[5, 2, 2] \leq T[6, 3, 0],$$

кое непосредно следува од теоремата на Muirhead. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$. $\spadesuit$

Пример 7. Нека a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи $a + b + c = 1$. Да се докаже дека

$$0 \leq ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}.$$

Решение. Левата страна на неравенството следува од

$$\begin{aligned} ab + bc + ca - 2abc &= (a + b + c)(ab + bc + ca) - 2abc \\ &= a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + abc = T[2, 1, 0] + \frac{1}{6}T[1, 1, 1] \end{aligned}$$

и од очигледното неравенство

$$T[2, 1, 0] + \frac{1}{6}T[1, 1, 1] \geq 0.$$

Понатаму имаме:

$$\frac{7}{27} = \frac{7}{27}(x+y+z)^3 = \frac{7}{27}\left(\frac{1}{2}T[3,0,0] + 3T[2,1,0] + T[1,1,1]\right),$$

па добиваме дека бараното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$T[2,1,0] + \frac{1}{6}T[1,1,1] \leq \frac{7}{27}\left(\frac{1}{2}T[3,0,0] + 3T[2,1,0] + T[1,1,1]\right)$$

т.е. на неравенството

$$12T[2,1,0] \leq 7T[3,0,0] + 5T[1,1,1]. \quad (7)$$

Сега од теоремата на Muirhead следува:

$$2T[2,1,0] \leq 2T[3,0,0] \quad (8)$$

и ако во неравенството на Schur ставиме $\alpha = \beta = 1$ добиваме:

$$10T[2,1,0] \leq 5T[3,0,0] + 5T[1,1,1]. \quad (9)$$

Ако ги собереме (1) и (2) го добиваме неравенството (7), кое и требаше да се докаже. ♦

Пример 8. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ и $abc = 1$. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Ако најпрво го хомогенизираме даденото неравенство, т.е.

двете страни ги поделиме со $(abc)^{\frac{4}{3}} = 1$, а потоа ги сведеме на ист содржател

$$a^3b^3c^3(a+b)(b+c)(c+a),$$

даденото неравенство ќе биде еквивалентно со неравенството

$$2T\left[\frac{16}{3}, \frac{13}{3}, \frac{7}{3}\right] + T\left[\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, \frac{4}{3}\right] + T\left[\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3}\right] \geq 3T[5, 4, 3] + T[4, 4, 4]. \quad (10)$$

Сега поради Теоремата на Muirhead имаме дека важат

$$2T\left[\frac{16}{3}, \frac{13}{3}, \frac{7}{3}\right] \geq 2T[5, 4, 3], \quad T\left[\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, \frac{4}{3}\right] \geq T[5, 4, 3], \quad T\left[\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3}\right] \geq T[4, 4, 4].$$

Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (10).

Знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c = 1$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. (Iran,96) Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

2. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Да се докаже неравенството

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq 3 \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}.$$

3. (IMO 2005) Нека $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ се такви што $xyz \geq 1$. Да се докаже неравенството

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

4. Нека a, b, c се должини на страни на триаголник. Да се докаже неравенството

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \geq a^3 + b^3 + c^3 + 2abc. \bullet$$

5. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ се такви што $ab + bc + ca = 1$. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}.$$

Литература

1. Lee H. (2007), Topics in Inequalities-Theorems and Techniques
2. Matic I. (2007), Classical Inequalities

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ