JMMO 2019

1. Определи ги сите прости броеви од облик $1+2^p+3^p+...+p^p$ каде p е прост број.

   Решение. *Прв начин.* За $p=2$ го добиваме бројот $1+2^2=5$, кој е прост број. Нека $p>2$ односно нека p е непарен број. Тогаш бројот

   $$1+2^p+...+p^p=(1^p+(p-1)^p)+(2^p+(p-2)^p)+...+((\tfrac{p-1}{2})^p+(\tfrac{p+1}{2})^p)+p^p$$

   е делив број со p, бидејќи секој од броевите во заградите е делив со p. Навистина, од

   $k^p \equiv k^p(\mathrm{mod}\, p)$, $p-k\equiv -k(\mathrm{mod}\, p)$ и $(p-k)^p\equiv(-k)^p\equiv -k^p(\mathrm{mod}\, p)$,

   следува

   $$k^p+(p-k)^p\equiv k^p-k^p\equiv 0(\mathrm{mod}\, p).$$

   Според тоа, за произволен непарен прост број p број од видот $1+2^p+3^p+...+p^p$ е сложен број.

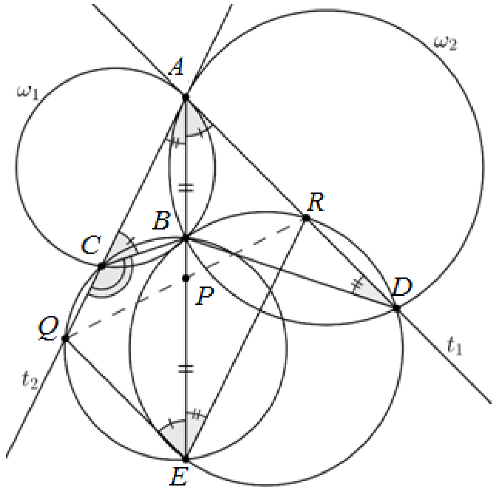
   Конечно, единствено решение на задачата е бројот 5 кој се добива за $p=2$.

   Втор начин. Од малата теорема на Ферма следува $a^p\equiv a(\mathrm{mod}\, p)$, за секој природен број a и секој прост број p. Затоа

   $$1+2^p+3^p+...+p^p\equiv 1+2+...+p=\frac{p(p+1)}{2}(\mathrm{mod}\, p).$$

   Ако p е непарен број, тогаш $p+1$ е парен од каде следува дека $\frac{p(p+1)}{2}\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, што значи дека во овој случај задачата нема решение. За $p=2$ добиваме $1+2^2=5$, па затоа единствено решение на задачата е бројот 5.

2. Кружниците ω_1 и ω_2 се сечат во две точки A и B. Нека t_1 и t_2 се тангентите на ω_1 и ω_2, соодветно, низ точката A. Нека вториот пресек на ω_1 и t_2 е C, а вториот пресек на ω_2 и t_1 е D. На полуправата AB, по B, дадени се точки P и E, така што $\overline{AE}=2\cdot\overline{AP}$. Опишаната кружница на $\triangle BCE$ ја сече t_2 по втор пат во точка Q, а опишаната кружница на $\triangle BDE$ ја сече t_1 по втор пат во точка R. Докажи дека точките P,Q и R се колинеарни.



Решение. Од својството за агол меѓу тангентата t_1 и тетивата AB во ω_1 имаме

$$\measuredangle BCA = \measuredangle BAD.$$

Од тетивниот четириаголник $BCQE$ имаме

$$\measuredangle QEB + \measuredangle QCB = 180^\circ.$$

Значи,

$$\begin{aligned}\measuredangle QEA &= \measuredangle QEB\\ &= 180^\circ - \measuredangle QCB\\ &= \measuredangle BCA = \measuredangle BAD\\ &= \measuredangle EAR,\end{aligned}$$

па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $QE \parallel AR$.

Од својството за агол меѓу тангентата t_2 и тетивата AB во ω_2 имаме $\measuredangle ADB = \measuredangle BAC$. Од тетивниот четириаголник $BRDE$ имаме

$$\measuredangle REB = \measuredangle RDB.$$

Значи,

$$\measuredangle REA = \measuredangle REB = \measuredangle RDB = \measuredangle ADB = \measuredangle BAC = \measuredangle EAQ,$$

па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $RE \parallel AQ$.

Значи, четириаголникот $AQER$ е паралелограм. Од $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AP}$, добиваме $\overline{AE} = \overline{PE}$, т.е. P е средина на дијагоналата AE во паралелограмот $AQER$. Бидејќи дијагоналите во паралелограм се преполовуваат во пресечната точка, добиваме дека P мора да е средина и на другата дијагонала QR, т.е. $P \in QR$. Значи, точките P, Q и R се колинеарни.

3. Дефинираме боење на рамнината на следниот начин:
   - избираме природен број m,
   - нека $K_1, K_2, ..., K_m$ се различни кругови со ненулти радиуси такви што $K_i \subset K_j$ или $K_j \subset K_i$ за $i \neq j$,
   - точките од рамнината кои што се надвор од произволен од избраните кругови се различно обоени од точките кои што се внатре во кругот.

Во рамнината се дадени 2019 точки такви што било кои три од нив не се колинеарни. Определи го максималниот број на бои со кои дадените точки можат да се обојат?

Решение. Од условот на задачата следува дека максималниот број бои е помал или еднаков на 2019.

Ќе докажеме дека бројот 2019 бои се достигнува. За таа цел доволно е да докажеме дека постојат $K_1, K_2, ..., K_{2019}$ кругови кои дефинираат различно боење на точките. Ги повлекуваме сите отсечки кои имаат крајни точки во дадените 2019 точки, вкупно $\frac{2019 \cdot 2018}{2}$ отсечки. На овие отсечки повлекуваме симетрали. Избираме точка O која не лежи на ниту една од повлечените симетрали. Јасно, растојаниата од таа точка до дадените 2019 точки се меѓу себе различни (избраната точка не лежи на било која од симетралите на отсечките) и овие растојанија ги подредуваме во растечки редослед $0 < s_1 < s_2 < ... < s_{2019}$. Понатаму, наоѓаме броеви $r_i, i = 1, 2, ..., 2019$ тави што

$$s_1 < r_1 < s_2 < r_2 < ... < s_{2019} < r_{2019}.$$

Конечно, конструираме 2019 концентрични кружници со центар во точката O и радиуси $r_i, 1 \le i \le 2019$. Јасно, овие кружници дефинираат боење во кое секоја од избраните 2019 точки е различно обоена.

4. Нека реалните броеви a, b, c се такви што

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc \text{ и } (a^9 + b^9)(b^9 + c^9)(c^9 + a^9) = a^9 b^9 c^9.$$

Докажи дека најмалку еден од броевите a, b, c е еднаков на нула.

Решение. За секои реални броеви x и y важи

$$x^2 - xy + y^2 \ge xy \text{ и } x^6 - x^3 y^3 + y^6 \ge x^3 y^3.$$

Затоа

$$\begin{aligned} x^9 + y^9 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3 y^3 + x^6) \\ &\ge (x+y) xy x^3 y^3 = (x+y) x^4 y^4. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x = y$. Користејќи го последното неравенство добиваме

$$\begin{aligned} a^9 b^9 c^9 &= (a^9 + b^9)(b^9 + c^9)(c^9 + a^9) \\ &\ge (a+b)(b+c)(c+a) a^4 b^4 b^4 c^4 c^4 a^4 = a^9 b^9 c. \end{aligned}$$

Ако $abc \ne 0$, тогашзнак за равенство важи ако $a = b = c$.Но, тогаш со замена во

$$(a+b)(b+c)(c+a)=abc$$

добиваме $8a^3 = a^3$, од каде следува $a=0$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека најмалку еден од броевите a,b,c еднаков на нула.

5. Нека $p_1, p_2, ..., p_k$ се различни прости броеви. Определи го бројот на природни броеви од облик $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ за кои важи

$$\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k = p_1 p_2 ... p_k .$$

Решение. Јасно, од $p_1 p_2 ... p_k = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k$ следува за секој $i \in \{1,...,k\}$ важи $p_i \mid \alpha_s$, за некој $s \in \{1,2,...,k\}$. Имајќи го предвид последното ќе конструираме подредена $k-$торка $(\alpha_1,...,\alpha_k)$ природни броеви за која е исполнето равенството $p_1 p_2 ... p_k = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k$. Земаме $k-$торка $(1,1,...,1)$. Со бројот p_1 множиме произволен (еден) член на оваа $k-$торка, што значи дека за p_1 имаме k можности. Понатаму, во добиената $k-$торка со p_2 множиме произволен (еден) нејзин член, што значи дека за p_2 имаме k можности. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека за секој од простите броеви p_3 ,..., p_k имаме k можности. Според тоа, добиваме дека постојат k^k подредени $k-$торки $(\alpha_1,...,\alpha_k)$ за кои важи $p_1 p_2 ... p_k = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k$. Јасно, секоја од овие $k-$торки определува број од видот $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ и различните подредени $k-$торки определуваат различни броеви од бараниот вид. Навистина, ако $(\alpha_1,...,\alpha_k) \neq (\beta_1,...,\beta_k)$, тогаш $\alpha_i \neq \beta_i$ за барем еден $i \in \{1,2,...,k\}$, па затоа $p_i^{\alpha_i} \neq p_i^{\beta_i}$, од каде следува

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} \neq p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k} .$$

Обратно, секој број од видот $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ за кои важи $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k = p_1 p_2 ... p_k$ определува подредена $k-$торка $(\alpha_1,...,\alpha_k)$ природни броеви за која е исполнето равенството $p_1 p_2 ... p_k = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k$.

Конечно, бројот на природни броеви од облик $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ за кои важи $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k = p_1 p_2 ... p_k$ е еднаков на k^k.