3-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2007 год

Задача №1. Имеется 111 монет. Требуется разложить эти монеты по клеткам квадратной доски $n \times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1 (в клетках может быть по нескольку монет или не быть их вообще). При каком максимальном n это возможно?

Задача №2. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M так, что $\angle MBC = \angle MDC$, $\angle MBA = \angle MCD$. Докажите, что угол $\angle ADC$ равен одному из углов $\angle BMC$ или $\angle AMB$, если известно, что $\angle BAC = \angle DAC$.

Задача №3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых число $2^n + 3^n$ делится на n^2.

Задача №4. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ - множество действительных чисел, такая, что для любых действительных чисел x, y выполняется равенство:

$$f(x + f(y)) = f(x) + \sin y?$$

Задача №5. Множество всех положительных действительных чисел разбито на 3 непустых попарно непересекающихся множества.

а) Докажите, что можно выбрать 3 числа, по одному из каждого множества, которые служат длинами сторон некоторого треугольника.

б) Всегда ли можно выбрать числа (по одному из каждого множества) так, чтобы они являлись длинами сторон прямоугольного треугольника?

Задача №6. Про выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ известно, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке M. Кроме того, треугольники ABM, BCM, CDM, DEM, EFM и FAM - остроугольные, а центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольники $ABDE$, $BCEF$ и $CDFA$ имеют равные площади.