# Jedan način rješavanja jednadžbi četvrtog stupnja

*Milorad Tomić*[1]*, Bjelovar*

Prikazat ćemo jedan način rješavanja algebarskih jednadžbi četvrtog stunja s realnim koeficijentima. Ideja za algoritam se temelji na (geometrijskim) jednakostima izračunavanja površine trokuta i njihovom poopćavanju u algebarskom smislu.

Dana je jednadžba četvrtog stupnja po $t$ u obliku

$$t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0.$$

Zamijeni li se $t$ sa $x - \dfrac{A}{4}$, dobiva se jednadžba oblika

$$x^4 + p_1x^2 + p_2x + q = 0. \tag{1}$$

Nađimo rješenja ove jednadžbe primjenom poznatog iskaza za površinu trokuta pomoću njegovih stranica. Neka su dani brojevi $a$, $b$, $c$ i $P$ tako da vrijedi

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) = 16P^2. \tag{2}$$

Uvedemo li zamjene $S = \dfrac{a+b+c}{2}$, $D = a^2+b^2+c^2$, nakon sređivanja iz (2) dobivamo jednadžbu četvrtog stupnja

$$S^4 - \frac{D}{2}S^2 - abcS - P^2 = 0. \tag{3}$$

Uvedemo li ponovo zamjene:

$$x = S, \quad p_1 = -\frac{D}{2}, \quad p_2 = -abc, \quad q = -P^2,$$

jednadžbu (3) svodimo na oblik (1). Možemo li jednadžbu (1) četvrtog stupnja svesti na jednadžbu trećeg stupnja? Odgovor na ovo pitanje ćemo uskoro vidjeti.

Jednadžbu trećeg stupnja (čija će rješenja biti kvadrati brojeva $a$, $b$, $c$) možemo sastaviti iz brojeva drugog i četvrtog stupnja, te umnožaka tih brojeva. Sama rješenja jednadže (1) dobit ćemo pravilnim odabirom vrijednosti drugih korijena ovih rješenja.

Prema Viètovim formulama zbroj rješenja jednadžbe (1) je jednak 0. Uz supstituciju $x_1 = \dfrac{a+b+c}{2}$, je $x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a+b+c}{2}$.

[1] Dr. sc. Milorad Tomić je profesor matematike u Gimnaziji u Bjelovaru, e-mail: mm_tomic@yahoo.com

Pomoću Heronove formule $S(S-a)(S-b)(S-c)=P^2$ dobivamo jednakost

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)=-q. \tag{4}$$

Neka su $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ rješenja jednadžbe (3). Tada vrijedi $S_1S_2S_3S_4=q$, $S_2+S_3+S_4=-\dfrac{a+b+c}{2}$. Jednakost (4) pišemo u obliku

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-(b+c)}{2}\right)\left(\frac{b-(a+c)}{2}\right)\left(\frac{c-(a+b)}{2}\right)=q. \tag{5}$$

odnosno

$$x_1=\frac{a+b+c}{2},\quad x_2=\frac{a-(b+c)}{2},\quad x_3=\frac{b-(a+c)}{2},\quad x_4=\frac{c-(a+b)}{2}.$$

Napomenimo da je jednakost (2) za površinu trokuta *algebarska*, odnosno, istinita je i za kompleksme brojeve.

Iz (4) slijedi

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=-16q,$$

i nadalje redom:

$$\begin{aligned}\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)&=-16q,\\ 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)&=-16q,\\ \left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^4+b^4+c^4\right)&=-16q.\end{aligned}$$

Iz ovih jednakosti dobiju se ove dvije:

$$\begin{aligned}a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2&=\frac{a^4+b^4+c^4}{2}-8q,\\ \frac{a^4+b^4+c^4}{2}&=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2+4q,\end{aligned}$$

koje daju važan izraz za jedan od koeficijenata jednadžbe koju ćemo uskoro uvesti.

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2-4q=p_1^2-4q. \tag{6}$$

Ove jednakosti omogućuju nam postavljanje jednadžbe trećeg stupnja čija će rješenja biti kvadrati brojeva $a$, $b$, $c$. Označimo brojeve $a$, $b$, $c$ u općem slučaju s $u_i$, $i=1,2,3$. Dakle, rješenja buduće jednadžbe bit će $u_1^2$, $u_2^2$, $u_3^2$.

Ukoliko je dana jednadžba trećeg stupnja oblika

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

a $x_i$, $i = 1, 2, 3$ su njezina rješenja, za koeficijente $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ vrijedi:

$$\alpha = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad \beta = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad \gamma = -x_1x_2x_3.$$

Ako je, nadalje,

$$x^4 + p_1x^2 + p_2x + q = 0, \quad x = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{2},$$

vrijedi

$$-2p_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad -p_2 = u_1u_2u_3, \quad p_1^2 - 4q = u_1^2u_2^2 + u_1^2u_3^2 + u_2^2u_3^2.$$

Sljedbeno tome, pomoću koeficijenata jednadžbe (1) sastavljamo jednadžbu šestog stupnja po varijabli $U$:

$$U^6 + 2p_1U^4 + \left(p_1^2 - 4q\right)U^2 - p_2^2 = 0. \tag{7}$$

Uz zamjenu $U^2 = v$, dobivamo odgovarajuću jednadžbu trećeg stupnja i njezina rješenja $v_1$, $v_2$, $v_3$. Kako je $U_i = \pm\sqrt{v_i}$, $i = 1, 2, 3$, treba objasniti kako ćemo odabrati samo tri vrijednosti rješenja jednadžbe (7).

Neka su $u_1$, $u_2$, $u_3$ tri odabrana rješenja jednadžbe. Pošto je $-p_2 = u_1u_2u_3$, imamo ova dva slučaja:

$$\begin{array}{ll} (i) & -p_2 > 0 \ \Rightarrow \ \text{bar jedan od } u_i,\ i = 1, 2, 3 \text{ (npr. } u_1\text{) mora biti } > 0, \\ (ii) & -p_2 < 0 \ \Rightarrow \ \text{bar jedan od } u_i,\ i = 1, 2, 3 \text{ (npr. } u_1\text{) mora biti } < 0. \end{array}$$

Napomenimo da druge dvije vrijednosti, npr. $u_2$ i $u_3$ mogu biti ili obje pozitivne ili obje negativne, a da se predznak od $-p_2$ neće promijeniti. Pošto je $-p_1 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)/2$, njegov predznak nije važan s obzirom na izbor predznaka od $u_2$ i $u_3$.

Odgovorimo sada na pitanje možemo li za umnožak rješenja jednadžbe uzeti bilo koje (međusobno jednake) predznake od $u_2$ i $u_3$? Kako je

$$x_1x_2 = \left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{2}\right)\left(\frac{u_1 - (u_2 + u_3)}{2}\right),$$

odabir predznaka '$+$' za oba rješenja $u_2$ i $u_3$ ili '$-$' za ta rješenja daju isti umnožak, uz nebitu zamjenu redoslijeda faktora. Nadalje,

$$x_3x_4 = \left(\frac{u_2 - (u_1 + u_3)}{2}\right)\left(\frac{u_3 - (u_1 + u_2)}{2}\right),$$

pa i u ovom slučaju vrijedi isti zaključak.

Dakle, niti na umnožak rješenja ne utječe odabir (međusobno jednakih) predznaka od $u_2$ i $u_3$.

Uzmimo stoga, ne smanjujući općenitost, da su $-p_2$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ ili svi pozitivni ili svi negativni. Dakle, $\operatorname{sign}(p_2) = -\operatorname{sign}(u_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Prema tome, ako jednadžbi (1) četvrtog stupnja pridružimo jednadžbu (7) šestog stupnja, iz svakog od tri para rješenja jednadžbe (7) oblika $(-r, r)$ odaberemo po jedno rješenje $u_1$, $u_2$, $u_3$ i to tako da mu predznak bude suprotan predznaku koeficijenta $p_2$. Ukoliko je $p_2 = 0$, imamo bikvadratnu jednadžbu pa u tom slučaju odabiremo potpuno ravnopravno ili $U_1$, $U_3$, $U_5$ ili $U_2$, $U_4$, $U_6$.

Rješenja jednadžbe(1) dobivamo u obliku:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_1+u_2+u_3}{2}, \quad x_2 = \frac{u_1-(u_2+u_3)}{2}, \\ x_3 &= \frac{u_2-(u_1+u_3)}{2}, \quad x_4 = \frac{u_3-(u_1+u_2)}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Na kraju riješimo dva konkretna primjera.

**Primjer 1.** Nađimo sva rješenja jednadžbe

$$x^4+2x^2-3=0.$$

U ovom slučaju imamo bikvadratnu jednažbu koju možemo riješiti i na standardni (lakši) način. Ipak, provjerimo istinitost izrečenih postavki i za rješavanje ovih jednadžbi!

Pripadna jednadžba šestog stupnja je

$$U^6+4U^4+16U^2=0,$$

a njezina rješenja su: $U_{1,2}=0$, $U_{3,4}=\pm\left(1+\sqrt{3}\right)$, $U_{5,6}=\pm\left(1-\sqrt{3}\right)$. U ovom slučaju $(p_2=0)$ odabiremo bilo koju kombinaciju parova rješenja. Uzmemo li:

$$u_1=0, \quad u_2=-1-\sqrt{3}i, \quad u_3=-1+\sqrt{3}i,$$

iz relacija (8) dobivamo rješenja polazne jednadžbe:

$$x_1=-1, \quad x_2=1, \quad x_3=-\sqrt{3}i, \quad x_4=\sqrt{3}i.$$

**Primjer 2.** Odredimo sva rješenja jednažbe

$$x^4-2x^2+16x-15=0.$$

Pripadna jednažba šestog stupnja ima oblik

$$U^6-4U^4+64U^2-256=0.$$

Rješavanjem ove jednadžbe (npr. faktorizacijom) dobivamo $U_{1,2}=\pm 2$, $U_{3,4}=\pm(2+2i)$, $U_{5,6}=\pm(2-2i)$. Kako je $\operatorname{sign}(p_2)=1$, vrijedi $\operatorname{sign}(u_k)=-1$, $k=1,2,3$, pa je

$$u_1=-2, \quad u_2=-2-2i, \quad u_3=-2+2i.$$

Rješenja dane jednadžbe četvrtog stupnja su:

$$x_1=-3, \quad x_1=1, \quad x_3=1-2i, \quad x_4=1+2i.$$

## Literatura


[1] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Matematički priručnik,* Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[2] M. Nikolić, *Jednačine četvrtog stepena,* Matematika, Zagreb – Beograd – Sarajevo, 1978.

[3] ***, Čisla i figuri, Moskva 1964.