XXXIX РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Еден ученик наместо да го помножи некој број со 506, го помножил со бројот 56, при што добил за 11250 помал производ. Кој број го множел ученикот?

Решение. Нека x е непознатиот број. Тогаш

$$x \cdot 506 - x \cdot 56 = 11250$$
$$450x = 11250$$
$$x = 25$$

Задача 2. Должината на отсечката AB е за 2 cm поголема од должината на отсечката CD. Ако должината на отсечката CD се зголеми 3 пати, а должината на отсечката AB се зголеми за 10 cm, ќе се добијат еднакви отсечки. Колкави се должините на отсечките AB и CD ?

Решение. Нека x должината на отсечката CD. Тогаш $3x = x + 2 + 10$. Значи, $x = 6$, а $\overline{AB} = 6 + 2 = 8$ cm.

Задача 3. Во собата на Јана има 3 полици со книги. На првата полица има шест пати помалку книги отколку на втората, а шест книги помалку отколку на третата полица. Ако Јана ги премести сите книги од првата полица на третата полица, тогаш на третата полица ќе има 78 книги помалку отколку на втората полица. Колку вкупно книги има на полиците?

Решение. Ако бројот на книгита на првата полица го означиме со x, тогаш на втората полица има $6x$, а на третата $x + 6$ книги. Од условот на задачата следува $x + x + 6 = 6x - 78$, од каде се добива дека $x = 21$. Значи во собата на Јана има вкупно $21 + 21 + 6 + 6 \cdot 21 = 176$ книги.

Задача 4. Петар поминал 1 km од дома до домот на неговиот другар. Со должината што ја поминал може 25 пати да ја заобиколи градината на дедо му која што има форма на правоаголник. Определи ги должината и ширината на градината, ако тие се разликуваат за 4 m.

Решение. Периметарот на градината изнесува $1000 : 25 = 40$ m. Нека должината ја означиме со a, а ширината со b. Имаме: $a + b = 20$ и $a - b = 4$. Со собирање на равенствата добиваме дека $2a = 24$, од каде $a = 12$ m, односно $b = 8$ m.

V одделение

Задача 1. Еден сточар на пазар однесол јаре, теле и овен. Јарето и овенот заедно имале 90 *kg*, јарето и телето 186 *kg*, а овенот и телето 240 *kg* . По колку килограми има секое животно?

Решение. Од дадените податоци на задачата имаме

$$J+O=90$$

$$J+T=186$$

$$O+T=240$$

Ако сите три равенки ги собереме заедно ќе добиеме

$$2(J+O+T)=516$$

$$J+O+T=258$$

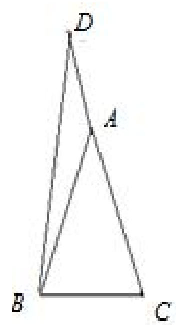
Па , ако во последната равенка ги замениме условите на задачата добиваме

$$J=18\,kg$$

$$O=72\,kg$$

$$T=168\,kg$$

Задача 2. Во рамнокрак триаголник $ABC\ (\overline{AB}=\overline{AC})$ кракот AC е продолжен преку темето A до точка D, така што периметарот на триаголникот BAD е $16\,cm.$ Пресметај ја основата BC на триаголникот ABC , ако периметарот на триаголникот BCD е $29\,cm.$



Решение. Имаме

$$L_{\triangle BAD}=\overline{BA}+\overline{AD}+\overline{DB}=16\,cm$$

$$L_{\triangle BCD}=\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AD}+\overline{DA}=29\,cm$$

$$\overline{CA}=\overline{BA}$$

$$\overline{BC}=L_{\text{a}BCD}-L_{\text{a}BBAD}=29-16=13\,cm.$$

Значи , $\overline{BC}=13\,cm.$

Задача 3. Марио ги распоредил броевите 1, 2, ..., 8 во темињата на една коцка. Кога ги пресметал збировите добиени по секој ѕид, забележал дека сите збирови се еднакви.

а) Колку изнесува секој таков збир?

б) Најди едно распоредување на броевите 1, 2, ..., 8 во темињата на коцка кое ја го има саканото својство.

Решение. а) Во секое теме од коцката се спојуваат три ѕида, а коцката има вкупно шест ѕидови. Тоа значи дека имаме шест еднакви збирови и секој број се јавува во вкупниот збир по три пати. Ако бараниот збир го означиме со S, тогаш

$$6S = 3(1+2+\ldots+8)\ .$$

Оттука $S = 18$.

б) На пример, во четирите темиња од долната основа на коцка запиши ги броевите 1, 8, 2, 7 (во некој кружен редослед), а во соодветните темиња од горната основа запиши ги броевите 6, 3, 5, 4.

Задача 4. Произволна точка во внатрешноста на квадрат е подеднакво оддалечена од двете спротивни страни и тоа $3x+1$ и $5x-7$ соодветно, мерени во cm. Определи го периметарот на квадратот.

Решение. Од условот на задачата имаме $5x-7=3x+1$, од каде $x=4$. Страната на квадратот е $5x-7+3x+1=26$ cm, а периметарот изнесува $4\cdot 26=104$ cm.

VI одделение

Задача 1. Збирот на броителот и именителот на една дропка е 95. По скратување на дропката добиена е дропката $\frac{7}{12}$. Одреди ја таа дропка.

Решение. Нека дропката е $\frac{a}{b}$. Од првиот услов на задачата имаме: $a+b=95$. Од вториот услов на задачата имаме: $\frac{a:k}{b:k}=\frac{7}{12}$ од каде $a=7k$ и $b=12k$. Ако во $a+b=95$ замениме за a и b, добиваме $7k+12k\ =95, k\ =5$. Броителот на дропката е 35, а именителот на дропката е 60. Значи бараната дропка е $\frac{35}{60}$.

За[illegible]ча 2. А[illegible] PQ и QR се отсечки нанесени на една права така што [illegible]доследо[illegible]на точките е P, [illegible], R [illegible] Q [illegible]еѓу N и R, а M е среди[illegible]ата на [illegible]ечката PQ и N е средината на отсечката PR, докажи дека [illegible]$R = 2\cdot$[illegible]

Решение: Забел[illegible]аме [illegible]ка $\overline{P}$[illegible] $=$ $\overline{N}$[illegible], $\overline{PM}$ [illegible] $\overline{MQ}$. Поради тоа:

[illegible] $\overline{NR}$ [illegible] N [illegible] $P -$ [illegible] $Q -$ [illegible])

[illegible] $P -$ [illegible] $= 2$[illegible]$M +$[illegible]$N) -$[illegible]

$= 2$[illegible] $+$ ([illegible] $+$ [illegible]) $-$ [illegible] $= 2$[illegible].

Задача 3. Одреди го бројот на:

а) двоцифрени

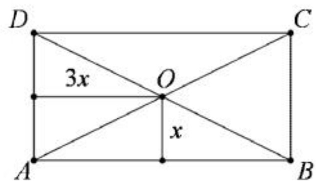
б) трицифрени броеви

што се запишани само со парни цифри.

Решение. а) На местото на десетки може да стојат 4 цифри и тоа 2,4,6 и 8. На местото на единици може да стојат 5 цифри и тоа 0,2,4,6 и 8. Значи, има вкупно $4 \cdot 5 = 20$ двоцифрени броеви.

б) Од двоцифрените броеви, трицифрени се добиваат ако на секој двоцифрен број му се допише по една од цифрите 0,2,4,6 и 8 од десната страна. Спрема тоа, има $20 \cdot 5 = 100$ трицифрени броеви.

Задача 4. Во правоаголникот $ABCD$ отсечките AC и BD се сечат во точката O. Одреди ја плоштината на правоаголникот, ако растојанието од точката O до поголемата страна е 3 пати помало од растојанието од точката O до помалата страна, а периметарот на правоаголникот изнесува 128 cm.



Решение. Нека растојанието од точката O до поголемата страна е x. Тогаш растојанието од точката O до помалата страна е $3x$. Оттука се добива дека страните на правоаголникот се $6x$ и $2x$. Значи, $8x = 64$, т.е. $x = 8$. Според тоа, страните на правоаголникот се 48 cm и 16 cm, па плоштината изнесува $48 \cdot 16 = 768$ cm^2.

VII одделение

Задача 1.Три сестри си поделиле одредена сума на пари при што првата сестра зела $\frac{1}{5}$ од парите, втората сестра $\frac{5}{8}$ од парите, а остатокот го зела третата сестра. Но, потоа третата сестра и дала на првата сестра $\frac{3}{4}$ од својот дел. Колкав дел од целата сума пари добила првата сестра?

Решение. Според условот на задачата првата сестра зела $\frac{1}{5}x$, втората $\frac{5}{8}x$, а третата сестра зела $x - \frac{1}{5}x - \frac{5}{8}x = \frac{7}{40}x$.

Третата сестра на првата и дала $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{40}x = \frac{21}{160}x$.

Првата сестра добила вкупно $\frac{1}{5}x + \frac{21}{160}x = \frac{53}{160}x$, односно $\frac{53}{160}$ од парите.

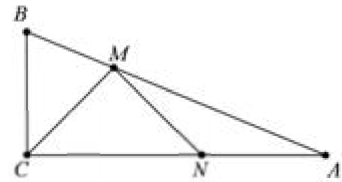
Задача 2. Во правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C, на страната AB е дадена точка M, а на страната AC точка N, така што $\overline{BC} = \overline{BM} = \overline{MN} = \overline{AN}$. Пресметај ги аглите на триаголник ABC.

Решение. Триаголниците ANM, NMC и BCM се рамнокраки, па

$$\alpha = \angle CAM = \angle NMA, \qquad \beta = \angle CBM = \angle CMB, \qquad \angle MCN = \angle CNM.$$

Аголот $\angle MNC$ е надворешен агол за триаголникот AMN, па затоа $\angle MNC = 2\alpha$. Тогаш

$$\angle MCN = 2\alpha \text{ и } \angle CMN = 180^\circ - 4\alpha.$$



За аголот $\angle BMC$ добиваме

$$\angle BMC = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha,$$

т.е. $\angle CBM = 3\alpha$. Но $\angle CBM = \beta$, па добиваме $\alpha + 3\alpha = 90^\circ, \alpha = 22{,}5^\circ$.
За β се добива $\beta = 3\alpha = 67{,}5^\circ$.

Задача 3. Определи ги броевите a, b и c, ако нивниот збир е за $\frac{5}{2}$ поголем од бројот a, за $\frac{59}{6}$ поголем од бројот b и за $\frac{5}{3}$ поголем од бројот c.

Решение. Од условот на задачата се запишуваат следните равенства :

$$a + b + c = a + \frac{5}{2}, a + b + c = b + \frac{59}{6} \text{ и } a + b + c = c + \frac{5}{3}. \qquad (1)$$

Со средување на равенствата се добива $b + c = \frac{5}{2}$, $a + c = \frac{59}{6}$ и $+b = \frac{5}{3}$. Со собирање на трите равенки се добива $2a + 2b + 2c = 14$, т.е.

$$a + b + c = 7 \qquad (2)$$

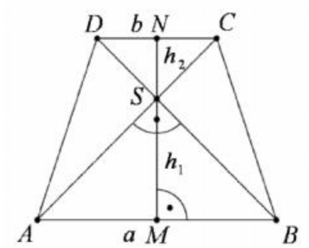
Со замена на (2) во равенките од (1) се добива

$$7 = a + \frac{5}{2}, 7 = b + \frac{59}{6}, 7 = c + \frac{5}{3},$$

од каде следи дека $a = \frac{9}{2}$, $b = -\frac{17}{6}$, $c = \frac{16}{3}$.

Задача 4. Основите на рамнокрак трапез со нормални дијагонали изнесуваат 12 cm и 8 cm. Пресметај ја плоштината на трапезот.

Решение. Бидејќи дијагоналите на трапезот се нормални, добиваме дека $\measuredangle ASB = 90^\circ$, па ΔABS е рамнокрак правоаголен и ΔAMS е рамнокрак правоаголен. Оттука, $h_1 = \frac{a}{2} = 6$ cm.



Слично, $h_2 = \frac{b}{2} = 4$ cm. Значи,

$$h = h_1 + h_2 = 10 \ cm.$$

Оттука,

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+8}{2} \cdot 10 = 100\ cm^2.$$

VIII одделение

Задача 1. Аритметичката средина на четири броеви е 20. По додавањето на уште еден број, аритметичката средина на петте броеви ќе биде 18. Кој е додадениот број?

Решение. Бидејќи аритметичката средина на четирите броја е 20, збирот на четирите броја е 80, односно

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80$$

Аритметичката средина на петте броја е 18, односно

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \cdot 18,\ \text{т.е.} 80 + x_5 = 90.$$

Одовде $x_5 = 10$.

Задача 2. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни природни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е $12dm$. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.

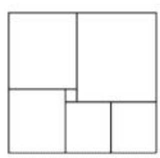
Решение. Страните на триаголникот се последователни природни броеви, т.е. тие се $x-1$, x и $x+1$. Бидејќи периметарот на триаголникот е $12dm$, добиваме $x-1+x+x+1=12dm$, од каде со решавање на равенката имаме $3x=12dm$, т.е. $x=4dm$. Следува дека страните на триаголникот имаат должини $3dm$, $4dm$ и $5dm$. Плоштината на правоаголниот триаголник е $P_\Delta = \frac{3 \cdot 4}{2} dm^2 = 6dm^2$, а плоштините на квадратите се:

$$P_1 = 3 \cdot 3 dm^2 = 9dm^2,\ P_2 = 4 \cdot 4 dm^2 = 16dm^2 \text{ и } P_3 = 5 \cdot 5 dm^2 = 25dm^2.$$

Плоштината на добиената фигура е

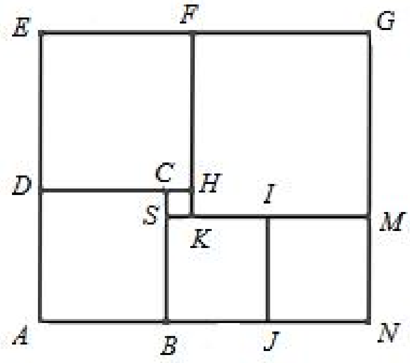
$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_\Delta = 9 + 16 + 25 + 6 = 56dm^2.$$

Задача 3. Правоаголник е разделен на шест квадрати, како што е прикажано на цртежот. Одреди ја плоштината на правоаголникот, ако страната на најмалиот квадрат е $2m$.



Решение. Нека x е страната на квадратот $ABCD$. Тогаш страната на квадратот $DHFE$ е $x+2$, т.е. $\overline{DE} = \overline{EF} = x+2$. Да забележиме дека $\overline{BS} = \overline{NM} = x-2$. Така имаме дека $\overline{BN} = 2x-4$. Значи,

$$\overline{AN} = 3x - 4 \text{ и } \overline{AE} = 2x + 2 .$$



За $\overline{FG}$ имаме

$\overline{FG} = \overline{AN} - \overline{EF} = (3x-4)-(x+2) = 2x-6$
.

Аналогно добиваме

$\overline{MG} = \overline{AE} - \overline{NM} = (2x+2)-(x-2) = x+4$
.

Од $\overline{FG} = \overline{MG}$ ја добиваме равенката $2x-6 = x+4$, од каде се добива дека $x = 10$. Така имаме дека

$$\overline{AN} = 3\cdot 10 - 4 = 26 \text{ и } \overline{AE} = 2\cdot 10 + 2 = 22 .$$

Значи плоштината на правоаголникот е

$$P = 22\cdot 26 = 572\, m^2 \; .$$

Задача 4. Марко треба 199 јаболки да распореди во 60 пакети. Во неколку пакети има по x јаболки, а во останатите по 3 јаболки. Одреди ги сите можни вредности на x.

Решение. Нека имало n пакети, кај кои во секој од нив имало по 3 јаболки. Тогаш бројот на пакети со по x јаболки би бил $60-n$. Од условот на задачата ја составуваме равенката

$$3n + x\cdot(60-n) = 199$$

која е еквивалентна со равенката $3n - 180 + x\cdot(60-n) = 19$ односно со равенката

$$(60-n)\cdot(x-3) = 19 .$$

Бидејќи x и n ($n \le 60$) се природни броеви, добиваме дека постојат две решенија и тоа

$$\begin{cases} 60-n = 1 \\ x-3 = 19 \end{cases}$$

од каде се добива $x = 22$ или

$$\begin{cases} 60-n = 19 \\ x-3 = 1 \end{cases}$$

од каде имаме дека $x = 4$.

IX одделение

Задача 1. Докажи дека дропката $\frac{1+5^{k+1}\cdot 2^k}{1+5^k\cdot 2^{k+1}}$ е скратлива за секој број $k=0,1,2,...$.

Решение. За $k=0$ дропката гласи $\frac{1+5^1\cdot 2^0}{1+5^0\cdot 2^1}=\frac{1+5\cdot 1}{1+1\cdot 2}=\frac{6}{3}$, па таа е скратлива. Нека $k\geq 1$. Тогаш

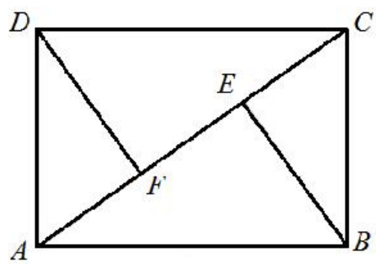
$$\frac{1+5^{k+1}\cdot 2^k}{1+5^k\cdot 2^{k+1}}=\frac{1+5^k\cdot 5^1\cdot 2^k}{1+5^k\cdot 2^k\cdot 2^1}=\frac{1+5\cdot(5\cdot 2)^k}{1+2\cdot(5\cdot 2)^k}=\frac{1+5\cdot 10^k}{1+2\cdot 10^k}.$$

Збирот на цифрите на бројот во броителот е еднаков на 6, а збирот на цифрите на бројот во именителот е еднаков на 3. Значи и двата броеви се деливи со 3, па следува дека дропката може да се скрати. Значи, за секој цел број k, дропката е скратлива.

Задача 2. Ако во правоаголникот страните се однесуваат како $\sqrt{2}:1$, тогаш нормалите спуштени од две спротивни темиња врз дијагоналата ја делат дијагоналата на три еднакви дела. Докажи!

Решение. Нека $\overline{AD}=\overline{BC}=a$. Тогаш од $\overline{AB}:\overline{AD}=\sqrt{2}:1$, следува дека $\overline{AB}=\overline{DC}=a\sqrt{2}$. Дијагоналата на правоаголникот е

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(a\sqrt{2})^2+a^2}=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}.$$



Од сличноста на триаголниците $\triangle ABC$ и $\triangle BEC$ добиваме дека

$$\overline{EC}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{AC},$$

т.е.

$$\overline{EC}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}=\frac{a^2}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Од сличноста на триаголниците $\triangle ADC$ и $\triangle DFA$ добиваме дека

$$\overline{FA}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{AC},$$

т.е.

$$\overline{FA}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}}=\frac{a^2}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Следува дека

$$\overline{FE}=\overline{AC}-\overline{FA}-\overline{EC}=a\sqrt{3}-\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3},$$

што значи дека нормалите спуштени од две спротивни темиња врз дијагоналата ја делат дијагоналата на три еднакви дела

Задача 3. Докажи дека не постојат природни броеви x и y за кои важи

$$5^x = y^2 + 2012.$$

Решение. Ако $x = 0$ добиваме

$$5^0 = y^2 + 2012, \text{ т.е. } 1 = y^2 + 2012,$$

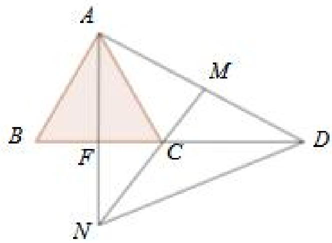
што не е можно бидејќи десната страна на равенството е поголема од 1.

Ако $x \neq 0$, тогаш последната цифра на бројот 5^x е 5. За да биде исполнето равенството треба последната цифра на збирот $y^2 + 2012$ да биде 5, односно последната цифра на бројот y^2 треба да биде 3. Но, полн квадрат не може да има последна цифра 3, па следува дека не постојат природни броеви x и y кои се решенија на дадената равенка.

Задача 4. Даден е рамностран триаголник ABC. Нормалата кон страната AB спуштена од темето A ја сече правата BC во точка D. Нека M е средна точка на отсечката AD, со N ќе ја означиме пресечната точка на правата MC со симетралата на аголот $\measuredangle BAC$. Докажи дека $AC \perp DN$

Решение. Сите агли во триаголникот ABC се еднакви на 60°. Триаголникот DAB е правоаголен и, бидејќи аголот кај темето B е 60°, следува дека

$$\measuredangle ADB = 30^\circ \qquad (1)$$



Од друга страна

$$\measuredangle DAB = 90^\circ \text{ и } \measuredangle BAC = 60^\circ,$$

па следува Дека

$$\measuredangle CAD = 30^\circ \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\triangle ACD$ е рамнокрак и, бидејќи MC е тежишна линија на $\triangle ACD$, MC е и висина на $\triangle ACD$. Триаголникот ABC е рамностран, AF е симетрала на $\measuredangle BAC$, па следува дека AF е висина во триаголникот ABC. Според претходното, имаме дека во $\triangle AND$, отсечките NM и DF се висини со ортоцентар во точката C. Висината спуштена од темето A минува низ ортоцентарот C, па следува дека $AC \perp DN$.