Сојузен натпревар 1976

Седмо одделение

1. Морска вода содржи 5% сол. Колку килограми обична вода треба да се измеша со $40\,kg$ морска вода за да добиената мешавина содржи 2% сол?

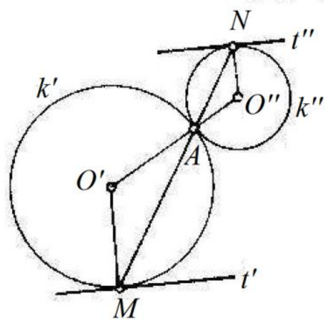
   Решение. Во $40\,kg$ морска вода има $40\cdot 0{,}05=2\,kg$ сол. Ако дотуриме $60\,kg$ обична вода, ќе имаме $100\,kg$ мешавина со $2\,kg$ сол, односно со 2% сол.

2. Определи ја најмалата дропка со која треба да се поделат дропките $\frac{8}{15},\frac{12}{35}$ и $\frac{20}{21}$ така што во сите три случаи количникот ќе биде природен број.

   Решение. Бараната дропка да ја означиме со $\frac{a}{b}$. Тогаш мора да бидат цели броеви следниве производи $\frac{8}{15}\cdot\frac{b}{a},\frac{12}{35}\cdot\frac{b}{a}$ и $\frac{20}{21}\cdot\frac{b}{a}$. Ова же важи ако $b=105a$, бидејќи $\mathrm{NZS}(15,21,35)=105$. За да дропката $\frac{a}{b}$ биде најмала, треба да биде $a=1$, а $b=105n$ треба да биде најголем природен број. Бидејжи најголем природен број од дадениот вид не постои, заклучуваме дека не постои ниту најмала дропка $\frac{a}{b}=\frac{1}{105n}$.

3. Кружниците k' и k'' надворешно се допираат во точката A. Права која ја содржи точката A ја сече по втор пат кружницата k' во точката M и ја сече по втор кружницата k'' во точката N. Докажи дека тангентите t' и t'' на дадените кружници, за кои M и N се допирни точки, се меѓусебно паралелни.

   Решение. Триаголниците $O'AM$ и $O''AN$ се рамнокраки, па затоа $\measuredangle AMO'=\measuredangle MAO'$ и $\measuredangle ANO''=\measuredangle NAO''$ (цртеж десно). Понатаму $\measuredangle MAO'=\measuredangle NAO''$ (накрсни агли), па затоа $\measuredangle AMO'=\measuredangle ANO''$. Бидејќи A е точка од правата MN, следува дека аглите $\measuredangle AMO'$ и $\measuredangle ANO''$ наизменични, па како тие се еднакви заклучуваме дека



$O'M \| O''N$. Но, $t'' \perp O''N$ и $t' \perp O'M$, па затоа од $O'M \| O''N$ следува дека $t' \| t''$.

4. Докажи дека сите квадари за кои плоштината во cm^2 и волуменот во cm^3 се изразени со ист број, имаат еднаков збир на реципрочните вредности на должините на трите раба кои излегуваат од исто теме.

Решение. Од фромулите за плоштина и волумен на квадар имаме $2ab + 2bc + 2ca = abc$. Ако ова равенство го поделиме со $2abc \neq 0$, добиваме

$$\frac{2ab}{2abc} + \frac{2bc}{2abc} + \frac{2ca}{2abc} = \frac{abc}{2abc}, \text{ т.е. } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2},$$

што и требаше да се докаже.

5. Нека n е произволен број запишан со 2000 цифри и делив со 9. Збирот на цифрите на бројот n да го означиме со a, збирот на цифрите на a да го означиме со b и збирот на цифрите на b да го означиме со c. Определи го бројот c.

Решение. Збирот на цифрите на број n е делив со 9 и не е поголем од $2000 \cdot 9 = 18000$, т.е. $a \leq 18000$. Збирот на цифрите b на бројот a е делив со 9 и не е поголем од 36 (за $a = 9999$ е еднаков на 36), т.е. $b \leq 36$. Збирот на цифрите c на бројот b е делив со 9 и не е поголем од 9. Значи, $c = 9$.

Осмо одделение

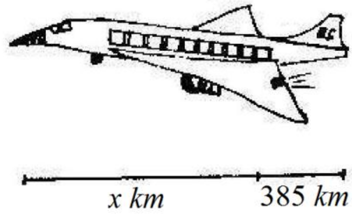
1. Природниот број n е зголемен за својата четирикратна реципрочна вредност и тој број е квадриран. Од добиениот број е одземен квадратот на четирикратната реципрочна вредност на бројот n и е добиен број кој не е делив со 5. Докажи!

Решение. Имаме

$$(n + \tfrac{4}{n})^2 - (\tfrac{4}{n})^2 = n^2 + 8 + (\tfrac{4}{n})^2 - (\tfrac{4}{n})^2 = n^2 + 8.$$

Според тоа, добиениот број е природен. Квадрат на природен број завршува на цифрата 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа бројот $n^2 + 8$ завршува на цифрата 8, 9, 2, 3, 4 или 7. Последното значи дека бројот $n^2 + 8$ не е делив со 5 за ниту еден природен број n.

2. Авион ги прелетал првите $385\,km$ со брзина од $220\,km/h$. Преостанатиот дел од патот го прелетал со брзина од $330\,km/h$. Средната брзина на целиот пат била $250\,km/h$. Колкав пат прелетал авионот?

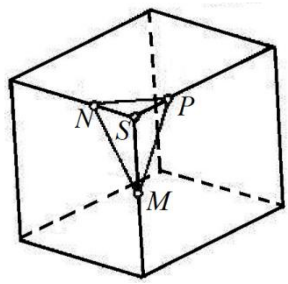


Решение. Првиот дел од патот авионот го прелетал за $\frac{385}{220}=3{,}5$ часа. Преостанатиот дел од патот, т.е. $x\,km$ авионот ги прелетал за t часови. Оттука ги добиваме равенките $x=330t$ и $385+x=250(3{,}5+t)$. Ако од првата замениме во втората равенка $t=\frac{x}{330}$, ја добиваме равенката

$$385+x=250(3{,}5+\tfrac{x}{330}),$$

чие решение е $x=2021{,}25\,km$. Според тоа, авионот прелетал $2406{,}25\,km$.

3. Рамнина сече коцка така што три раба на коцката со заедничко теме сече во точки кои тие рабови ги делат во односи 2:1, 3:1 и 4:1, сметајќи од заедничкото теме. Определи го односот на волумените на телата на кои оваа рамнина ја дели коцката.



Решение. Нека a е работ, а $V=a^3$ е волуменот на коцката. Отсеченото тело е пирамидата $SMNP$. Волуменот V_1 на оваа пирамида ќе го пресметаме ако за база го земеме правоаголниот триаголник SMN, а отсечката $SP=\frac{a}{4}$ за висина. Имаме

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{4}=\frac{a^3}{72}.$$

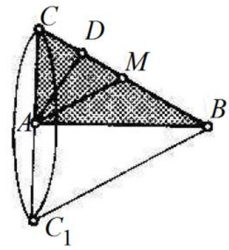
Волуменот V_2 на преостанатиот дел од коцката е $V_2=V-V_1=\frac{71a^3}{72}$. Јасно, $V_2:V_1=71:1$.

4. Даден е правоаголен триаголник ABC. Од темето A на правиот агол е повлечена тежишната линија AM. Висината AD на триаголникот ACM ја полови спротивната страна.

а) Определи ги аглите на триаголникот ABC.

б) Пресметај ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со вртење на триаголникот ABC околу страната AB, ако должината на отсечката AD е $k\sqrt{3}$.

Решение. а) Во правоаголен триголник тежишната линија повлечена кон хипотенузата е половина од хипотенузата, па затоа $AM = CM$ (цртеж десно). Понатаму, бидејќи $DM = CD$, $AD = AD$ и $\measuredangle ADM = \measuredangle ADC = 90^\circ$, заклучуваме дека триаголниците ADM и ADC се складни. Значи, $AM = AC$. Според тоа, триаголникот AMC има еднакви страни, па затоа тој е рамностран. Оттука следува дека $\measuredangle ACB = 60^\circ$, $\measuredangle ABC = 30^\circ$ и по претпоставка $\measuredangle BAC = 90^\circ$.



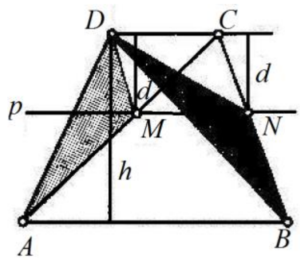
б) Бидејќи $AD = k\sqrt{3}$, од $AD = \frac{AC\sqrt{3}}{2}$ следува дека $AC = 2k$. Значи, $BC = 4k$ и $AB = 2k\sqrt{3}$. Добиеното тело е конус со радиус AC, висина AB и изводница BC. Според тоа,

$$P = \pi \cdot (2k)^2 + \pi \cdot 2k \cdot 4k = 12k^2\pi \text{ и } V = \frac{1}{3}\pi \cdot (2k)^2 \cdot 2k\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}k^3\pi}{3}.$$

5. Во трапез $ABCD$ права паралелна со основата AB ги сече отсечките AC и BC соодветно во точките M и N. Докажи дека плоштините на триаголниците DAM и DBN се еднакви.

Решение. Триаголниците ACD и BCD имаат заедничка страна CD, а висините кои им соодветствуваат на овие страни се еднакви на висината на трапезот h (цртеж десно). Затоа

$$P_{ACD} = \frac{CD \cdot h}{2} = P_{BCD}.$$



Триаголниците MCD и NCD имаат заедничка страна CD, а висините им се еднакви на нормалното растојание d меѓу паралелните прави CD и p, па затоа

$$P_{MCD} = \frac{CD \cdot d}{2} = P_{NCD}.$$

Сега, од

$$P_{AMD} = P_{ACD} - P_{MCD} \text{ и } P_{BND} = P_{BCD} - P_{NCD}$$

следува $P_{AMD} = P_{BND}$, што и требаше да се докаже.