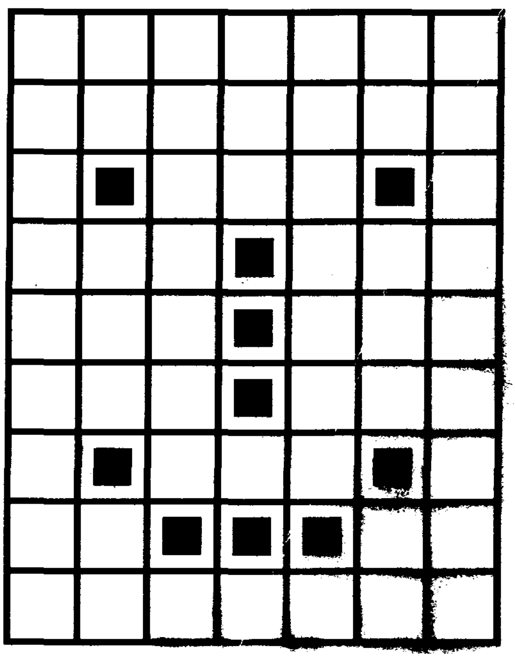
Костадин Тренчевски
Ристо Малчески
Despite Дончо Димовски

ЗАНИМЛИВА МАТЕМАТИКА



Рецензенти:

Зоран Шуниќ, асистент на ПМФ, Скопје
Трајче Георгиевски, проф. во гимн. Никола Карев, Скопје
Стојко Стојоски, проф. во осн. учил. Д. Миладинов, Скопје

Според мислењето на Министерството за култура број 21-5271/1 од 17.10.1994 година, за овој производ се плаќа повластена даночна стапка.

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека
"Климент Охридски", Скопје

51-8(076.32)

ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин;
Занимлива математика / К. Тренчевски, Р.Малчески, Д. Димовски.
(за младите математичари во Македонија)
Скопје: МММ, 1994.
96 стр.: 50 илустр.; 24 см.

1. МАЛЧЕСКИ, Ристо; 2. ДИМОВСКИ, Дончо

Умножено на офсет техника во "Маринг", Скопје,
Партизански одреди 71.

ПРЕДГОВОР

Книгата **ЗАНИМЛИВА МАТЕМАТИКА** *е пред се наменета за учениците од основното образование кои сакаат да ги прошират своите математички знаења. Меѓутоа, претпоставуваме дека истата ќе биде интересна и за постарите ученици, за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на работа со надарените ученици, а и за сите почитувачи на математиката.*

Книгата всушност е збирка решени задачи, во која во седум глави се обработени седум интересни математички области. Првата глава носи наслов МНОЖЕСТВА и во истата се опфатени задачи за чие решавање се користени Ојлер-Веновите дијаграми, како и задачи кои на учениците од основното образование ќе им овозможат да ги утврдат своите знаења од оваа особено важна математичка дисциплина. Останатите шест глави носат наслови АРИТМЕТИЧКИ ЗАГАТКИ, ПОЛЕСНО-ПОТЕШКО, МАТЕМАТИЧКИ ИГРИ, БОЕЊЕ И ПОКРИВАЊА, ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ и МАЛКУ ДА КОМБИНИРАМЕ. Самите наслови на последните шест глави укажуваат на содржината на истите, со тоа што во последната глава покрај општите комбинаторни задачи е обработен и принципот на Дирихле, кој е еден од најелементарните комбинаторни принципи.

Природата на задачите содржани во оваа книга е таква што тие секогаш се посебно интересни за комисиите кои ги составуваат задачите за математичките натпревари, па затоа во истата можат да се најдат многу задачи од натпреварите кои се одржуваа во Македонија, на просторите на поранешна Југославија, па и пошироко. Затоа пожелно е на секоја задача да и обрнете посебно внимание, при што најпрво треба да се обидете самостојно да ја решите, а ако тоа не Ви успее, анализирајте го понуденото решение.

И покрај вложениот напор, не можаме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, па затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија.

Ќе ни биде особено задоволство ако оваа збирка допринесе повеќе да ја засакате математиката, да навлезете во нејзините тајни и можеби таа да Ви стане и животен позив.

На крајот сакаме да им заблагодариме на сите кои допринесоа да се издаде оваа збирка решени задачи.

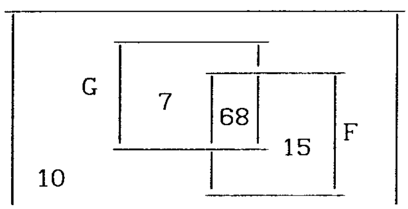
Јули 1994 *Авторите*
Скопје

I МНОЖЕСТВА

Во оваа глава ќе разгледаме неколку задачи, кои можеме да ги решиме користејќи ги Ојлер-Веновите дијаграми. Исто така, ќе се задржиме и на некои елементарни задачи од теоријата на множества, се со цел во кратки црти да извршиме повторување на стекнатите знаења од оваа толку значајна математичка дисциплина.

Задача 01. *Во едно туристичко место допатувале* 100 *туристи. Од нив* 10 *не знаеле ниту германски ниту француски јазик,* 75 *знаеле германски јазик,* 83 *знаеле француски јазик. Колку туристи ги знаеле двата јазика?*

Решение. Задачата ќе ја решиме користејќи ги Ојлер-Веновите дијаграми. Барем еден јазик знаат 100-10=90 туристи, 90-75=15 знаат само француски јазик, а 83-15=68 ги знаат и двата јазика. ■



Задача 02. *На еден натпревар учествувале* 100 *ученици и тие решавале* 3 *задачи. Само* 3 *ученици не решиле ниедна задача. Од останатите,* 65 *ја решиле првата или третата задача, а* 61 *ученик ја решил втората или третата задача, но ниеден ученик не решил повеќе од една задача.*

Колку ученици ја решиле првата, колку втората, а колку третата задача?

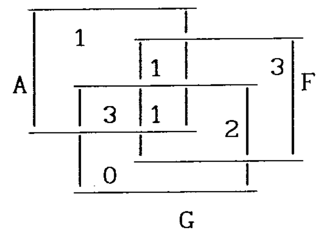
Решение. Ако првата или третата задача ја решиле 65 ученици, втората ја решиле 97-65=32 ученика. Бидејќи втората или третата задача ја решил 61 ученик, добиваме дека првата задача ја решиле 97-61=36 ученици. Според тоа, третата задача ја решиле 97-(32+36)=29 ученици.

Задачата можете да ја решите и со користење на Ојлер-Веновите дијаграми. Обидете се! ■

Задача 03. *Во една просторија се наоѓаат неколку луѓе, секој од кои знае барем еден од следните три јазици: англиски, германски и француски. Шестмина знаат англиски, шестмина знаат германски, седуммина знаат француски, четворица знаат англиски и германски, тројца знаат германски и француски, двајца знаат француски и англиски и еден ги знае сите три спомнати јазици.*

Колку луѓе има во просторијата и колку од нив знаат само англиски?

Решение. Да го означиме со A множеството луѓе кои знаат англиски јазик, со G множеството луѓе кои знаат германски јазик и со F множеството луѓе кои знаат француски јазик. Овие множества да ги претставиме со помош на Венови дијаграми. Еден од присутните ги зборува сите три јазици и множеството $A \cap G \cap F$ има само еден елемент. Да запишеме во дијаграмот на ова множество 1 елемент. Само англиски и француски знае точно еден од присутните. Само англиски и германски знаат тројца од присутните. Според тоа, само англиски знае точно еден од присутните (6-1-1-3). На ист начин следува дека има двајца кои знаат германски и француски но не знаат англиски јазик, само француски знаат тројца (7-1-1-2), додека ниеден од присутните, (6-1-3-2) не знае само германски.



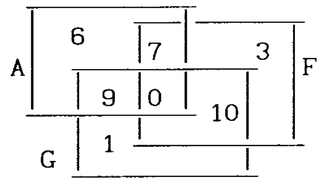
Конечно, во просторијата има 11 луѓе. ■

Задача 04. *Во одделение од 36 ученици, сите задолжително учат англиски, француски или германски (само еден од нив), како задолжителен предмет. Во рамките на вонучилишните активности, поодделни ученици одлучиле да учат уште по еден од овие јазици. Така, 22 ученика учат англиски, 20 учат француски и 20 германски јазик. Во класот 9 ученици учат англиски и германски, а 7 ученици учат англиски и француски.*

Колку ученици учат само по еден странски јазик и кој?

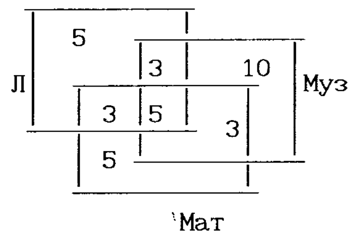
Решение. Да го означиме со A множеството ученици кои учат англиски јазик, со F множеството ученици кои учат француски јазик и со G множеството ученици кои учат германски јазик. Според условот на задачата ниеден од учениците не ги учи сите три јазици, па затоа пресекот на сите три множества е празно множество. Затоа Ојлер-Веновиот дијаграм на множествата A, F и G го имаат обликот прикажан на цртежот. Веднаш на овој цртеж може на соодветните делови на дијаграмот да запишеме дека множеството $A \cap G$ содржи 9 елементи, а множеството $A \cap F$ содржи седум елементи. Значи, само англиски јазик учат 6=22-9-7 ученици.

Останаа уште 14 ученици, од кои 13 учат француски јазик (20-7) и 11 учат германски јазик (20-9). Бидејќи 11+13=24, а преостанаа само 14 ученици, заклучуваме дека 10 ученици се двапати броени, т.е. 10 ученици учат и француски и германски јазик (множеството G∩F има 10 елементи). Останува заклучокот дека само француски јазик учат 3=20-7-10 ученици а само германски јазик учи еден ученик (20-9-10). Да ги внесеме сите овие податоци во дијаграмот. Гледаме дека само еден јазик учат 10 ученици, и тоа 6 англиски, 3 француски и 1 германски јазик. ■



Задача 05. *Секој ученик на едно одделение е член на литературната, музичката или математичката секција. Пет ученици се членови на сите три секции, а девет ученици членуваат во по две секции. Во литературната и математичката секција членуваат осум ученици, а исто толку во математичката и музичката. Дваесет ученици членуваат само во по една секција и тоа по пет ученици во литературната и математичката секција. Колку ученици има во тоа одделение?*

Решение. Решението на оваа задача ќе го прикажеме со помош на Ојлер-Венов дијаграм. Нека Л го означува множеството членови на литературната секција, Мат на математичката секција и Муз на музичката секција. Ако ги внесеме податоците дадени во условот на задачата, добиваме дека унијата на сите три множества има 34 елементи.



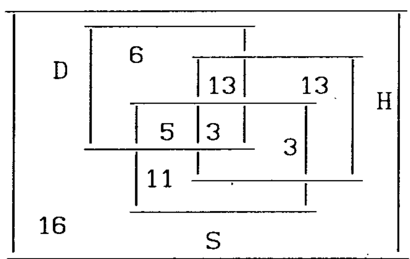
Значи во одделението има вкупно 34 ученици. ■

Задача 06. *Од 70 ученици 27 се членови на драмската секција, 32 пеат во хор, а 22 се спортисти. Во драмската секција има 16 членови на хорот, во хорот има 6 спортисти, додека во драмската секција има 8 спортисти. Тројца спортисти ја посетуваат и драмската секција и пеат во хорот.*

Колку ученици не се во ниедна од споменатите секции?

Колку ученици се само спортисти?

Решение. Решението е дадено на следниот цртеж. Очигледно 16 ученици не се во ниедна секција а само спортисти се 11 ученици. ■



Задача 07.* *Во една група натпреварувачи по математика имало 20 ученици. Од нив 14 ученици имале сини очи, 15 црна коса, 17*

биле потешки од 40 килограми и 18 биле повисоки од 160 cm. Колку најмалку ученици ги имале сите четири особини?

Решение. Ако 14 ученици имале сини очи, а 15 црна коса, тогаш најголемиот број ученици, што ги имаат двете особини е 14 (помалиот од овие два броја). Најмалиот број ученици што ги имаат овие две особини е

$$(14+15)-20=9.$$

Тоа се добива во случај кога секој од натпреварувачите има барем една од овие две особини. На сличен начин, се наоѓа:

$$(9+17)-20=6,$$

што значи дека првите три особини ги имаат најмалку 6 ученици. Слично се добива

$$(6+18)-20=4,$$

што значи дека најмалку 4 ученици ги имаат сите четири особини. Ќе покажеме со следниот пример дека навистина може да се случи точно 4 ученици да ги имаат сите 4 особини.

Учениците да ги означиме со броевите 1,2,....,20. Нека

сини очи имаат учениците 1,2,3,...,14;
црна коса имаат 6,7,8,...,20;
потешки од 40 кгр се 1,2,3,...,11,15,16,17,18,19,20;
и повисоки од 160 cm се 1,2,3,...,9,12,13,14,...,20.

Тогаш само учениците 6,7,8 и 9 ги имаат четирите особини. ■

Задача 08.* *На еден меѓународен собир се сретнале група Шпанци, Финци, Монголци и Виетнамци, вкупно 21 човек. Пет од нив зборуваат шпански, 14 фински, 14 монголски и 10 виетнамски. Еден Шпанец го зборува само својот мајчин јазик. Двајца Финци зборуваат монголски и виетнамски, но не зборуваат шпански. Од останатите никој не зборува повеќе од два јазика. Осум луѓе зборуваат фински и монголски. Колку Шпанци зборуваат виетнамски?*

Решение. Најпрво да ги разгледаме луѓето кои зборуваат барем два јазика, меѓу кои не е шпанскиот јазик. Меѓу нив 8 зборуваат фински и монголски, а од нив двајца и виетнамски, па значи шестмина зборуваат само фински и монголски. Да го означиме со x бројот на луѓето кои зборуваат фински и виетнамски (но не и монголски) а со y бројот на луѓето кои зборуваат монголски и виетнамски (но не и фински).

Сега имаме 20 луѓе (сите освен еден Шпанец кој го зборува само мајчиниот јазик). Оние кои зборуваат само фински и евентуално шпански се 14-(x+2+6)=6-x, оние кои зборуваат само монголски и евентуално шпански се 14-(y+2+6)=6-y, а оние кои зборуваат само виетнамски и евентуално шпански се

$$(6-x)+(6-y)+(8-x-y)+x+y+2+6=28-x-y,$$

па од 28-x-y=20 добиваме x+y=8. Значи бројот на луѓето кои зборуваат виетнамски и евентуално шпански е 8-(x+y)=0.

Конечно, ниту еден Шпанец не зборува виетнамски.

Задачата можете да ја решите и со користење на Ојлер-Веновите дијаграми. Обидете се! ■

Задача 09. *Дадено е множеството* $A=\{1,2,3,4\}$. *Определете ги сите множества* X *за кои важи* $A\cup X=A$.

Решение. Од $A\cup X=A$ заклучуваме дека $X\subseteq A$, што значи дека бараните множества X кои го задоволуваат условот на задачата се подмножествата на множеството A. Според тоа,

$$X\in\Big\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{3,4\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\Big\}.$$

Забележуваме дека $\delta(A)=4$ и дека постојат $2^4=16$ множества со бараната особина. Дали постојат $2^5=32$ множества за кои важи $A\cup X=A$, каде $A=\{1,2,3,4,5\}$? ■

Задача 10. *Дадено е множеството* $A=\{1,2,3,4,5\}$. *Определете ги сите подмножества* X *на множеството* A, *ако е* $X=\{1,3,*,*\}$. *(Само на местото на ѕвездичките треба да се запишат елементи од множеството* A*).*

Решение. Бидејќи редоследот на елементите во множеството не е важен, всушност треба да ги определиме двоелементните подмножества на множеството $\{2,4,5\}$ и нивните елементи да ги запишеме на местата означени со ѕвездички во множеството X. Добиваме три решенија $\{1,3,2,4\}$, $\{1,3,2,5\}$ и $\{1,3,4,5\}$. ■

Задача 11. *Дадени се множествата* $A=\{4,5,8\}$, $B=\{4,6,x,8\}$ *и* $C=\{5,3,8,x,y\}$. *Определете ги елементите* x *и* y *ако* $A\cup B=\{4,5,6,8,9\}$ *и* $B\cap C=\{4,8,9\}$.

Решение. Бидејќи $9\in A\cup B$ и $9\notin A$, заклучуваме дека $9\in B$. Значи $x=9$, $B=\{4,6,8,9\}$ и $C=\{5,3,8,9,y\}$.

Од друга страна $4\in B\cap C$, па затоа $4\in C$, т.е. $y=4$. ■

Задача 12. *Определете го множеството* X, *ако е* $X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ и $\{1,2,3\}\cap X=\{2,3\}$.

Решение. Од $\{1,2,3\}\cap X=\{2,3\}$ добиваме дека $1\notin X$ и $2\in X, 3\in X$. Според тоа, ако се искористи условот $X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$, тогаш за множеството X ги добиваме следните решенија:

$$X_1=\{2,3\},\ X_2=\{2,3,5\},\ X_3=\{2,3,4\} \text{ и } X_4=\{2,3,4,5\}. \ ■$$

Задача 13. *Определете го множеството* $A\cap(B\cap C)$, *ако е*

$$A=\{x\mid x\in\mathbb{N},\ 1<x\le 7\},\ B=\{x\mid x\in\mathbb{N},\ 3\le x<10\} \text{ и } C=\{x\mid x\in\mathbb{N},\ 6\le x\le 12\}.$$

Решение. Ако ги запишеме елементите на секое од дадените множества имаме $A=\{2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ и $C=\{6,7,8,9,10,11,12\}$.

Според тоа, $B\cap C=\{6,7,8,9\}$ и $A\cap(B\cap C)=\{6,7\}$. ■

Задача 14. *Дадени се множествата* $A=\{a \mid 2$ *е делител на* a, $a\in\mathbb{N}\}$ *и* $B=\{b \mid 3$ *е делител на* b, $b\in\mathbb{N}\}$. *Најдете го множеството* $A\cap B$.

Решение. Елементи на множеството $A\cap B$ се заедничките елементи на множествата A и B, т.е. тоа се сите природни броеви кои се деливи со 2 и 3. Значи,

$$A\cap B = \{c \mid 6 \text{ се дели на } c,\ c\in\mathbb{N}\} = \{6k \mid k\in\mathbb{N}\}. \ \blacksquare$$

Задача 15. *Дадени се множествата*

$$A=\{a \mid a\in\mathbb{N},\ a\le 7\} \text{ и } B=\{b \mid b\in\mathbb{N},\ 4\le b<9\}.$$

Определете ги елементите на множеството C *ако е*

$$C=\{c \mid c\in\mathbb{N},\ c=a-b,\ a\in A \text{ и } b\in B\}.$$

Решение. Ако ги запишеме елементите на секое од множествата A и B имаме $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ и $B=\{4,5,6,7,8\}$.

Од условот $c=a-b$, $a\in A$, $b\in B$ добиваме

$$C\subseteq\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}.$$

Бидејќи $C\subseteq\mathbb{N}$, имаме $C=\{1,2,3\}$. $\blacksquare$

Задача 16. *Дадени се множествата*

$$A=\{a \mid a\in\mathbb{N},\ a<7\},\ B=\{b \mid b\in\mathbb{N},\ 5<b<6\} \text{ и } C=\{c \mid c\in\mathbb{N},\ 5<b<8\}.$$

Определете го множеството $(B\cap C)\setminus A$.

Решение. Бидејќи не постои природен број поголем од 5, а помал од 6 добиваме дека $B=\varnothing$. Според тоа, $B\cap C=\varnothing$, односно $(B\cap C)\setminus A=\varnothing$. $\blacksquare$

Задача 17. *Определете ги елементите на множеството* B, *ако е* $A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e,m,n,p,q\}$, $A\setminus B=\{e,m\}$, $A\cap C=\varnothing$, $C\setminus B=\{c,p\}$.

Решение. Од $A\setminus B=\{e,m\}$ добиваме дека $e,m\notin B$. Исто така, од $C\setminus B=\{c,p\}$ следува дека $c,p\notin B$. Според тоа, од досега изнесеното и од $B\subseteq A\cup B\cup C$ добиваме $B\subseteq\{a,b,d,n,q\}$, па како $A\cap C=\varnothing$ имаме $B=\{a,b,d,n,q\}$. $\blacksquare$

Задача 18. *Дадени се множествата* $A=\{1,2,3\}$ *и* $B=\{3,4,5\}$. *Одредете ги множествата* X *ако е* $A\cup X=A$ *и* $B\cap X=A\setminus(A\setminus B)$. *Колку решенија има задачата?*

Решение. Како е $A\cup X=A$, а $B\cap X=A\setminus(A\setminus B)=\{3\}$, во множеството X мора да се содржи елементот 3. Задачата има четири решенија, и тоа $X=\{3\}$, $X=\{1,3\}$, $X=\{2,3\}$ и $X=\{1,2,3\}$. $\blacksquare$

Задача 19. *Дадени се множествата*

$$A=\{x \mid x\in\mathbb{Z} \text{ и } |x|<4\};\quad B=\{x \mid x\in\mathbb{Z},\ -5<x\le 1\};\quad C=\{x \mid x\in\mathbb{Z} \text{ и } -3<x\le 2\}.$$

Определете го множеството $(A\cup B)\setminus(C\cap B)$.

Решение. Дадените множества можеме да ги запишеме во следниот облик $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$; $B=\{-4,-3,-2,-1,0,1\}$ и

$C=\{-2,-1,0,1,2\}$. Според тоа, $A\cup B=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$; $C\cap B=\{-2,-1,0,1\}$. Значи, $(A\cup B)\setminus(C\cap B)=\{-4,-3,2,3\}$. ∎

Задача 20. *Нека е* $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. *Дали постојат множества* A *и* B *такви што* $A\cup B=S$, $A\cap B=\varnothing$ *и збирот на елементите на множеството* A *да е еднаков на збирот на елементите на* B?

Решение. Да претпоставиме дека множествата A и B постојат. Бидејќи $A\cup B=S$ и $A\cap B=\varnothing$, следува дека збирот на елементите на множеството S е еднаков на удвоениот збир на елементите на множеството A (или на B), т.е. тој е парен број. Но, збирот на елементите на множеството S е 55, т.е. е непарен број. Добиената противречност покажува дека множества A и B со бараните особини не постојат. ∎

Задача 21. *Дадени се множествата:* $A=\{1,2,3,4,5,6,8\}$ *и* $B=\{2,4,5,6,8\}$. *Одредете ги множествата* S, *за кои се исполнети равенствата* $A\cap S=\{3,4\}$ *и* $B\cup S=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Решение. Бидејќи е $A\cap S=\{3,4\}$, добиваме дека $S\supseteq\{3,4\}$ и дека останатите елементи на множеството A, т.е. 1,2,5,6 и 8 не припаѓаат на S. Од вториот услов $B\cup S=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ следува дека $7\in S$ и $9\in S$, бидејќи множеството B не ги содржи елементите 7 и 9. Броевите 2,5,6 и 8 не можат да припаѓаат на множеството S заради првиот услов. Затоа, $S=\{3,4,7,9\}$. ∎

Задача 22. *Дадени се множествата*

$$A=\{a,b,c,d,e\},\ B=\{a,d,f\},\ C=\{b,e,f,g\} \text{ и } D=\{a,f,g,h\}.$$

Одредете ги множествата S, *ако се знае дека:*

$$S\subseteq A,\ S\cap(B\cup D)=\varnothing,\ (A\cap C)\setminus S=\varnothing \text{ и } \{c\}\setminus S=\{c\}.$$

Решение. Најпрво определуваме

$$B\cup D=\{a,d,f,g,h\} \text{ и } A\cap C=\{b,e\}.$$

Како е $S\subseteq A$ и S нема заеднички елементи со $B\cup D$ (бидејќи $S\cap(B\cup D)=\varnothing$), следува дека $S\subseteq\{b,c,e\}$. Меѓутоа, од $(A\cap C)\setminus S=\varnothing$ следува дека $b\in S$ и $e\in S$, а од $\{c\}\setminus S=\{c\}$ следува дека $c\notin S$. Значи $S=\{b,e\}$. ∎

Задача 23. *За множествата* A, B *и* C *познато е дека* $\delta(A)=15$, $\delta(B)=10$, $\delta(A\cap B)=5$, $\delta(A\cap C)=0$, $\delta(A\cup C)=23$ *и* $\delta(B\cup C)=18$. *Определете ги* $\delta(A\cup B)$, $\delta(C)$ *и* $\delta(B\cap C)$.

Решение. Ако се искористи дека за секои конечни множества X и Y важи

$$\delta(X\cup Y)=\delta(X)+\delta(Y)-\delta(X\cap Y)$$

добиваме

$$\delta(A\cup B)=\delta(A)+\delta(B)-\delta(A\cap B)=15+10-5=20.$$

Од $\delta(A\cup C)=\delta(A)+\delta(C)-\delta(A\cap C)$ имаме

$$\delta(C)=\delta(A\cup C)-\delta(A)+\delta(A\cap C)=23-15+0=8.$$

Конечно, од $\delta(B\cup C)=\delta(B)+\delta(C)-\delta(B\cap C)$ следува

$$\delta(B\cap C)=\delta(B)+\delta(C)-\delta(B\cup C)=10+8-18=0.$$ ∎

Задача 24. *Одредете ги множествата* A, B *и* C *ако е познато дека* $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B\cap C=\varnothing$, $B\cap A=\{5,6\}$,

$$C\cap A=\{3,8\},\quad B\setminus A=\{1,2,4\} \text{ и } \delta(A)=4.$$

Решение. Од $C\cap A=\{3,8\}$ и $B\cap A=\{5,6\}$ добиваме дека

$$\{3,8,5,6\}\subseteq A$$

и како $\delta(A)=4$, заклучуваме дека $A=\{3,5,6,8\}$.

Од $B\cap A=\{5,6\}, B\setminus A=\{1,2,4\}$ и $A=\{3,5,6,8\}$, заклучуваме дека

$$\{1,2,4,5,6\}\subseteq B,\ 7\notin B \text{ и } 9\notin B.$$

Но, $C\cap A=\{3,8\}$ па од $B\cap C=\varnothing$ следува дека $3\notin B$ и $8\notin B$. Конечно, од $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\{1,2,4,5,6\}\subseteq B$, $7\notin B$, $3\notin B$, $9\notin B$ и $8\notin B$, добиваме $B=\{1,2,4,5,6\}$.

Од $B\cap C=\varnothing$ и $C\cap A=\{3,8\}$ добиваме дека $\{3,8\}\subseteq C$, $1\notin C$, $2\notin C$, $4\notin C$, $5\notin C$ и $6\notin C$. Бидејќи $7,9\notin A$ и $7,9\notin B$ од

$$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

заклучуваме дека $7\in C$, $9\in C$ па затоа $C=\{3,7,8,9\}$.

Оваа задача можете да ја решите со помош на Ојлер-Веновите дијаграми. Обидете се! ■

Задача 25. *Одредете ги множествата* M *за кои важи*

$$M\subseteq A,\ (B\cup D)\cap M=\varnothing \text{ и } (A\cap C)\setminus M=\varnothing,$$

каде $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{2,4,5,6\}$ *и* $D=\{1,5,6,7\}$.

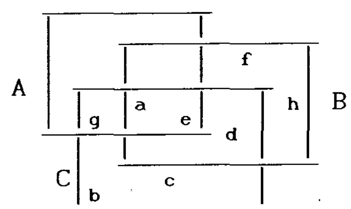
Решение. Бидејќи $M\subseteq A$, јасно е дека M е составено само од некои елементи од A. Од $\varnothing=(A\cap C)\setminus M=\{2,4\}\setminus M$ следува дека $\{2,4\}\subseteq M$. Од $\varnothing=(B\cup D)\cap M=\{1,3,5,6,7\}\cap M$ следува дека $3\notin M$ и $1\notin M$. Според тоа, $M=\{2,4\}$. ■

Задача 26. *Одредете ги множествата* A, B *и* C *ако се знае дека*

$$A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e,f,g,h\},\ A\cap B\cap C=\{a,e\},\ C\setminus B=\{b,c,g\},$$

$$A\setminus C=\varnothing,\ A\cap C=\{a,e,g\} \text{ и } B\setminus C=\{f,h\}.$$

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на Ојлер-Веновите дијаграми. Од условите $A\setminus C=\varnothing$ и $A\cap C=\{a,e,g\}$ заклучуваме дека множеството A се состои само од елементите a, e и g. Бидејќи $d\notin A$, од $B\setminus C=\{f,h\}$ и $C\setminus B=\{b,c,g\}$ заклучуваме дека $d\in B\cap C$. Сега лесно можеме да го составиме останатиот дел од дијаграмот.



Значи, бараните множества се $A=\{a,e,g\}$, $B=\{a,d,e,f,h\}$ и $C=\{a,b,c,d,e,g\}$. ■

Задача 27. *За множествата* M, N, P *важи* $M\cup N\cup P=\{1,2,3,4,5\}$, $M\cap N\cap P=\{1,4\}$, $N\setminus P=\{2,5\}$ *и* $P\setminus M\neq\emptyset$. *Одредете го множеството* P.

Решение. Од $M\cap N\cap P=\{1,4\}$ заклучуваме дека $\{1,4\}\subseteq P$. Од $N\setminus P=\{2,5\}$ заклучуваме дека елементите 2 и 5 не се во P. Бидејќи $P\setminus M\neq\emptyset$ добиваме дека $3\in P$ и $3\notin M$. Според тоа, $P=\{1,3,4\}$. ■

Задача 28. *За множествата* M, N, P *важи* $M\cup N\cup P=\{1,2,3,4,5,6\}$, $M\cap N\cap P=\{1,4\}$, $N\setminus P=\{2,5,6\}$ *и* $P\setminus M\neq\emptyset$. *Одредете го множеството* P.

Решение. Од $M\cap N\cap P=\{1,4\}$ заклучуваме дека $\{1,4\}\subseteq P$. Од $N\setminus P=\{2,5,6\}$ заклучуваме дека елементите 2, 5 и 6 не се во P. Бидејќи $M\cup N\cup P=\{1,2,3,4,5,6\}$, добиваме $P=\{1,4\}$ или $P=\{1,3,4\}$ Но, како е $P\setminus M\neq\emptyset$, заклучуваме дека $P=\{1,3,4\}$. ■

Задача 29. *Одредете ги елементите на множествата* A, B, C *ако е*

$$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\},\quad (A\cap C)\cup(B\cap C)=\emptyset,\quad A\setminus B=\{1,3,5\},$$

$$C\setminus B=\{2,4\} \text{ и } (A\cap B)\setminus C=\{6\}.$$

Решение. Од $(A\cap C)\cup(B\cap C)=\emptyset$ следува $A\cap C=\emptyset$ и $B\cap C=\emptyset$. Бидејќи $B\cap C=\emptyset$ и $C\setminus B=\{2,4\}$, заклучуваме дека $C=\{2,4\}$. Од

$$(A\cap B)\setminus C=\{6\},\quad A\cap C=\emptyset \text{ и } B\cap C=\emptyset$$

следува $A\cap B=\{6\}$. Од

$$A\setminus B=\{1,3,5\} \text{ и } A\cap B=\{6\}$$

добиваме $A=\{1,3,5,6\}$. Конечно од

$$B\cap C=\emptyset,\quad A\setminus B=\{1,3,5\} \text{ и } A\cap B=\{6\}$$

имаме $B=\{6\}$.

Задачата можете да ја решите користејќи Ојлер-Венови дијаграми. Обидете се! ■

Задача 30. *Дадено е множество* $A=\{x \mid x\in\mathbb{N},\ 1\leq x\leq 30\}$. *Одредете го множеството*

$$B=\left\{(a,b) \mid a\in A,\ b\in A \text{ и } \left(\frac{3}{5}a-b\right)^2+5 \text{ има најмала вредност}\right\}.$$

Решение. Изразот $\left(\frac{3}{5}a-b\right)^2+5$ ќе има најмала вредност ако $\frac{3}{5}a-b=0$, т.е. ако $b=\frac{3}{5}a$. Освен тоа, за да парот (a,b) биде елемент на множеството B, треба елементот b да е од множеството A и притоа бројот a треба да е помал од 30 и делив со 5. Значи $a\in\{5,10,15,20,25,30\}$ и $b\{3,6,9,12,15,18\}$. Конечно,

$$B=\{(5,3),(10,6),(15,9),(20,12),(25,15),(30,18)\}. \ ■$$

Задача 31. *Нека* c *е парен природен број. Споредете ги* $\delta(A)$ *и* $\delta(B)$, *ако е*

$$A=\{(a,b) \mid a+b=c,\ a,b \text{ се парни природни броеви}\} \text{ и}$$

$$B=\{(x,y) \mid x+y=c,\ x,y \text{ се непарни природни броеви}\}.$$

Решение. Можни се два случаи, $c=4k$, $k\in\mathbb{N}$ и $c=4k+2$, $k\in\mathbb{N}$.

Ако $c=4k, k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$A = \{(4k-2t,2t) \mid t=1,2,\ldots,2k-1\} =$$

$$=\{(4k-2,2);\ldots;(2k+2,2k-2);(2k,2k);(2k-2,2k+2);\ldots;(2,4k-2)\}$$

па $\delta(A)=2k-1$, бидејќи за секој $t=1,2,\ldots,2k-1$ се добива по еден подреден пар.

Од друга страна

$$B=\{(4k-2t+1,2t-1) \mid t=1,2,\ldots,2k\}=$$

$$=\{(4k-1,1);\ldots;(2k+1,2k-1);(2k-1,2k+1);\ldots;(1,4k-1)\}$$

па е $\delta(B)=2k$, бидејќи за секој $t=1,2,\ldots,2k$ се добива по еден подреден пар.

Значи, при $c=4k$ имаме $\delta(B)=1+\delta(A)$.

Аналогно се докажува дека при $c=4k+2$ важи

$$\delta(B)=2k+1=1+\delta(A).$$

Значи во секој случај $\delta(B)>\delta(A)$. ■

Задача 32.* *Дадено е множеството* $S=\{s \mid s=a^n, n\in\mathbb{N}\}$. *За различни вредности на бројот* a, *добиваме различни множества* S. *Најдете ги сите множества* S *кои имаат конечен број елементи.*

Решение. За да a^n има конечен број вредности, мора $a\in\{-1,0,1\}$. Притоа имаме

–за $a=-1$ важи $a^n=\begin{cases} 1, & \text{ако } n \text{ е парен број} \\ -1, & \text{ако } n \text{ е непарен број} \end{cases}$,

–за $a=1$ важи $a^n=1$, за секој природен број n, и

–за $a=0$ важи $a^n=0$, за секој природен број n.

За секоја друга вредност на a степенот a^n прима бесконечно многу вредности. Навистина, тогаш $|a|>1$ или $0<|a|<1$. Во првиот случај имаме $|a|<|a|^2<|a|^3<\ldots$ односно $|a|<|a^2|<|a^3|<\ldots$ а во вториот случај имаме $|a|>|a|^2>|a|^3>\ldots$ односно $|a|>|a^2|>|a^3|>\ldots$ Значи во секој случај $a,a^2,a^3,\ldots$ се различни броеви.

Значи имаме три множества со бараната особина

$S_1=\{-1,1\}=\{s \mid s=(-1)^n, n\in\mathbb{N}\}$,

$S_2=\{1\}=\{s \mid s=1^n, n\in\mathbb{N}\}$, и

$S_3=\{0\}=\{s \mid s=0^n, n\in\mathbb{N}\}$. ■

II АРИТМЕТИЧКИ ЗАГАТКИ

Во оваа глава ќе разгледаме неколку аритметички загатки, за кои сметаме дека ќе го привлечат Вашето внимание. Ова посебно се однесува на магичните квадрати, кои од памтивек предизвикувале восхит кај сите вљубеници во математиката.

Задача 01. *Местата означени со ѕвездички заменете ги со цифри, така што собирањето е правилно извршено.*

а) $\begin{array}{r} \ast\,8\,4\,\ast \\ +\,2\,\ast\,\ast\,3 \\ \hline 6\,5\,2\,9 \end{array}$ *б)* $\begin{array}{r} 8\,\ast\,\ast\,7 \\ -\,\ast\,3\,5\,\ast \\ \hline 6\,1\,7\,7 \end{array}$ *в)* $\begin{array}{r} 3\,\ast\,5\,7 \\ -\,\ast\,9\,8\,\ast \\ \hline 4\,\ast\,6 \end{array}$ *г)* $\begin{array}{r} 1\,\ast\,5 \\ \ast\,\ast\,1\,7 \\ +\,5\,8\,\ast\,\ast \\ \hline \ast\,0\,8\,4\,6 \end{array}$

Решение. Во случаите а), б) и в) определувањето на ѕвездичките е еднозначно и лесно се наоѓа дека

а) $\begin{array}{r} 3\,8\,4\,6 \\ +\,2\,6\,8\,3 \\ \hline 6\,5\,2\,9 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} 8\,5\,2\,7 \\ -\,2\,3\,5\,0 \\ \hline 6\,1\,7\,7 \end{array}$ в) $\begin{array}{r} 3\,4\,5\,7 \\ -\,2\,9\,8\,1 \\ \hline 4\,7\,6 \end{array}$

г) Цифрата на десетките во првиот собирок независно ја менуваме од 0 до 9, а при тоа останатите ѕвездички еднозначно се определуваат. Можни решенија се

$\begin{array}{r} 1\,0\,5 \\ 4\,9\,1\,7 \\ +\,5\,8\,2\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\,1\,5 \\ 4\,9\,1\,7 \\ +\,5\,8\,1\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\,2\,5 \\ 4\,9\,1\,7 \\ +\,5\,8\,0\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\,3\,5 \\ 4\,8\,1\,7 \\ +\,5\,8\,9\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\,4\,5 \\ 4\,8\,1\,7 \\ +\,5\,8\,8\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1\,5\,5 \\ 4\,8\,1\,7 \\ +\,5\,8\,7\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\,6\,5 \\ 4\,8\,1\,7 \\ +\,5\,8\,6\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\,7\,5 \\ 4\,8\,1\,7 \\ +\,5\,8\,5\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\,8\,5 \\ 4\,8\,1\,7 \\ +\,5\,8\,4\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\,9\,5 \\ 4\,8\,1\,7 \\ +\,5\,8\,3\,4 \\ \hline 1\,0\,8\,4\,6. \end{array}$ ■

Задача 02. *Еден виенски математичар ја замолил службеничката во пошта да му го каже телефонскиот број на некој негов пријател. Службеничката не сакала да му го каже бројот, но сепак му кажала дека има четири телефонски броеви под тоа име, кои имаат некои заеднички особини. Имено секој од тие броеви има различни цифри, збирот на цифрите на секој од броевите е еднаков на 10, а ако секој од тие четири броеви се собере со бројот напишан во обратен редослед, се добиваат четири исти броеви кои имаат исти цифри. Службеничката мислела дека овие податоци не се доволни за да се откријат броевите. Меѓутоа виенскиот математичар знаејќи дека сите телефонски броеви во Виена се наоѓаат помеѓу броевите 20000 и 99999, успеал да ги открие четирите телефонски броеви. Кои биле тие броеви?*

Решение. Да претпоставиме дека еден од телефонските броеви е ABCDE. Според условот на задачата ќе важи A+B+C+D+E=10 и

$$\begin{array}{r} ABCDE \\ \underline{+EDCBA} \\ FFFFF \end{array}.$$

Тоа е можно само ако е A+E=F, B+D=F и 2C=F. Користејќи го тоа и фактот дека A+B+C+D+E=10 добиваме $2F + \frac{F}{2} = 10$, т.е. F=4 и C=2. Имајќи предвид дека броевите во Виена се наоѓаат помеѓу 20000 и 99999 и дека $A, B, C, D, E \le F=4$, заклучуваме дека A може да биде 2, 3 или 4. Но C=2, па $A \neq 2$. Освен тоа сите цифри на четирите броеви се различни, па лесно се наоѓа дека бараните телефонски броеви се 30241, 34201, 41230 и 43210. ■

Задача 03. *Местата означени со ѕвездички заменете ги со цифри, така што множењето е правилно извршено.*

а)

$$\begin{array}{r} * * * \\ \underline{\times\ 4\ 5\ 7} \\ * * * * \\ 1\ 7\ 0\ 5\ \\ \underline{* * * *\ } \\ * * * * * \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{r} * * * 3 \\ \underline{\times\ \ * * *} \\ * 7 0 * \\ * 2 1 3\ \\ \underline{* * * 9\ } \\ * * * * * * \end{array}$$

Решение. Бидејќи 1705=5·341, добиваме дека првиот множител е 341, па

$$\begin{array}{r} 3\ 4\ 1 \\ \underline{\times\ 4\ 5\ 7} \\ 2\ 3\ 8\ 7 \\ 1\ 7\ 0\ 5\ \\ \underline{1\ 3\ 6\ 4\ } \\ 1\ 5\ 5\ 8\ 3\ 7 \end{array}.$$

б) Цифрата на десетките на вториот множител мора да е 1 бидејќи таа цифра множена со 3 мора да завршува на 3. Потоа цифрата на стотките на вториот множител мора да е 3 бидејќи таа цифра множена со 3 треба да завршува на 9. Така добиваме

```
    * 2 1 3
 x    3 1 *
 ----------
    * 7 0 *
  * 2 1 3
* 6 3 9
 ----------
* * * * * *
```

Цифрата на единиците на вториот множител е 8 што се наоѓа со непосредна проверка. Ако цифрата на илјадарките на првиот множител е ≥2, тогаш 8·∗213 ќе биде петцифрен број што не е можно. Значи таа цифра е 1. Така добиваме

```
    1 2 1 3
 x    3 1 8
 ----------
    9 7 0 4
  1 2 1 3
3 6 3 9
 ----------
3 8 5 7 3 4
```

■

Задача 04. *Местата означени со ѕвездички заменете ги со цифри, така што множењето е правилно извршено.*

```
      * 1 *
    x 3 * 2
  ---------
      * 3 *
  3 * 2 *
* 2 * 5
  ---------
1 * 8 * 3 0
```

Решение. Без тешкотии се добива дека бараното множење на броевите е следното

```
      4 1 5
    x 3 8 2
  ---------
      8 3 0
  3 3 2 0
1 2 4 5
  ---------
1 5 8 5 3 0
```

■

Задача 05. *Местата означени со ѕвездички заменете ги со цифри, така што множењето е правилно извршено.*

```
    * * 5
  x 1 * *
  -------
    2 * * 5
  1 3 * 0
3 * *
  -------
4 * 7 7 *
```

Решение. Без тешкотии се добива дека задачата се сведува на наоѓање на ѕвездичките и на цифрата A од следната табела

$$\begin{array}{r} 3\ast5 \\ \times\ 1\ast A \\ \hline 2\ast75 \\ 13\ast0 \\ 3\ast5 \\ \hline 4\ast775 \end{array}$$

Цифрата A очигледно е непарен број бидејќи помножена со 5 завршува на 5. Освен тоа цифрата A помножена со бројот 3*5 треба да го даде бројот 2*75, а тоа е број поголем од 2000. Затоа е $A\geq6$, па затоа е A=7 или A=9. Ќе докажеме дека A не може да биде еднаква на 9. Навистина ако A=9, тогаш добиваме дека цифрата на десетките на првиот множител е еднаква на 7 бидејќи производот 3*5xA завршува на 75. Така добиваме

$$\begin{array}{r} 375 \\ \times\ 1\ast9 \\ \hline 2\ast75 \\ 13\ast0 \\ 375 \\ \hline 4\ast775 \end{array}$$

па овој случај не е можен бидејќи почетната цифра на производот треба да биде 5, што е противречност. Значи A=7 а потоа лесно се дешифрираат и останатите ѕвездички

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times\ 147 \\ \hline 2275 \\ 1300 \\ 325 \\ \hline 47775 \end{array}$$

■

Задача 06. *Местата означени со ѕвездички заменете ги со цифри, така што делењето е правилно извршено.*

$$\begin{array}{l} \ast2\ast5\ast \ :\ 325 = 1\ast\ast \\ \underline{\ast\ast\ast} \\ \ast0\ast\ast \\ \underline{\ast9\ast\ast} \\ \ast5\ast \\ \underline{\ast5\ast} \end{array}$$

Решение. Без тешкотии проблемот се сведува на наоѓање на ѕвездичките од табелата

```
* 2 * 5 *  :  3 2 5  =  1 * *
3 2 5
* 0 * 5
* 9 * 0
  * 5 *
  * 5 *
```

Цифрата на единиците на количникот мора да биде 2, бидејќи само во тој случај производот 325xA ќе биде од облик *5*. Цифрата на десетките на количникот мора да биде 6, бидејќи само во тој случај производот 325xB ќе биде од облик *9*0. Сега лесно се дешифрираат останатите ѕвездички.

```
5 2 6 5 0  :  3 2 5  =  1 6 2
3 2 5
2 0 1 5
1 9 5 0
  6 5 0
  6 5 0  ■
```

Задача 07*. *Местата означени со ѕвездички заменете ги со цифри, а прашалникот со број, така што делењето е правилно извршено.*

```
а)  * * * * * *  :  * * *  = * * 8 *
    * * *
    3 0 2 *
    * 6 9 5
      * * 1 1
      3 * 8 *
        2 * 1 *
        * * * *
```

```
б)  * * * * * * * * * *  : ?  =  * * * * * 8 * *
    * * *
        * * *
        * * *
          * * *
          * * *
                * *
                * *
                  * * *
                  * * *
```

Решение. а) Без тешкотии табелата се дополнува до следната табела

```
* * * 6 1 *  :  * * *  = * * 8 *
* * *
-----
3 0 2 6
2 6 9 5
-------
  3 3 1 1
  3 0 8 0
  -------
    2 3 1 *
    2 3 1 *
    -------
```

Делителот X е трицифрен број и X|2695 и X|3080. Затоа X|3080-2695=385, па X=385. Цифрата на стотките на количникот е 2695:385=7, а цифрата на единиците на количникот лесно се проверува дека е 6. Цифрата на илијадарките на количникот помножена со 385 е трицифрен број, па затоа таа цифра е 1 или 2. Лесно се проверува дека таа цифра не може да биде 2, па мора да е 1. Така добиваме

```
6 8 7 6 1 0  :  3 8 5  = 1 7 8 6
3 8 5
-----
3 0 2 6
2 6 9 5
-------
  3 3 1 1
  3 0 8 0
  -------
    2 3 1 0
    2 3 1 0
    -------
```

б) Цифрата 8 множена со делителот "?" дава двоцифрен број, па делителот е број помал или еднаков на 12. Кога делителот би бил број помал или еднаков на 11, тогаш тој помножен со било која цифра ќе дава двоцифрен број но тоа не е случај. Значи делителот е 12. Забележуваме дека останатите цифри во количникот се 0 и 9. Имено, се добива

```
1 0 9 1 8 8 9 7 0 8  :  1 2  =  9 0 9 9 0 8 0 9
1 0 8
-----
    1 1 8
    1 0 8
    -----
      1 0 8
      1 0 8
      -----
            9 7
            9 6
            ---
              1 0 8
              1 0 8
              -----
```

Забелешка. Ќе наведеме и два исклучително тешки проблеми од овој тип. Првиот е познат како проблем на четири четворки, а вториот како проблем на седум седумки.

1.
```
* * * * * * 4  :  * * *  =  * 4 * *
  * * *
  -------
  * * 4 *
  * * * *
  -------
    * * * *
      * 4 *
      -----
      * * * *
      * * * *
      -------
```

2.
```
* * 7 * * * * * * *  :  * * * * 7 *  =  * * 7 * *
* * * * * *
-------------
* * * * 7 * *
* * * * * * *
-------------
    * 7 * * * *
    * 7 * * * *
    -------------
    * * * * * * *
    * * * * 7 * *
    -------------
        * * * * * *
        * * * * * *
        -----------
```

Првиот проблем ги има следните четири решенија

1337174 : 943 = 1418

1343784 : 949 = 1416

1200474 : 846 = 1419

1202464 : 848 = 1418

а вториот проблем ги има следните пет решенија

7375252070 : 125470 = 58781

7375310851 : 125471 = 58781

7375369632 : 125472 = 58781

7375428413 : 125473 = 58781

7375487194 : 125474 = 58781 . ■

Задача 08. *Да се определат буквите во следните задачи така што операциите се правилно изведени, при што секоја буква означува некоја цифра и исти букви означуваат исти цифри, а различни букви означуваат различни цифри.*

а)
```
  ABB
x  AC
-----
  CDD
 ABB
-----
 AECD
```

б)
```
  ABC
x  BC
-----
  DBC
 BCF
-----
 FABC
```

в)
```
UEMA : MA = EMA
MA
--
 TM
 AS
 --
 EMA
 EMA
 ---
```

Решение. а)
```
  144
x  12
-----
  288
 144
-----
 1728
```

б)
```
  125
x  25
-----
  625
 250
-----
 3125
```

в)
```
3125 : 25 = 125
25
--
 62
 50
 --
 125
 125
 ---
```
■

Задача 09. *Местата означени со ѕвездички и букви заменете ги со цифри, така што операциите се правилно изведени при што д, в и а се различни цифри.*

$$\begin{array}{r}
\text{д в а}\cdot\text{д в а}\\
\hline
*\ *\ *\ \text{а}\\
*\ *\ \text{в}\\
*\ *\ *\ \text{д}\\
\hline
*\ *\ *\ *\ *\ *
\end{array}$$

Решение. Цифрата а помножена сама со себе завршува на истата цифра, па затоа $а\in\{0,1,5,6\}$. Очигледно дека $а\neq 0$ и $а\neq 1$ бидејќи $\overline{\text{два}}\cdot а$ треба да е четирицифрен број. Освен тоа $а\neq 5$ бидејќи цифрата а помножена уште со две други цифри "в" и "д" треба да завршува на "в" и "д", соодветно. Значи останува да е а=6. За да производот $а\cdot в$ завршува на цифрата "в" и производот $а\cdot д$ завршува на "д", мора цифрите д и в да се парни. Имајќи предвид дека "в" и "д" се два различни броја во множеството $\{2,4,8\}$, и дека $\overline{\text{два}}\cdot в$ е трицифрен број а $\overline{\text{два}}\cdot д$ е четирицифрен број, лесно се наоѓа дека д=4 и в=2. Значи

$$\begin{array}{r}
4\ 2\ 6\cdot 4\ 2\ 6\\
\hline
2\ 5\ 5\ 6\\
8\ 5\ 2\\
1\ 7\ 0\ 4\\
\hline
1\ 8\ 1\ 4\ 7\ 6
\end{array}$$. ■

Задача 10. *Осум цифри "8" да се поврзат со симболите (,), +,- и · така што да се добие резултат* 1000.

Решение. Ќе изнесеме едно размислување кое брзо води до резултат. Забележуваме дека $2^{10}=1024$, $1000=2^{10}-8-8-8$, па бројот 2^{10} треба да се запише со помош на пет осумки ($8=2^3$). Но,

$$2^{10} = 2^9 + 2^9 = 8\cdot8\cdot8 + 8\cdot8\cdot8 = 8\cdot(8\cdot8 + 8\cdot8),$$

па значи

$$8\cdot(8\cdot8 + 8\cdot8) - 8 - 8 - 8 = 1000. ■$$

Забелешка: Задачата со осумте осумки го има исто така и следното решение

$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.$$

Задача 11. *Мирјана му рекла на Димитар: "Замисли еден природен број, помножи го со* 5, *додади* 2, *помножи со* 4, *додади* 3, *помножи со* 5 *и додади* 7. *Кажи ми го добиениот резулатат, а јас веднаш ќе погодам кој број си го замислил."*

Како Мирјана може да го открие замислениот број без да дели и без да одзема?

Решение. Нека Димитар го замисли бројот n. На крај Димитар ќе го добие бројот $((5n+2)4+3)5+7=100n+62$. Затоа Мирјана ќе ги отфрли последните две цифри 2 и 6, и ќе го добие бараниот број n. ■

Задача 12. *Петар и рекол на Цветанка: "Замисли еден природен број помал од 996, помножи го со 37, додади 111, помножи со 27, а добиениот резултат заокружи го со најмалиот природен број кој завршува со три нули и е поголем или еднаков од добиениот број, а јас веднаш ќе ти кажам кој број си го замислила.*

Како Петар ќе го погоди замислениот број?

Решение. Нека Цветанка го замисли бројот n. Тогаш пред заокружувањето таа го добива следниот број

$$(37\cdot n+111)\cdot 27=999\cdot n+2997=(1000-1)\cdot n+3000-3=1000\cdot(n+3)-(n+3).$$

Бидејќи $0<n+3<999$, со заокружување Цветанка ќе го добие бројот $1000\cdot(n+3)$. Затоа Петар од овој број ги отфрла последните три нули, го одзема бројот 3 и со тоа го добива бараниот број n. ■

Задача 13*. *Стојан и рекол на Славица: "Бројот кој го означува датумот на твојот роденден помножи го со 20 и додади 77. Збирот помножи го со 5 а потоа додади го бројот што го означува месецот на твоето раѓање. Тој збир помножи го пак со 20 и додади 77. Помножи со 5, и додади го двоцифрениот број кој ги означува последните две цифри на годината во која што си родена. Кажи ми го резултатот а јас брзо ќе погодам кога точно си родена.*

Како Стојан ќе погоди кога е родена Славица?

Решение. Нека x, y и z се двоцифрени броеви кои ги означуваат соодветно датумот, месецот и годината (односно двоцифрениот број кој ги претставува последните две цифри од соодветната година) на раѓањето на Славица, при што едноцифрените броеви ги разгледуваме како двоцифрени со додавање на 0 пред нив. Бројот кој Славица ќе му го каже на Стојан е

$$(((20\cdot x+77)\cdot 5+y)\cdot 20+77)\cdot 5+z = 10000\cdot x+100\cdot y+z+38885.$$

Затоа кога од овој број ќе се извади бројот 38885 ќе се добие шестциферн број таков што неговите први две цифри го даваат датумот на раѓањето, следните две цифри го определуваат месецот а следните две цифри ја определуваат годината на раѓањето на Славица.

На пример ако Славица го каже бројот 270162, тогаш 270162 $-38885=231277$, па Славица е родена на 23-ти декември, 1977 година при претпоставка дека Славица е родена во дваесеттиот век. ■

Задача 14. *Еден селанец оставил тестамент според кој по неговата смрт им ги остава во наследство своите коњи на неговите три сина и тоа на најстариот син му остава половина од бројот на коњите, на средниот син му остава третина од бројот на коњите, а на најмалиот син му остава во наследство деветина од бројот на коњите. По смртта на селанецот се покажало дека има 17 коњи така што неговите синови никако не можеле да се* *спогодат околу поделбата на имотот. Кога побарале помош од судијата, тој отишол дома, донел еден свој коњ така што сега имало вкупно 18 коњи, и почнал со поделбата на имотот: На најстариот син му дал 9 коњи (половина од 18), на средниот син му дал 6 коњи (една третина од бројот на коњите) и на најмалиот син му дал 2 коња (една деветина од бројот на коњите). Така на крај останал 1 коњ, кој што судијата си го вратил дома, и освен тоа делбата била успешно извршена.*

Во што се состои "тајната" на делбата на имотот?

Решение. Основна забелешка е дека селанецот не водел сметка дека збирот $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ не е еднаков на 1. Имено

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18},$$

па доколку со 18 коњи поделбата била спроведена според тестаментот на селанецот, некој коњ ќе останел ничиј. Имајќи го тоа предвид судијата донел 1 (18-17) коњ, како 17 од вкупно 18 коњи би се поделиле на синовите.

Дали ваквата поделба е математички сосема точна? ■

Задача 15. *Во три еднакви садови имало различни количества вода. Од првиот сад се прелиени во вториот и во третиот сад по толкави количества вода колку што претходно имало во тие садови. Потоа од вториот сад се прелиени во првиот и третиот сад по толкави количества вода колку што претходно имало во тие садови. На крај од третиот сад се прелиени во првиот и вториот сад по толкави количества вода колку што претходно имало во тие садови и притоа се покажало дека во сите три садови има по 24 литри вода.*

Да се најде по колку литри вода имало на почетокот во секој сад!

Решение. Задачата ќе ја решиме почнувајќи од крајот. Количествата на вода после третото преливање на вода било

I - 24 литри, II - 24 литри, III - 24 литри.

Количествата на вода пред третото преливање на вода било

I - 12 литри, II - 12 литри, III - 48 литри.

Количествата на вода пред второто преливање на вода било

I - 6 литри, II - 42 литри, III - 24 литри.

Количествата на вода пред првото преливање на вода било

I - 39 литри, II - 21 литри, III - 12 литри. ■

Задача 16. *Слободанка на пазар продавала јајца. На првиот купувач му продала половина од јајцата и уште половина јајце. На вториот купувач му продала половина од останатите јајца и уште половина јајце. На ист начин Слободанка му продала јајца уште на двајца купувачи, со што ги продала сите јајца. Колку јајца Слободанка донела на пазар?*

Решение. Слободанка имала 15 јајца во корпата. На првиот купувач му продала 8 јајца, а тоа е $\frac{15}{2}+\frac{1}{2}$. На вториот купувач му продала 4 јајца, а тоа е $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}$, и останале уште три јајца. На третиот купувач му продала 2 јајца, а тоа е $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$. Останало едно јајце кое го продала на четвртиот купувач, а тоа е $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

При решавањето иако е почнато од резултатот, треба да се почне од последната продажба.

Очигледно, добар трговец продава и половина јајце! ■

Задача 17. *Дадена е квадратна* 10x10 *табела во која се запишани* 100 *природни броеви. Секој запишан број претставува аритметичка средина на сите свои соседни броеви, при што аритметичка средина на* n *броеви е нивниот збир поделен со* n. *Докажете дека сите броеви во табелата се еднакви меѓу себе.*

Решение. Нека s е најмалиот од сите броеви во табелата. Тој е аритметичка средина на 3, 5 или 8 броеви од табелата. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека s е во внатрешниот дел на табелата и дека е аритметичка средина на 8 соседни броеви: a,b,c,d,e,f,g,h (види цртеж). Тогаш е $a+b+c+d+e+f+g+h=8s$, од што следува

a	b	c							
h	s	d							
g	f	e							

$$(a-s)+(b-s)+(c-s)+(d-s)+(e-s)+(f-s)+(g-s)+(h-s)=0.$$

Но, по претпоставка s е најмалиот број во табелата, па затоа ниеден број во заградите не може да биде негативен. Бидејќи збир на 8 ненегативни броеви е еднаков на нула, добиваме дека сите се еднакви на нула, што е можно само ако броевите a, b,c,d,e,f,g,h и s се еднакви меѓусебно. Ако сега ова размислување се повтори за останатиот дел од табелата (без бројот s), по ред добиваме дека сите 100 природни броеви се еднакви. ■

Задача 18. *На дворот на кралот Артур е констатирано дека секој витез се познава со точно* n *штитоносци и дека секој штитоносец се познава со точно* n *витези. Докажете дека на дворот на кралот Артур бројот на витезите е еднаков на бројот на штитоносците.*

Решение. Нека бројот на витезите е a и бројот на штитоносците е b. Секој витез се познава со точно n штитоносци, па затоа a витези имаат вкупно $n\cdot a$ познанства со штитоносците. Слично, штитоносците имаат точно $n\cdot b$ познанства со витезите. Меѓутоа, на секое познанство "витез-штитоносец" соодветствува познанство "штитоносец-витез", па затоа $n \cdot a = n \cdot b$, од што добиваме $a=b$. Значи, бројот на витезите е еднаков на бројот на штитоносците, што и требаше да докажеме. ■

Задача 19*. *Докажи дека бројот на жители на Република Македонија кои што имаат непарен број на роднини во Република Македонија е парен број.*

(Релацијата "е во роднинска врска" е обострана, т.е. симетрична, но не се зема дека секој е во роднинска врска сам со себе.)

Решение. Да претпоставиме дека во Република Македонија има m жители при што n од нив имаат непарен број на роднини во Република Македонија. Да ги означиме жителите во Република Македонија со броевите $1,2,\dots,m$ при што првите n жители имаат непарен број на роднини. Треба да докажеме дека n е парен број. Нека a_i $(1 \le i \le m)$ е бројот на роднини на жителот i. Значи $a_1,\dots,a_n$ се непарни броеви, а $a_{n+1},\dots,a_m$ се парни броеви. Збирот $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_m$ е парен број бидејќи секоја роднинска врска, на пример помеѓу жителите i и j е броена два пати: еднаш преку жителот i и еднаш преку жителот j. Бидејќи $a_{n+1},\dots,a_m$ се парни броеви, следи дека $a_1+a_2+ \dots +a_n$ е парен број. Кога n би бил непарен број би добиле дека збир на непарен број непарни броеви е парен број што е противречност. Значи n е парен број. ■

Задача 20. *Дванаесет леба поделени се на дванаесет мажи, жени и деца (имало барем по еден маж, жена и дете) така што секој маж добил по два леба, секоја жена добила по половина леб и секое дете добило по четвртина леб. Колку биле мажи, колку жени, а колку деца?*

Решение. (1) Мажи биле помалку од 6, бидејќи ако биле 7 или повеќе, нема за сите да има леб, а ако се 6, тогаш нема да остане ниеден леб за жените и децата.

(2) Мажи биле повеќе од 3. Ако се помалку од 4, тие ќе земат помалку од 6 или 6 леба, па за останатите жени и деца ќе останат 6 или повеќе од 6 леба, а тие можат да поделат најмногу 5,25 леба.

(3) Мажи биле 5. Ако се 4, тогаш за останатите осум жени и деца ќе преостанат 4 леба. Но тоа е можно само ако нема деца, што противречи на условот на задачата.

(4) Според тоа, мажи биле 5, тие добиле 10 леба. Со слична дискусија се докажува дека има една жена и 6 деца.

Задача 21*. *Двеста ученици, меѓу кои нема еднакви по висина, распоредени се во 10 редици и 20 колони. Во секоја редица избран е највисок ученик. Од овие 10 ученици најнизок е Мирко.*

Во секоја колона избран е најнизок ученик. Од овие 20 ученици највисок е Пандил.

Кој е повисок, Мирко или Пандил?

Решение. Да ги воочиме редот во кој се наоѓа Мирко и колоната во која се наоѓа Пандил. Нека со X го означиме ученикот кој се наоѓа во пресекот на редот на Мирко и колоната на Пандил. Според претпоставката, Мирко е највисок во својот ред, па затоа е повисок од ученикот X. Но, Пандил е најнизок во својата колона, па затоа е понизок од ученикот X.

Бидејќи Мирко е повисок од ученикот X, а овој е повисок од Пандил, добиваме дека Мирко е повисок од Пандил. ∎

Задача 22. *Маја, Петар и Марко задоцниле на натпреварот по математика. Брзајќи Маја прескокнувала по едно стапало, Петар прескокнувал по две стапала, а Марко прескокнувал по четири стапала. Скалите се состојат од неколку делови од по 8 стапала. Претседателот на натпреварувачката комисија Стеван тврдел дека ако земеме било кои 8 последователни стапала, тогаш меѓу нив ќе постои стапало на кое не згазнал ниеден од натпреварувачите. Докажете дека претседателот Стеван бил во право.*

Решение. Да ги нумерираме било кои осум последователни стапала со броевите 1,2,3,4,5,6,7 и 8. Маја газела или на стапалата 1, 3, 5 и 7, или на стапалата 2, 4, 6 и 8. Ќе ја разгледаме првата можност (другата можност се разгледува аналогно).

Петар газел на стапалата 1,4 и 7 или на стапалата 2,5 и 8 или на стапалата 3 и 6. Во секој од овие случаи ќе се најдат две стапала, одделени со по едно стапало, на кои не згазнала ниту Маја, ниту Петар (во првиот случај тоа се стапалата 6 и 8, во вториот случај тоа се стапалата 4 и 6, а во третиот случај тоа се стапалата 2 и 4). Марко прескокнувал по четири стапала, па значи дека тој не згазнал барем на едно од овие стапала. Според тоа, постои барем едно стапало на кое не згазнал ниту еден од натпреварувачите. Бидејќи разгледувавме било кои 8 последователни стапала заклучуваме дека претседателот на комисијата Стеван е во право.

До истиот заклучок доаѓаме ако го разгледуваме случајот кога Маја газела на стапалата 2,4,6 и 8. ∎

Задача 23.* *Броевите 1,2,3,4,5,6,7,8 и 9 треба да се постават во следната табела, така што збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и секоја дијагонала биде еден ист број.*

а) Колкав треба да биде збирот на броевите во секоја колона, секоја редица односно секоја дијагонала?

б) Кој број стои во центарот на дадениот квадрат ?

в) Испитај ја парноста на броевите во секое од останатите осум полиња.

г) Најдете ги сите можни решенија на задачата.

Решение. Полињата во табелата да ги означиме со A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2 и C3 како што е тоа покажано во следната табела. Всушност можеме да сметаме дека секој од овие девет броеви претставува некој од броевите од 1 до 9.

A1	A2	A3
B1	B2	B3
C1	C2	C3

а) Нека бараниот збир на броевите во секоја колона, редица односно дијагонала е X. Тогаш

$$A1 + B1 + C1 = X$$

$$A2 + B2 + C2 = X$$

$$A3 + B3 + C3 = X.$$

Ако ги собериме овие три равенства добиваме

$$A1 + A2 + A3 + B1 + B2 + B3 + C1 + C2 + C3 = 3X.$$

Но $A1+A2+A3+B1+B2+B3+C1+C2+C3=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, па е $X=15$.

б) Од условот на задачата и од а) ги добиваме следните равенства

$$A1 + B2 + C3 = 15$$
$$A2 + B2 + C2 = 15$$
$$A3 + B2 + C1 = 15$$
$$B1 + B2 + B3 = 15.$$

Со собирање на овие равенства добиваме

$$(A1+A2+A3+B1+B2+B3+C1+C2+C3) + 3\cdot B2 = 60,$$
$$45 + 3\cdot B2 = 60, \quad \text{т.е.} \quad B2 = 5.$$

Значи во центарот на квадратот се наоѓа бројот 5. Освен тоа забележуваме дека паровите на броеви A1 и C3, A2 и C2, A3 и C1, B1 и B3 се дополнуваат до бројот 10, бидејќи збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и секоја дијагонала е еднаков на 15.

в) Забележуваме дека во произволно избрана колона, редица или дијагонала, или сите три броја ќе бидат непарни или пак еден ќе биде непарен а останатите два броја ќе бидат парни, бидејќи нивниот збир е непарен број.

Ќе докажеме дека бројот A1 е парен. Да претпоставиме дека A1 е непарен број. Тогаш можни се следниве случаи:

(i) A2 е парен број;

(ii) A2 е непарен број.

Да претпоставиме дека (i) важи. Тогаш A3 мора да е парен број, а потоа и броевите C2, C1, B1 и B3 мора да се парни, а бројот C3 треба да е непарен. Со тоа добиваме противречност: меѓу броевите 1,2,3,4,5,6,7,8 и 9 има три непарни и шест парни броеви. Значи случајот (i) не е можен.

Да претпоставиме дека (ii) важи. Лесно може да се види дека тогаш и сите останати броеви мора да се непарни броеви, што исто така претставува противречност. Значи и случајот (ii) не е можен.

Како заклучок добиваме дека A1 не може да биде непарен број, па значи тој е парен број. Од истите причини останатите броеви во ќошовите т.е. A3, C1 и C3 се исто така парни бреви. Броевите A2, B3, C2 и B1 тогаш мора да бидат непарни броеви.

г) Имајќи ги предвид резултатите под б) и в), фактот што A1+C3=10=C1+A3 и фактот што ако се познати броевите A1, A3, C3, C1 и B2, тогаш броевите A2, B3, C2 и B1 се определуваат еднозначно, сите можни решенија се следните:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

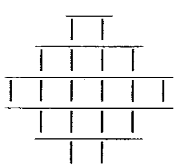
8	1	6
3	5	7
4	9	2

Забелешка. Решението на задачата дадено на следниот цртеж е познато пред повеќе од 3000 години и истото е најдено во една стара кинеска книга со наслов "Книга за пермутациите", која е пишувана најмалку 1000 год. п.н.е.

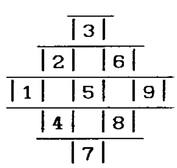
2	7	6
9	5	1
4	3	8

Квадратите од типот на претходната задача се познати како магични квадрати. Поопшто постојат најразлични "магични фигури" како на пример магични триаголници, многуаголници, непарно -парни квадрати, парно-парни квадрати и т.н. а постојат и методи на нивно конструирање. Меѓу магичните фигури најпроучувани се магичните квадрати.

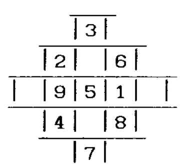
Како што рековме постојат најразлични методи за конструирање на магичните квадрати. На крајот од оваа задача ќе презентираме уште еден метод за конструирање на магични квадрати со непарен број полиња. Методот се состои во следното:



а)



б)



в)

-околу квадратот доцртуваме четири полиња, како на цртежот а),

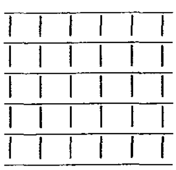
-во така добиената фигура ги разместуваме дадените броеви како на цртежот б), и

-сега бројот 1 го преместуваме во празното поле кое се наоѓа во истиот ред, но на спротивната страна и го прецртуваме бројот 1. Постапката ја повторуваме за броевите 3,7 и 9 со тоа што за 3 и 7 одиме по колони. ■

Задача 24*. *Составете магичен квадрат со непарен број полиња, кој е поголем од 9.*

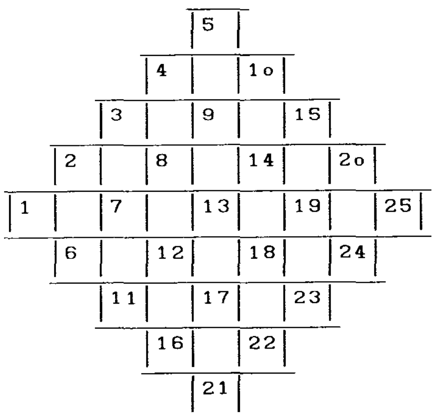
Решение. Цртаме квадрат со непарен број полиња, по желба 5x5, или 7x7, или 9x9 и т.н.

Постапката ќе ја образложиме на магичниот квадрат со 5x5 полиња. Нацртаниот квадрат (цртеж а), го прошируваме како на цртежот б) и во така добиената фигура ги разместуваме броевите од 1 до 25, (цртеж б).

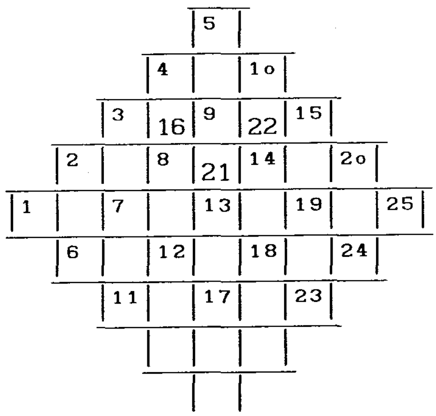


цртеж а)

Во квадратот секое второ поле ќе остане празно. Во тие празни полиња ќе ги запишиме броевите кои се наоѓаат во доцртаните "пирамиди", надвор од квадратот, но така што од секоја пирамида ги запишуваме броевите во празните полиња



цртеж б)



цртеж в)

на спротивната страна на квадратот (цртеж в).

На тој начин квадратот ќе биде потполнет и збирот на броевите во сите редици, колони и двете дијагонали ќе биде 65. ■

Задача 25*. *Составете магичен квадрат со 16 полиња.*

Решение. Прво ги запишуваме броевите од 1 до 16, како на цртеж а). Броевите во четирите агли, т.е. 1, 4, 13 и 16 ги оставме на своите места, а исто така на своите места ги оставаме и четирите броеви во средината на квадратот, т.е. 6, 7, 10 и 11. Останатите броеви ги разместуваме како што следува:

-ги заменуваме местата на броевите 15 и 2,
-ги заменуваме местата на броевите 14 и 3,
-ги заменуваме местата на броевите 12 и 5, и
-ги заменуваме местата на броевите 8 и 9.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

цртеж а)

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

цртеж б)

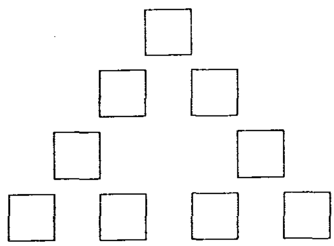
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

цртеж в)

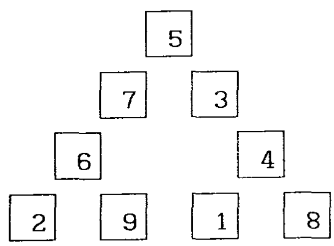
Овој квадрат (цртеж б) ги задоволува условите на задачата и збирот на броевите во редиците, колоните и дијагоналите изнесува 34.

Да напомниме дека прв магичен квадрат со парен број полиња, во Западна Европа се појавил во 1514 год, на познатиот Диреров бакрорез "Меланхолија" (цртеж в). Во најдолниот ред на овој квадрат, на двете средни полиња, запишани се броевите 15 и 14, кои заедно ја даваат годината, кога Дирер (уметник, математичар и автор на бројни написи од областа на математиката) го изработил својот познат бакрорез. ■

Задача 26. *Во квадратите на следната фигура да се впишат броевите* 1,2,3,4,5,6,7,8 *и* 9 *така што збирот на броевите на секоја страна биде* 20.

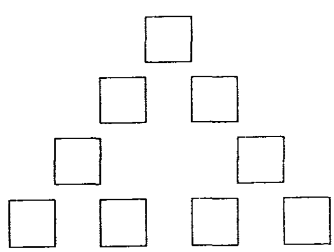


Решение. Ако ги собереме збировите на броевите во секоја страна поодделно ќе добиеме дека тој збир е 3x20=60, но при тоа броевите на врвовите се броени двапати. Збирот на броевите 1, 2, 3, 4, 5,6,7,8 и 9 е еднаков на 45, па затоа збирот на броевите во врвовите е еднаков на 60-45=15. Имајќи го тоа предвид се наоѓа дека едно од решенијата е следното:

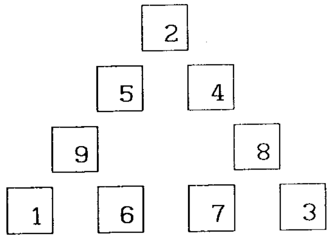


■

Задача 27* *Во квадратите на следната фигура да се впишат броевите* 1,2,3,4,5,6,7,8 *и* 9 *така што збирот на броевите на секоја страна биде* 17.

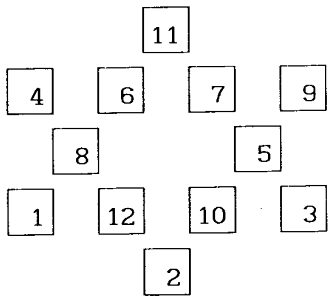


Решение. Аналогно како во претходната задача се заклучува дека збирот на броевите во врвовите е еднаков на 6. Очигледно дека во врвовите не може да стои број поголем од 3, бидејќи $x+1+2\geq6$ ако $x\geq4$. Значи во врвовите стојат броевите 1, 2 и 3. Имајќи го тоа предвид лесно се наоѓа дека едно од можните решенија е решението прикажано на цртежот.



■

Задача 28*. *"Бројната" ѕвезда на цртежот десно го има следното "магично" својство: сите шест реда броеви имаат ист збир на броевите, т.е.*



$4 + 6 + 7 + 9 = 26$

$4 + 8 + 12 + 2 = 26$

$9 + 5 + 10 + 2 = 26$

$11 + 6 + 8 + 1 = 26$

$11 + 7 + 5 + 3 = 26$

$1 + 12 + 10 + 3 = 26$

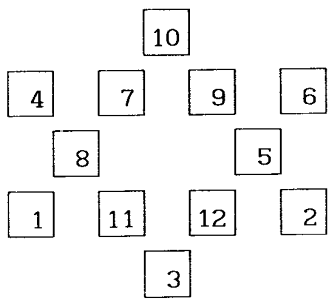
Збирот на броевите поставени на врвовите се разликува и тој е

$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30.$

Пробајте да ја усовршите таа ѕвезда, разместувајќи ги броевите така што не само збирот во секоја редица да биде еднаков на 26, туку и збирот на броевите поставени на врвовите да биде еднаков на 26.

Решение. Збирот на броевите на врвовите од бараната ѕвезда треба да биде еднаква на 26, а збирот на сите броеви на ѕвездата е еднаков на 78. Затоа збирот на броевите на внатрешниот шестаголник е еднаков на 78-26=52.

Да разгледаме еден од двата големи триаголници. Збирот на броевите на секоја негова страна е еднаков на 26. Ако ги собереме тие три збира ќе добиеме збир



$3x26=78$,

но притоа секој од броевите што стои на врв од ѕвездата е броен два пати. Бидејќи збирот на броевите од внатрешниот триаголник е еднаква на 52, двојниот збир на броевите при врвовите на разгледуваниот триаголник е 78-52=26, па значи тој збир е 13. Тоа важи за секој од двата големи триаголници. Имајќи го предвид овој заклучок можеме полесно да ја определиме бараната ѕвезда. Освен тоа, броевите 11 и 12 не можат да стојат на некој врв од ѕвездата бидејќи во тој случај збирот на броевите при врвовите на соодветниот триаголник ќе биде поголем или еднаков на $11+1+2=14>13$. Така се наоѓа дека едно решение на задачата е дадено на горниот цртеж.

III ПОЛЕСНО, ПОТЕШКО

Во оваа глава ќе се задржиме на задачи во кои со најмал број мерења треба да се оддели предмет кој има помала или поголема маса од други на изглед еднакви предмети. Исто така, ќе разгледаме и други интересни задачи кои се поврзани со определување на тежини и со мерење на течности.

Задача 01. *Од 8 топчиња, на изглед еднакви, едно е полесно од останатите. Колку најмалку мерења треба да извршите на вага со два таса (без тегови) за да го одделите полесното топче?*

Решение. Ако имаме 3 топчиња, тогаш ставајќи на тасовите по едно топче, во случај на рамнотежа ќе констатираме дека преостанатото топче е полесното. Ако нема рамнотежа, тогаш ќе се виде кое топче е полесно (тоа ќе биде на издигнатиот тас).

Бидејќи имаме 8 топчиња, ќе ги поделиме на групи од по 3, 3 и 2 топчиња. На тасовите од вагата ќе ставиме по три топчиња и така ќе констатираме во која група се наоѓа полесното топче - I мерење. Со уште едно мерење ќе констатираме кое е полесното топче во определената група - II мерење.

Според тоа, полесното топче можеме да го одделиме со најмалку две мерења. ■

Задача 02. *Располагаме со 9 наизглед еднакви топчиња, од кои едното е нешто полесно. Колку најмалку мерења треба да извршиме, на вага без тегови, за да констатираме кое топче е полесно?*

Решение. Треба да извршиме најмалку две мерења. Имено, топчињата ги поделиме на три групи од по три топчиња. Тогаш:

I мерење. Ставаме по три топчиња на секој тас од вагата и констатираме во која група припаѓа полесното топче. Ако на вагата има рамнотежа, тогаш полесното топче е во третата група.

II мерење. Од најдената група топчиња ставаме по едно топче на секој тас. Полесно е она топче на чија страна е подигнат тасот. Ако на вагата е рамнотежа, тогаш третото топче од групата е полесното топче. ■

Задача 03. *Во кутија се наоѓаат 27 топчиња кои се на изглед еднакви, но едно е полесно од останатите. Колку најмалку мерења треба да се извршат, на вага без тегови, за да се одреди кое топче е полесно?*

Решение. Треба да се извршат најмалку три мерења. Најпрво топчињата треба да ги распределиме во три групи од по девет топчиња и со едно мерење да констатираме во која група се наоѓа полесното топче. Потоа со останатите две мерења постапката е иста како и во претходната задача. ■

Задача 04. *Од 77 топчиња, на изглед сосема еднакви, едно е малку полесно од останатите. Како ќе го пронајдете полесното топче вршејќи најмногу четири мерења на вага со два таса (без тегови)? Постапката да се образложи.*

Решение. Сите топчиња ќе ги поделиме во три групи: 27, 27 и 23.

I мерење. На тасовите од вагата ќе ставиме по 27 топчиња и веднаш ќе констатираме во која група се наоѓа полесното топче, т.е. дали тоа е меѓу 27 топчиња на левиот тас или меѓу 27 топчиња на десниот тас или меѓу останатите 23 топчиња.

Ако полесното топче е во некоја од групите со 27 топчиња, тогаш постапката ја продолжуваме според задача 03 и потребни ни се уште три мерења.

Ако полесното топче е во групата со 23 топчиња, тогаш од било која од останатите две групи кон оваа група додаваме 4 топчиња и за добиената група од 27 топчиња, меѓу кои се наоѓа и полесното топче, повторно ја применуваме постапката од задача 03. ■

Задача 05. *Од 20 топчиња, на изглед сите еднакви, едно е полесно. Колку најмалку мерења ни се потребни, на вага без тегови за да констатираме кое топче е полесно?*

Решение. Потебни се најмалку три мерења. Постапката е следната:

I мерење. Ставаме на обата таса по 7 топчиња. Ако на вагата е неисправно топче тогаш соодветниот тас ќе се подигне. Ако е воспоставена рамнотежа, тогаш неисправното топче е помеѓу останатите 6. Во секој случај отфрламе 14 или 13 топчиња.

II мерење. Од избраните 6 или 7 топчиња, ставаме по три на секој тас. Размислувајќи како при првото мерење ќе избереме 3 топчиња меѓу кои е неисправното. Притоа, ако имаме 7 топчиња и рамнотежа, тогаш во ова мерење го добиваме неисправното топче.

III мерење. Ставаме по едно топче, од избраните три и го добиваме неисправното топче. ■

Забелешка. Ако се дадени n наизглед еднакви топчиња од кои едно е полесно при што $3^{k-1}<n\leq 3^{k}$, тогаш може да се докаже

дека се потребни најмалку k мерења на вага (без тегови) за да се најде полесното топче.

Задача 06. *Во кутија се наоѓаат четири топчиња на изглед еднакви, но едно има различна маса од останатите три. Колку мерења ни се потребни за да се најде топчето со различна маса? Да се определи дали тоа топче е полесно или потешко.*

Решение. Да ги означиме топчињата со T_1, T_2, T_3, T_4 и најпрво да ги споредиме топчињата T_1 и T_2. Можни се следните случаи:

-Ако е $T_1=T_2$, тогаш се T_1 и T_2 исправни топчиња и ги споредуваме T_3 и T_1. Ако е $T_3=T_1$, тогаш неисправно е топчето T_4, а дали е полесно или потешко констатираме со третото мерење. Ако $T_3>T_1$, тогаш неисправно е топчето T_3 и T_3 е потешко. Ако $T_3<T_1$, тогаш неисправно е топчето T_3 и T_3 е полесно.

-Ако е $T_1>T_2$, тогаш исправни се топчињата T_3 и T_4, па ги споредуваме T_3 и T_1. Ако е $T_3=T_1$, тогаш T_2 е полесно топче. Ако е $T_3<T_1$, тогаш T_1 е потешко топче.

-Ако е $T_1<T_2$, тогаш исправни се топчињата T_3 и T_4, па ги споредуваме T_3 и T_1. Ако е $T_3=T_1$, тогаш T_2 е потешко топче. Ако е $T_1<T_3$, тогаш T_1 е полесно топче.

Значи за да се најде топчето со различна маса потребни се најмалку две мерења, а за да се определи дали тоа е потешко или полесно, потребни се три мерења. ■

Задача 07*. *Од 6 на изглед еднакви топчиња едно нема иста маса како останатите. Колку најмалку мерења ни се потребни за да се најде топчето со различна маса? Да се определи дали топчето со различна маса е потешко или полесно.*

Решение. Потребни се најмалку три мерења. Да ги означиме топчињата со $T_1, T_2, T_3, S_1, S_2, S_3$.

I мерење. Ставаме T_1, T_2 на левиот и S_1, S_2 на десниот тас. Ако е постигната рамнотежа, тогаш топчето со различна маса е или T_3 или S_3. Во следните две мерења ги споредуваме T_3 и S_3 со едно од останатите 4 топчиња. Ако едниот тас, на пример левиот, натежнал, тогаш едно од T_1, T_2 е потешко или едно од топчињата S_1, S_2 е полесно.

II мерење. Ги отстрануваме T_2 и S_2 од вагата, го префрламе T_1 на десниот и на левиот тас ги ставаме топчињата T_3 и S_3.

III мерење. Ако натежне десниот тас тогаш топчето T_1 е потешко. Ако натежне левиот тас, тогаш топчето S_1 е полесно. Ако во второто мерење е воспоставена рамнотежа, тогаш неисправно е T_2 или S_2, па доволно е едно од овие топчиња да го споредиме со едно од останатите 4 топчиња. ■

Задача 08.* *Од 8 топчиња, еднакви по изглед, едно има различна маса од останатите. Колку најмалку мерења ни се потребни за да констатираме кое топче има различна маса? Да се определи дали топчето со различна маса е потешко или полесно.*

Решение. Да ги означиме топчињата со $T_1, T_2, T_3, T_4, S_1, S_2, S_3, S_4$.

I мерење. Ставаме T_1, T_2, T_3 на левиот и S_1, S_2, S_3 на десниот тас. Ако е на вагата рамнотежа, тогаш во следните две мерења го споредуваме T_4, па S_4 со едно од шесте измерени топчиља со еднаква маса. На тој начин констатираме кое топче е полесно, односно потешко. Ако не сме добиле рамнотежа, тогаш едната страна на вагата претежнала. Нека претпоставиме дека тоа е левата страна. Тогаш едно од топчињата T_1, T_2, T_3 е потешко или едно од топчињата S_1, S_2, S_3 е полесно.

II мерење. Ги отстрануваме T_3 и S_3 од вагата, T_2 го преместуваме на десната страна, а на левата страна заедно со T_1 ги ставаме исправните топчиња T_4 и S_4.

III мерење. Ако натежне десната страна, тогаш T_2 е потешкото топче. Ако натежне левата страна тогаш или T_1 е потешко или едно од топчињата S_1 и S_2 е полесно, па треба да ги споредиме S_1 и S_2. Ако во второто мерење е воспоставена рамнотежа, тогаш неисправно топче е или T_3 или S_3, па доволно е едно од топчињата да споредиме со едно од останатите шест исправни топчиња.

Според тоа, за да констатираме кое топче има различна маса и е полесно или потешко, потребни се најмалку три мерења.■

Задача 09.* *Колку најмалку мерења на вага се потребни за да од 12 топчиња, на изглед потполно еднакви но едно е со различна маса, констатираме кое топче е неисправно? Дали топчето е полесно или потешко?*

Решение. Потребни се најмалку три мерења. Постапката е следната. Ги означуваме топчињата со $T_1, T_2, T_3, T_4, S_1, S_2, S_3, S_4$, M_1, M_2, M_3, M_4 и ги вршиме следните мерења:

I мерење. Ги ставаме на левата страна топчињата T_1, T_2, T_3, T_4, а на десната страна топчињата S_1, S_2, S_3, S_4.

II мерење. (а) Ако при првото мерење е воспоставена рамнотежа, ставаме M_1 и M_2 на левиот, а T_1 и M_3 на десниот тас. Понатаму постапуваме како во соодветниот случај со 4 топчиња (види задача 06).

(б) Ако претежне едната страна, да кажеме левата, тогаш или едно од топчињата T_1, T_2, T_3, T_4 е потешко, или едно од топчињата S_1, S_2, S_3, S_4 е полесно. Тогаш ги отстрануваме топчињата T_4 и S_4 од вагата, S_3 го префрлуваме на левиот тас, а T_1 и T_2 на десниот. На левиот тас ги ставаме топчињата M_1 и M_2.

III мерење. Размислувајќи слично како во случајот со 8 топчиња, во третото мерење лесно можеме да констатираме кое топче е дефектно и дали е потешко или полесно.

Со горните заклучувања се определува и дали топчето е полесно или потешко. ■

Задача 10*. *Во 10 пакети се наоѓаат затворени пакувања со кафе. Знаеме дека 9 пакети се наполнети со пакувања од 100 гр, а еден пакет со пакувања од 90 гр кафе. Колку најмалку мерења, со вага која мери тежини, се потребни за да констатираме во кој пакет се пакувањата од 90 гр, ако можеме да ги вадиме поединечните пакувања од пакетите? (Притоа измерените тежини се во бруто износ, т.е. пакувањата се мерени заедно со кесата за пакување.)*

Решение. Пакетите ќе ги означиме со броевите од 1 до 10. Потоа, на вагата ќе ставиме едно пакување од првиот пакет, две пакувања од вториот пакет, три пакувања од третиот пакет и т.н. десет пакувања од десеттиот пакет. Ако пакувањата содржеа сите по 100гр, тогаш вкупната тежина ќе беше 5500 гр. Врз база на измерената количина лесно можеме да констатираме во кој пакет се помалите пакувања. Имено, ако на пример сме измериле 5460 гр, тогаш недостасуваат 40 гр кафе, па значи полесните пакувања се од четвртиот пакет.

Значи потребно е најмалку едно мерење. ■

Задача 11*. *Златарата испорачала сребрени шипки во пакувања од по 17 парчиња, при што секоја шипка е тешка по 13 кгр. Констатирано е дека во еден од единаесетте пакети се испорачани шипки од по 12 кгр. Како со помош на само едно мерење на избаждарена вага ќе констатирате за кое пакување станува збор?*

Решение. Пакетите ќе ги нумерираме со броевите од 1 до 11. Од првиот пакет ќе земеме 1 шипка, од вториот пакет ќе земеме 2 шипки,..., од десеттиот пакет ќе земеме 10 шипки, а од единаесеттиот пакет нема да земеме ниедна шипка. Вкупниот број на земените шипки е 1+2+...+10=55 и ако се сите од по 13 кгр нивната тежина треба да биде 55•13=715 кгр. Ако е оваа тежина измерена, тогаш неисправни се шипките од единаесеттиот пакет. Во спротивно неисправното пакување го наоѓаме како во зад. 10. ■

Задача 12. *Млекарот Андон во кантата имал два и пол литри млеко. Костадинка сакала да купи литар и четврт, а Андон ја заборавил својата мерица од литар и четврт. Костадинка имала лонче од тричетврт литри и тенџере од литар и тричетврт. Тоа им послужило да измерат литар и четврт млеко за Костадинка.*

Како го направиле тоа?

Решение. Андон прво го наполнил тенџерето од $\frac{7}{4}$л, па од тенџерето го наполнил лончето од $\frac{3}{4}$л, од кое млекото веднаш го вратил во кантата. Во тенџерето останале $\frac{4}{4}$л. Повторно од тенџерето го наполнил лончето од $\frac{3}{4}$л, и овие $\frac{3}{4}$л ги турил во кантата. Во тенџерето останале $\frac{1}{4}$л, кои Андон ги преточил во лончето од $\frac{3}{4}$л. Тогаш од кантата повторно го наполнил тенџерето. После тоа од тенџерето го дополнил лончето во кое веќе имало $\frac{1}{4}$л, па така во тенџерето останале $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ литри млеко, колку што барала Костадинка. ■

Задача 13. *Симон продавал вино. На пазар понесол полна канта од 8 литри и две празни канти од 5 и 3 литри. Првиот купувач побарал 4 литри вино. Помогнете му на Симон да измери 4 литри со помош на кантите кои ги понесол на пазар?*

Решение. Решението е дадено во следната табела

канта	п р е л е в а њ а							
8	8	3	3	6	6	1	1	4
5	0	5	2	2	0	5	4	4
3	0	0	3	0	2	2	3	0

Друго решение на проблемот е дадено во следната табела

канта	п р е л е в а њ а								
8	8	5	5	2	2	7	7	4	4
5	0	0	3	3	5	0	1	1	4
3	0	3	0	3	1	1	0	3	0

. ■

Задача 14*. *Во пет грниња се наоѓаат златници. Во секое од нив сите златници се со иста тежина: 5 гр или 6 гр. На изглед златниците не се разликуваат. Како можеме со помош на само едно мерење да констатираме со која тежина се златниците во сите грниња?*

Решение. Грнињата да ги означиме со броевите 1,2,3,4,5.

Потоа, од првото грне земаме еден златник ($2^0=1$), од второто 2 златници ($2^1=2$), од третото 4 ($2^2=4$), од четвртото 8 ($2^3=8$), од петтото 16 ($2^4=16$), вкупно 31 златник. Од вкупно измерената тежина ќе одземеме 155 гр (тоа е $31 \cdot 5$ гр) и добиената разлика ќе ја изразиме во бинарен броен систем (систем со основа 2, во кој $1=1_2$, $2=10_2$, $3=11_2$, $4=100_2$, $5=101_2$, $6=110_2$, $7=111_2$, $8=1000_2$, и т.н). Секоја цифра на овој бинарен број, која е различна од нула, покажува во кое грне се златниците со тежина од 6 гр, и тоа на грнињата означени со броевите 1,2,3,4,5, соодветствуваат цифрите на бинарниот број земени од десно на лево.

На пример, ако потешките златници се наоѓаат во грнињата 2,4 и 5, тогаш измерената тежина ќе биде 181 гр, што е за 26 гр. повеќе од 155 гр. Бројот 26 во бинарен броен систем има запис 11010_2, па цифрата 1 се наоѓа на второто, четвртото и петтото место од десно. ■

Задача 15*. *Кузман, кој за себе тврди дека е "читач на мисли", пред своите другари Пејо, Марко и Наум тоа го потврдува на следниот начин:*

-Пред вас се 5 квадрати со по 16 полиња. Во секое поле е запишан по еден број. Изберете еден број и кажете во кои квадрати тој број се наоѓа, а јас моментално, без да ги гледам квадратите ќе ви го погодам избраниот број.

1	9	17	25
3	11	19	27
5	13	21	29
7	15	23	31

I

2	10	18	26
3	11	19	27
6	14	22	30
7	15	23	31

II

4	12	20	28
5	13	21	29
6	14	22	30
7	15	23	31

III

8	12	24	28
9	13	25	29
10	14	26	30
11	15	27	31

IV

16	20	24	28
17	21	25	29
18	22	26	30
19	23	27	31

V

Другарите ги погледнуваат квадратите и соопштуваат дека бројот се наоѓа во вториот, третиот и петтиот квадрат, на што Кузман без размислување одговара дека замислениот број е 22.

Дали Кузман е навистина "читач на мисли" или пак успеал да ги запамти сите квадрати, кога толку брзо го погодува замислениот број?

Решение. Јасно, Кузман не е "читач на мисли", ниту пак има потреба да ги памти сите квадрати за да го погоди замислениот број. Вештината на неговото погодување се состои во следното:

Броевите запишани во петте таблици се природните броеви од 1 до 31, чии записи во бинарен броен систем се

$1=1_2$, $2=10_2$, $3=11_2$, $4=100_2$, $5=101_2$, $6=110_2$, $7=111_2$,

$8=1000_2$, $9=1001_2$, $10=1010_2$, $11=1011_2$, $12=1100_2$,

$13=1101_2$, $14=1110_2$, $15=1111_2$, $16=10000_2$, $17=10001_2$,

$18=10010_2$, $19=10011_2$, $20=10100_2$, $21=10101_2$, $22=10110_2$,

$23=10111_2$, $24=11000_2$, $25=11001_2$, $26=11010_2$, $27=11011_2$,

$28=11100_2$, $29=11101_2$, $30=11110_2$ и $31=11111_2$.

Ако ги анализираме понудените таблици ќе забележиме дека секој од дадените броеви се наоѓа во оние таблици кои соодветствуваат на местата на единиците во бинарниот запис на бројот сметајќи од десно кон лево. На пример, бројот 22 се наоѓа во таблиците II, III, V и

$$22=10110_2=0\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2^2+0\cdot 2^3+1\cdot 2^4,$$

па затоа Кузман ги собира броевите 2, $4=2^2$ и $16=2^4$.

Слично, ако му се соопштени квадратите I, III и IV, тогаш Кузман само ќе ги собере броевите 1, $4=2^2$ и $8=2^3$ и ќе го погоди замислениот број 13. ∎

Задача 16*. *а) Докажи дека секој цел број* n *може на единствен начин да се запише во облик*

$$n = a_o + a_1 3^1 + a_2 3^2 + \dots + a_k 3^k$$

каде $a_o, a_1, a_2, \dots, a_k \in \{-1, 0, 1\}$.

б) Еден трговец има вага и тегови со маса од 1*кг*, 3*кг*, 9*кг и* 27*кг*. *Докажи дека тој може само со тие тегови да ја измери секоја маса од* 1*кг*, 2*кг*, 3*кг*, ..., 40*кг*.

Решение. а) Секој природен број може еднозначно да се запише во облик

$$n = b_o + b_1 3^1 + b_2 3^2 + \dots + b_k 3^k$$

каде $b_0, \dots, b_k \in \{0, 1, 2\}$. Природниот број $n+1+3+3^2+\dots+3^k$ да го запишеме во тој облик. Нека

$$n+1+3+3^2+\dots+3^k = c_o + c_1 3^1 + c_2 3^2 + \dots + c_{k+1} 3^{k+1}$$

каде $c_o, c_1, c_2, \dots, c_k \in \{0, 1, 2\}$ а $c_{k+1} \in \{0, 1\}$. Тогаш

$$n = (c_o-1) + (c_1-1)3 + (c_2-1)3^2 + \dots + (c_k-1)3^k + c_{k+1} 3^{k+1}$$

каде $(c_o-1), (c_1-1), (c_2-1), \dots, (c_k-1) \in \{-1, 0, 1\}$ и $c_{k+1} \in \{0, 1\}$.

Да претпоставиме сега дека бројот n може на два начини да се запише во споменатиот облик, т.е.

$$n = a_o + a_1 3^1 + a_2 3^2 + \dots + a_k 3^k$$

и

$$n = b_o + b_1 3^1 + b_2 3^2 + \dots + b_m 3^m,$$

каде $a_o, a_1, \dots, a_k, b_o, b_1, \dots, b_m \in \{-1,0,1\}$ и $a_k, b_m \neq 0$. Не се губи од општоста ако се претпостави дека $k \geq m$. Треба да докажеме дека $k=m$ и дека $a_o=b_o, \dots, a_k=b_k$.

Од последните две равенства добиваме дека

$$(a_o-b_o)+(a_1-b_1)3+(a_2-b_2)3^2+\dots+(a_m-b_m)3^m+a_{m+1}3^{m+1}+\dots+a_k 3^k = 0.$$

Затоа $3|(a_o-b_o)$. Но, како $a_o, b_o \in \{-1,0,1\}$, добиваме дека

$$(a_o-b_o) \in \{-2,-1,0,1,2\}.$$

Бидејќи $3|(a_o-b_o)$, добиваме дека $a_o-b_o=0$, т.е. $a_o=b_o$. Ако претходното равенство сега го поделиме со 3 добиваме

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)3+ \dots +(a_m-b_m)3^{m-1}+a_{m+1}3^m+ \dots +a_k 3^{k-1} = 0.$$

Продолжувајќи со истите заклучувања добиваме

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \dots,\ a_m=b_m.$$

Од овде потоа се добива дека

$$a_{m+1}+a_{m+2}3+ \dots +a_k 3^{k-m-1} = 0$$

од каде следи дека $a_{m+1}=a_{m+2}= \dots =a_k=0$. Но по претпоставка $a_k \neq 0$, па тоа е можно само ако е $k=m$. Со тоа доказот под а) е комплетиран.

б) Нека е дадена маса од n кг, $n \in \{1,2,\dots,40\}$. Бројот n го запишуваме како

$$n = b_o + b_1 3^1 + b_2 3^2 + b_3 3^3$$

каде $b_o, b_1, b_2, b_3 \in \{-1,0,1\}$. Оние собирци со негативен знак ги префрлуваме од другата страна на равенството и на тој начин се добива равенство што треба да се воспостави на вагата. Притоа максималната маса што може да ја измери трговецот е

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40 \text{ кг.}$$

На пример ако е n=25, тогаш

$$25 = 1 - 3 + 3^3, \quad \text{т.е.} \quad 25 + 3 = 1 + 3^3,$$

па маса од 25 кг ќе се измери кога ќе се стават 3 кг од страната на масата, а на другата страна на вагата се стават теговите од 1 и 27 кг. ■

Забелешка. Аналогно се покажува дека со помош на три тега чии маси се 1, 3 и 9 кгр може да се измери било која маса помала од 14 кгр.

IV МАТЕМАТИЧКИ ИГРИ

Често пати сме доведени во состојба да избираме меѓу две понудени алтернативи и притоа едниот избор не доведува до "добивка", а другиот до "загуба". Затоа во вакви случаи е потребно да се изнајде постапка (стратегија) која сигурно ќе не доведува до "добивка". Задачите во кои се бара изнајдување на точно ваква стратегија се познати како математички игри и истите ќе бидат предмет на разгледување во оваа глава.

Задача 01. *Билјана и Деспина ја играат следната игра. Билјана кажува еден природен број кој не е поголем од* 10. *Деспина на овој број му додава природен број, кој не е поголем од* 10 *и го кажува добиениот збир. Така наизменично додаваат на претходниот број броеви кои не се поголеми од* 10. *Победник е таа која ќе каже* 100.

Дали постои начин Билјана постојано да победува?

Решение. Јасно е дека победник е оној кој ќе го каже бројот 89, бидејќи противникот може на овој број да му додаде најмалку 1, а најмногу 10. Така се добива збир помеѓу 90 и 99. Сега оној кој кажал 89 додавајќи соодветен број добива збир 100. Враќајќи се station наназад, гледаме дека збирот 89 ќе го соопшти оној играч кој претходно соопшти 78, и т.н. Значи, оној кој игра прв може да ја добие секоја партија ако прво го соопшти бројот 1, а после додавање на број од страна на противникот, го дополнува збирот до 12,23,34,45,56,67,78 и 89. Според тоа, ако Билјана игра прва, тогаш постои начин да ја добие секоја партија. ■

Задача 02.* *Во три кутии* A,B *и* C *се наоѓаат топчиња и тоа: во кутијата* A *се* 2, *во кутијата* B *се* 3 *и во кутијата* C *се* 4 *топчиња. Двајца играчи ја играат следната игра: наизменично земаат од произволна кутија произволен број топчиња. Победник е оној играч после чие земање сите кутии остануваат празни.*

Како треба да игра првиот играч за сигурно да го победи својот противник?

Решение. Првиот играч треба да земе три топчиња од кутијата C, така што после неговиот прв потез во кутиите остануваат 2,3 и 1 топче. Понатаму, како и да постапи вториот играч, со вториот потез првиот играч секогаш може да обезбеди едната кутија да е празна, а во останатите две кутии да останат еднаков број на топчиња, што му обезбедува да ја добие играта. ∎

Задача 03. *На масата имаме 15 монети. Првиот играч зема 1, 2 или 3 монети. Потоа вториот играч зема 1,2 или 3 монети и т.н. додека се земат сите монети. Играта ја губи оној играч, кој треба да земе последен. Кој играч може да ја добие играта и со која стратегија?*

Решение. Играта ја добива оној играч кој на противникот ќе му остави 1, 5, 9, 13 монети на масата. Очигледно тоа е првиот играч кој во првиот потез треба да земе две монети, а потоа во секој следен потез треба да зема 1, 2 или 3 монети во зависност од тоа дали вториот играч зел 3, 2 или 1 монета. ∎

Задача 04. *На масата има две купчиња со еднаков број камчиња, при што во секое купче има повеќе од едно камче. Рампо избира едно од купчињата и зема од избраното купче едно или повеќе камчиња. Методија исто така избира едно од купчињата и зема едно или неколку камчиња и т.н. Играта ја губи оној играч кој треба да земе последен. Дали постои стратегија (начин) со која Методија секогаш ја добива играта?*

Решение. Да, таква стратегија постои. Имено, ако при првото земање Рампо ги земе сите камчиња од избраното купче, тогаш Методија од другото купче остава само едно камче и така ја добива играта. Ако пак при првото земање Рампо остави само едно камче, тогаш Методија од другото купче ги зема сите камчиња и така ја добива играта. Во случај кога Рампо во избраното купче остава повеќе од едно камче, Методија го избира купчето од кое не зел Рампо и зема онолку камчиња колку што зел Рампо од другото купче, така што во двете купчиња повторно има еднаков број на камчиња. Со оваа стратегија Методија продолжува да игра до крај. ∎

Задача 05. *На масата имаме две купчиња со различен број камчиња, при што во секое купче имаме повеќе од две камчиња. Илија избира едно од купчињата и зема од избраното купче едно или повеќе камчиња. Костадин исто така избира едно од купчињата и зема едно или неколку камчиња и т.н. Играта ја губи оној играч кој треба да земе последен. Дали постои стратегија (начин) со која Илија секогаш ја добива играта?*

Решение. Да, таква стратегија постои. Истата се состои во следното. При првото земање Илија го избира поголемото купче и зема камчиња така што, во двете купчиња остане ист број камчиња. Понатаму ја спроведува стратегијата од задача 04. ∎

Задача 06*. *Јасна и Маја ја играат следната игра: од две купчиња со камчиња Јасна го зема едното, а другото произволно го разделува на две купчиња. Маја зема едно од двете нови купчиња, а другото произволно го разделува на две нови купчиња и т.н. Играта ја губи онаа која не може да го подели преостанатото купче. Во кој случај со вистинска стратегија играта ја добива Јасна, а во кој случај Маја? Која е стратегијата?*

Решение. Ако барем едно купче е "парно", тогаш тоа купче Јасна ќе го раздели на две "непарни" купчиња. Маја избирајќи го едното од тие купчиња, другото купче ќе го раздели на "парно" и "непарно". Сега, одново Јасна ќе го избере "непарното" купче, а "парното" ќе го раздели на две непарни и т.н. се до последниот потез на Маја, на која ќе и останат две купчиња со по едно камче, кои се разбира не може да се поделат, па затоа Маја ја губи играта.

Кога и двете купчиња имаат непарен број камчиња, тогаш после првиот потез на Јасна, Маја е во позиција да има на располагање "парно" и "непарно" купче, па затоа во овој случај Маја ја добива играта.

Значи, стратегијата во оваа игра е: на противникот да му оставите на располагање две "непарни" купчиња. ■

Задача 07*. *Трајан шетајќи по улица забележал една игра на среќа што се состои во следното. Еден кружен диск е поделен на десет еднакви дела, кои се означени со броевите* 1,2,...,10. *Гледачот кој сака да учествува во играта треба да плати извесна сума на пари по своја желба. Тој завртува едно топче во круг, па ако топчето застане кај бројот* 10 *тогаш играчот добива двојно поголема сума на пари од таа што ја вложил. Во спротивен случај играчот ништо не добива.*

Со каква стратегија треба да игра Трајан за сигурно да има добивка, претпоставувајќи дека Трајан со себе носи пари во доволна количина, и дека по конечен број на завртувања топчето застанува кај бројот 10.

Решение. Едно од можните решенија е следното. Трајан најпрво вложува еден денар. Ако погоди 10 тогаш заработува 1 денар. Да претпоставиме дека при првата проба Трајан губи. Вториот пат Трајан вложува 2 денари. Ако погоди 10 тој ќе добие 4 денари а вложил 2+1=3 денари, па заработува 1 денар. Да претпоставиме дека и вториот пат Трајан губи. Третиот пат Трајан вложува 4 денари (двојно повеќе од претходниот пат). Ако погоди 10 тогаш тој ќе добие 8 денари а вложил вкупно 1+2+4=7 денари, па еден денар е во добивка. Трајан ја продолжува играта вложувајќи понатаму $8=2^3$, $16=2^4$, $32=2^5$,... денари, и игра се додека не добие погодок. Тоа ќе се постигне после конечен број на проби, и на крај ќе заработи еден денар. Навистина ако тој игра n пати, тој вложил

$$1+2+2^2+\ \dots\ +2^n = (2-1)(1+2+2^2+\ \dots\ +2^n) = 2^{n+1}-1$$

денари, а ќе добие 2^{n+1} денари, па 1 денар е во добивка.

Други можни решенија се ако Трајан последователно вложува $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$ денари, или $1, 4, 4^2, 4^3, 4^4, \ldots$ денари и т.н. Во овие случаи заработката е далеку поголема, но затоа пак Трајан треба да носи со себе голема сума на пари. ■

Задача 08. *Двајца играчи поставуваат еднакви монети на тркалезна маса, редејќи ги една до друга. Играта ја губи оној играч, за кој не останува место да постави монета на масата. Дали постои стратегија за сигурно добивање на играта, за кој играч и каква е таа стратегија? Што станува ако масата е правоаголна?*

Решение. Играта секогаш ја добива играчот кој ја поставува првата монета. Притоа доволно е да го покрие центарот на масата, а потоа монетите да ги поставува симетрично на монетите на првиот играч во однос на првата монета.

Во случај кога масата е правоаголна добива истата стратегија. ■

Задача 09.* *Марко им дава на гледачите 21 карта од кои треба да запомнат една од тие карти. Со цел да ја открие запомнатата карта, Марко ги реди карите последователно во три колони како што е тоа покажано на следната табела:*

1	2	3
4	5	6
7	8*	9*
10*	11*	12*
13*	14*	15
16	17	18
19	20	21

Гледачите се должни да кажат во која колона се наоѓа картата. Марко ги зема трите колони и назначената колона ја става во средина. Оваа постапка е повторена три пати. Како сега Марко ќе погоди која карта ја избрале гледачите?

Решение. Бараната карта се наоѓа во средина, па тоа е единаесеттата карта од почетокот односно од крајот. Образложението е следното.

После првиот чекор, кога Марко го става во средина купчето со бараната карта, тој знае дека таа карта се наоѓа помеѓу 8-то и 14-тото место. Кога по втор пат Марко ќе ги раздвои картите во три купчиња, назначените карти се означени со ѕвездички во горната табела. Кога соодветното купче Марко ќе го стави на средина, тој знае дека бараната карта има реден број 10, 11 или 12. Затоа бараната карта ќе мора да биде средната карта во првото, второто или во третото купче. Кога тоа купче по трет пат ќе го стави на средина, Марко знае дека бараната карта има реден број 11. Значи бараната карта постепено но сигурно се приближува кон средината.

Задачата може да се обопшти во случај на $(2k+1)(2n+1)$ карти, ако тие се распоредуваат во $2k+1$ купче. Ако соодветното купче се става во средина, тогаш после доволен број на чекори бараната карта секогаш ќе се наоѓа во средина, т.е. таа ќе биде $2kn+k+n+1$-та карта. ■

Задача 10. *Ангеле на присутните гледачи им го изведува следниот трик со цел шпил карти. Тој наизменично ги извршува следните два чекора. Една карта од почеток ја враќа на крај, а следната карта им ја покажува на гледачите и ја става на страна. Притоа гледачите ќе ги видат сите 52 карти подредени и по боја и по големина, односно во даден редослед.*

На кој начин Ангеле ги подредува картите пред да излезе пред гледачите?

Решение. Ангеле најпрво ги подредува картите во оној редослед по кој сака гледачите да ги видат картите. Потоа целиот трик го прави но во обратен редослед. Обидете се и самите тоа да го направите. ■

Задача 11. *На шаховската табла белиот скокач - означен со ⊖, треба да ја земе црната фигура - означена со ■, а потоа да се врати на почетната положба, но не по истиот пат по кој дошол до фигурата ■. Освен тоа не е дозволено да се движи по полињата означени со *. Одредете ја патеката по која треба да се движи белиот скокач.*

	*	*	*			*	*
*	*	*	*				*
					1		2
		*	*	*	*	*	*
		*	*	*	*	⊖	*
	■	*	*	4	*		
		*			3		*
*		*			*		

(Познато е дека скокачот на шаховската табла прави скокови во облик на буквата Г, т.е. две полиња во еден смер и едно поле во нормалниот смер, во една или друга насока. Така на цртежот со броевите 1,2,3 и 4 се обележени полињата на кои може да скокне нашиот скокач.)

Решение. На следниот цртеж со броевите 1,2,3, 4,5,6,7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16 и 17, се означени полињата по кои последователно се движи белиот скокач во извршување на поставената задача. Имено, тој во десеттиот скок ќе ја земе црната фигура, а во осумнаесеттиот потез ќе се врати на почетната положба. Да забележиме дека, притоа редоследот на

	** **	** **	** **	2	5	** **	** **
** **	** **	** **	** **	7	16	3	** **
		8	15	4	1	6	17
9	14	** **	** **	** **	** **	** **	** **
		** **	** **	** **	** **	⊖	** **
13	■ 10	** **	** **		** **		
		** **	11				** **
** **	12	** **			** **		

потезите може да биде и обратен т.е. според ознаките на цртежот скокачот може да се движи последователно и по полињата 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 и 1, при што само ќе се промени редоследот на потегот во кој ќе биде земена црната фигура. ∎

Задача 12.* *На сите црни полиња од првите шест редици на шаховската табла се наоѓаат пешаци (цртеж десно). Во секој потез еден пешак прескокнува соседен по дијагонала, пешак и со тоа се поместува за две полиња дијагонално, а прескокнатиот пешак се отстранува од шаховската табла. Дали може да се игра така што после извесен број потези на на таблата да остане само еден пешак?*

x		x		x		x	
	x		x		x		x
x		x		x		x	
	x		x		x		x
x		x		x		x	
	x		x		x		x

Решение. Најпрво да забележиме дека, според условот на задачата, потез во оваа игра може да се одигра само ако имаме два пешака во соседни редици.

На почетокот хоризонталните редици на шаховската табла да ги поделиме во три класи, така што во првата класа да припаѓаат првиот, четвртиот и седмиот ред, во втората класа да припаѓаат вториот, петтиот и осмиот ред и на третата класа да припаѓаат третиот и шестиот ред. Забележуваме дека на почетокот во секоја класа има по 8 пешаци. При првиот потез бројот на пешаците од втората и третата класа се намалува за еден, а во првата класа бројот на пешаците се зголемува за еден. Според тоа, при првиот потез се менува парноста на бројот на пешаците во секоја класа.

								2
								1
x		x		x		x		3
	x		x		x		x	2
x		x		x		x		1
	x		x		x		x	3
x		x		x		x		2
	x		x		x		x	1

Но, парноста на бројот на пешаците во секоја класа се менува после секој потез. Навистина, во секој потез се менува за еден бројот на пешаците во три соседни реда (во два од тие редови се одзема по еден пешак, а во третиот ред се додава еден пешак), а три соседни редови припаѓаат на различни класи. Освен тоа, со секој нареден потез бројот на пешаците се намалува за еден. После секој потез на таблата во секоја класа ќе има или парен број или непарен број на пешаци. Затоа било како да се игра не е можно на таблата да се добие 1 (непарен број) пешак во некоја класа и ниеден пешак (парен број) во останатите две класи. ∎

Задача 13. *Во еден квадрат 2x2 се сместени три единечни квадратчиња означени со броевите* 1, 2 *и* 3, *а едно поле е празно, како што тоа е претставено на табелата*

1	2
3	

. Секој од

трите единечни квадрати може да се помести по хоризонтала или по вертикала доколку соседното поле е празно. После конечен број на чекори која од следните шест конфигурации

1)

1	2
3	

2)

2	1
3	

3)

2	3
1	

4)

3	2
1	

5)

3	1
2	

6)

1	3
2	

може да биде добиена, а која не може да се добие.

Решение. Четирите полиња да ги означиме со x, y, z и t и да разгледаме една (кружна) орбита која циклично ги поврзува овие четири полиња како што е тоа покажано на следната табела

$$\begin{array}{ccc} x & \rightarrow & y \\ \uparrow & & \downarrow \\ t & \leftarrow & z \end{array}$$

За циклите xyzt, yztx, ztxy и txyz ќе велиме дека се исти. Ако броевите x, y, z и t ги замениме со соодветните бројки, а едното поле е празно, добиваме цикли од броевите 1, 2 и 3. Забележуваме дека со секој чекор (поместување по хоризонтала или вертикала) циклот од полињата xyzt односно од броевите 1, 2 и 3 останува непроменет. Значи само циклите од броевите 1, 2 и 3 т.е. 123, 231 и 312 ги даваат оние конфигурации кои можат да се добијат, а тие конфигурации се претставени со реден број 1), 3) и 5). Останатите три конфигурации 2), 4) и 6) не може да се добијат. Во тоа пробајте и практично да се уверите!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

табела А

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

табела Б

Забелешка. Претходната задача претставува упростување на играта наречена "такен". Во играта такен е даден правоаголник 4x4 во кој се сместени 15 единечни квадратчиња нумерирани со броевите 1,2,...,15, а принципот на поместување по хоризонтала и вертикала е ист. Ако почетната состојба е дадена на табела а), се поставува прашање кои конфигурации од неа можат да се добијат, а кои не. Оваа игра првпат се појавила на крајот од седумдесеттите гидини од деветнаесеттиот век во САД, а од таму таа брзо се проширила пред се во Европа, и била една од најпопуларните игри. Се организирале турнири на кои биле нудени огромни суми на пари на оној кој ќе успее од почетната конфигурација А да ја добие конфигурацијата од табела Б, која се состоела само во замена на броевите 14 и 15. Премијата не била доделена. Проблемот дефинитивно бил решен во 1880 година кога математички било докажано дека само половина од сите можни конфигурации можат да се добијат а останатите не можат. Во тој доказ нема да навлегуваме бидејќи ги надминува рамките на знаењата на учениците за кои оваа книга е наменета, а се базира на таканаречените парни и непарни пермутации. ■

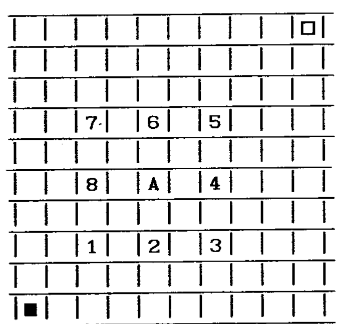
V БОЕЊЕ И ПОКРИВАЊЕ

Во оваа глава ќе ги разгледуваме задачите со боење, при што најчесто ќе го користиме боењето во една боја. При решавањето нема секогаш да зборуваме за боење, туку ќе користиме означување на некои полиња со знакот x, што е исто како да сме обоиле група полиња во една боја. Притоа за боење во повеќе бои може да користиме означувања со повеќе знаци, на пример А, В, С и т.н.

Задача 01. *Дали може на квадратна црно-бела шаховска табла од 64 полиња со скокач да се стигне од долниот лев агол во десниот горен агол, така да претходно помине по еднаш низ секое од останатите полиња на шаховската табла?*

Решение. Одговорот на поставеното прашање е негативен. Имено, при секој непарен број потези скокачот застанува на поле со спротивна боја, па затоа и во шеесет и третиот потез тој ќе се најде на поле спротивно обоено на почетното, а полињата на дијагоналата се исто обоени. ■

Задача 02. *На квадратна* 10x10 табла *во долниот лев агол се наоѓа една фигура (види цртеж). Оваа фигура може да скока хоризонтално и косо (паралелно со дијагоналата на квадратната табла) но така да секогаш го прескокнува најблиското поле во насоката на движењето. Така на пример, од положбата* А *на цртежот таа може да скокне на секое од полињата означени со броевите од* 1 *до* 8.



Дали може оваа фигура, скокајќи на опишаниот начин произволен број пати, да стигне во горниот десен агол на таблата?

Решение. Како и да се движи разгледуваната фигура таа секогаш може да се најде само на одредени полиња од првиот, третиот, петтиот, седмиот и деветтиот ред (сметајќи одоздола). Според тоа никако не може да дојде на горниот ред, а со самото тоа не може да се најде и во горниот десен агол на табелата.

Да забележиме дека полињата по кои се движи фигурата на цртежот се означени со x. ■

									□
x		x		x		x		x	
x		x		x		x		x	
x		x		x		x		x	
x		x		x		x		x	
■		x		x		x		x	

Задача 03. *Дали може на квадратна шаховска табла од 64 полиња да се распоредат 5 дами така што сите полиња на таблата да бидат зафатени од дамите или да се нападнати од нив?*

Решение. Распоредот на дамите е можен и истиот е прикажан на цртежот десно. Јасно, притоа се задоволени сите услови на задачата. ■

				D			
	D						
			D				
D							
		D					

Задача 04. *Колку најмногу дами можат да се поставуваат на шаховска табла од 64 полиња, така да тие на се напаѓаат една со друга?*

Решение. Јасно е дека повеќе од осум дами не можат да се поставуваат на шаховската табла, бидејќи притоа две од нив ќе се наоѓаат во иста редица и ќе се напаѓаат една со друга. Следниот распоред покажува дека осум дами можат да се распоредат на шаховската табла да не се напаѓаат и тоа е најголемиот можен број. ■

					D		
		D					
						D	
	D						
							D
				D			
D							
			D				

Задача 05*. *Колку најмногу скокачи може да се распоредат на шаховска табла, така што тие меѓу себе не се напаѓаат?*

Решение. Ако на секое црно поле поставиме еден скокач, добиваме 32 скокачи на шаховската табла кои меѓу себе не се напаѓаат, бидејќи нападнати се само белите полиња. Значи бараниот број на скокачи е поголем или еднаков на 32. Меѓутоа ќе докажеме дека било како да поставиме 33 скокачи на шаховската табла, секогаш ќе постојат барем два скокачи кои се напаѓаат, од каде ќе следува дека бараниот број на скокачи е 32.

Шаховската табла ќе ја поделиме на 32 парови од полиња така што секој пар полиња да го презентира "скокот" на еден скокач. Така на пример гиземаме следните четири парови

(A1,B3); (A3,B1); (A2,B4) и (A4,B2).

B	y	t	x	z
A	x	z	y	t
	1	2	3	4

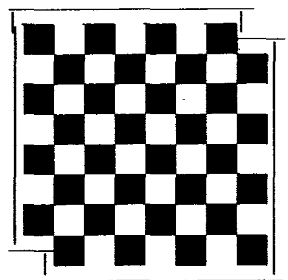
Овој процес на избирање на парови можеме да го продолжиме на тој начин што шаховската табла ќе ја разделиме на 8 правоаголници со димензија 4x2, а потоа секој таков правоаголник ќе го поделиме на четири пара како тоа беше направено пред малку. Сега било како да поставиме 33 скокачи на шаховската табла, сигурно во еден от тие 8 правоаголници ќе има барем 5 скокачи, па според тоа ќе постојат два скокачи кои ќе бидат на ист пар полиња. Значи тие два скокачи меѓусебно ќе се напаѓаат. ■

Задача 06*. *На шаховска табла распоредете 12 скокачи, така што тие ги напаѓаат сите полиња освен можеби оние на кои се наоѓаат.*

Решение. Решението на поставениот проблем е дадено на следниот цртеж. ■

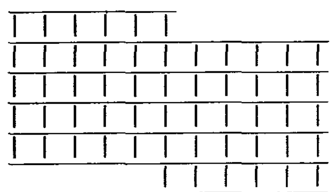
					S		
	S	S		S	S		
		S					
					S		
		S	S		S	S	
		S					

Задача 07. *Дали може шаховска табла од која се отстранети две дијагонални полиња да се покрие со правоаголници составени од по два квадрати?*



Решение. Две спротивни полиња на шаховската табла се обоени со иста боја. На цртежот се отстранети две бели полиња. Значи, без тие две полиња бројот на белите полиња нема да биде еднаков на бројот на црните полиња. При покривање со правоаголници составени од два квадрати се покрива едно бело и едно црно поле, односно ист број бели и црни полиња, па затоа бараното покривање не е можно. ■

Задача 08. *Дали две плочи 5x5, прилепени една до друга како на цртежот, можат да се покријат со домина 2x1 (едно домино покрива две соседни полиња)?*



Решение. Да обележиме дел од полињата на дадената фигура како на цртежот десно. Вкупниот број полиња е 50, при што имаме обележено 26 полиња со *.

*		*		*					
	*		*		*		*		*
*		*		*		*		*	
	*		*		*		*		*
*		*		*		*		*	
					*		*		*

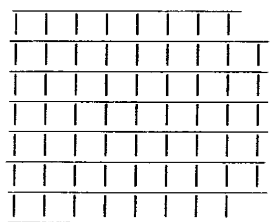
Бидејќи едно домино покрива едно обележено и едно необележено поле, за да може фигурата да се покрие потребно е да имаме ист број обележени и необележени полиња, што не е точно. Според тоа, бараното покривање не е можно. ■

Задача 09*. *Една 9x10 табла прво е покриена со домина 2x1, а потоа домината се измешани. Докажете дека таблицата не може повторно да се покрие со овие домина, така што секое домино кое во првото покривање било во хоризонтална положба во второто покривање е во вертикална положба и обратно.*

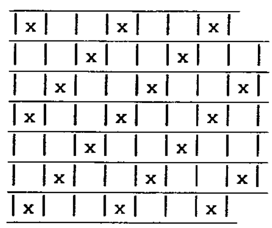
Решение. Да претпоставиме дека таблата е поставена така што има 10 (хоризонтални) редици и 9 (вертикални) колони. Вертикалните домина од првата колона покриваат парен број полиња, па затоа и бројот на полињата покриени со хоризонталните домина е парен. Овие домина покриваат значи парен број полиња од втората колона. Бидејќи и вертикалните домина од оваа колона покриваат парен број полиња, добиваме дека остануваат парен број полиња кои се покриени од домина кои "преминуваат" и на третата колона. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека вкупниот број на хоризонталните домина е парен. Бидејќи бројот на сите домина е 45, добиваме дека вкупниот број вертикални домина е непарен.

Меѓутоа, истите заклучоци важат и за другото покривање, па затоа потребно е бројот на хоризонталните домина да биде парен, што не е можно бидејќи сега хоризонтални се непарниот број вертикални домина од првото покривање. ∎

Задача 10. *Докажете дека следната фигура која е составена од 54 единични квадрати (полиња), не може да се покрие со правоаголници составени од 3 полиња.*

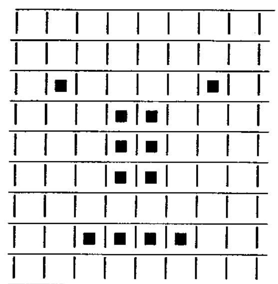


Решение. Нека претпоставиме дека дадената фигура може да се покрие со правоаголници составени од 3 полиња. Некои од полињата на оваа фигура ги означиме со x, како на цртежот долу десно.

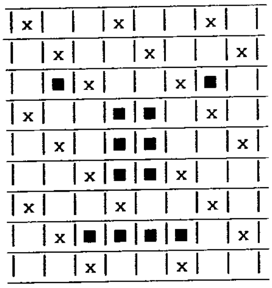


Бидејќи фигурата има 54 единични квадратчиња, таа ќе се покрие со 18 правоаголници. Притоа секој ваков правоаголник ќе содржи точно едно поле означено со x. Но, полиња означени со x имаме 19. Затоа споменатото покривање на дадената фигура не е можно. ∎

Задача 11. *Од правоаголна табела која се состои од 8x9 полиња (квадратчиња) исечени се 12 квадратчиња (на сликата десно тоа се црни квадратчиња). Докажете дека вака добиефигура од 60 квадратчиња не може да се разложи на правоаголници од по три квадратчиња, (или што е исто, дека не може да се покрие со правоаголници од*

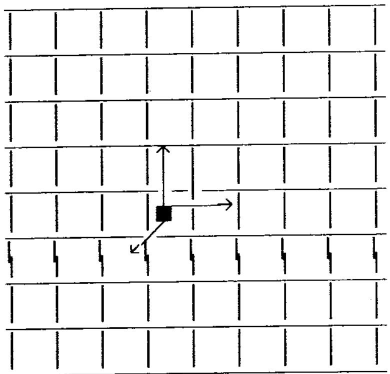


по три квадратчиња).



Решение. Да означиме некои квадратчиња на дадената фигура со знакот x, како на цртежот. Забележуваме дека означените квадратчиња се така избрани да секој правоаголник кој содржи три квадратчиња мора да содржи точно едно квадратче означено со x. Ако дадената фигура од 60 квадратчиња можеме да ја разложиме на правоаголници од по три квадратчиња, тогаш ќе добиеме 20 такви правоаголници. Меѓутоа, означени квадратчиња имаме 21, а не 20. Значи, спомнатото разложување не е можно. ■

Задача 12*. *Ќе наречеме делфин фигура која по шаховската табла се движи едно поле нагоре, едно поле надесно или едно поле дијагонално лево надолу (види цртеж). Дали може делфин, поаѓајќи од долниот лев агол на таблата, да помине точно еднаш на секое поле и потоа да се врати на појдовното поле?*



Решение. Да ги означиме со A, B и C полињата на шаховската табла, како на следниот цртеж. Од полето A во еден потег делфин може да дојде само во полето B, од B само во C и од C само во A. Значи, при секои три последователни движења на делфин, тој ги минува само полињата означени со буквите A, B и C. Според тоа, тој го минува патот

B	C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A	B
C	A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A	B
C	A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A	B

ABC ABC ABC ... .

За да се врати на почетното поле, делфин мора да мине низ 63 полиња и во 64-от потег да дојде на почетното поле A. Меѓутоа, тој на поле A може да дојде само после 3k потези, што значи дека делфин не може да ги мине сите полиња точно по еднаш и да се врати на почетното поле. ■

Задача 13*. *На шаховска табла да се обележат најмал број полиња така што, да бидат исполнети следните услови:*

(а) *меѓу обележаните полиња да нема соседни (соседни се* *оние, кои имаат заедничко теме или заедничка страна);*

(б) обележувањето на уште едно поле да го нарушува условот (а).

Посочете такво обележување и докажете дека не е можно да се обележат помал број полиња на шаховската табла така што да се исполнети условите на задачата.

Решение. Доволно е да обележиме 9 полиња, на пример како што е прикажано на следниот цртеж.

	x			x			x
	x			x			x
	x			x			x

Ќе докажеме дека не е можно да обележеме помалку од 9 полиња и при тоа да се исполнети условите на задачата. Да претпоставиме дека страната на секое поле на шаховската табла има должина еден. Нека секое од обележените полиња на цртежот е централно поле на квадрат со страна 3 (некои од тие квадрати излегуваат надвор од шаховската табла). Да допуштиме, дека постои комбинација од помалку од 9 обележени полиња, која ги задоволува условите на задачата. Тогаш барем во еден од квадратите со димензија 3x3 нема да има обележено поле. Да го обележиме централното поле од овој квадрат. Ова поле нема да има соседно ниедно од претходно обележените полиња, па значи нема да биде исполнет условот (б). Според тоа, бројот на обележените полиња не може да биде помал од 9. ■

Задача 14. *Во дадената таблица да се дополнат сите квадрати со по една од буквите С, Т, Е, В, А, Н и притоа буквите во секој ред, во секоја колона и на двете дијагонали да се различни.*

С	Т	Е	В	А	Н
Т	Е	С	Н		
Е	Н	А			

Решение. Решението на задачата е презентирано на следниот цртеж.

С	Т	Е	В	А	Н
Н	А	В	Е	Т	С
В	С	Т	А	Н	Е
Т	Е	С	Н	В	А
А	В	Н	С	Е	Т
Е	Н	А	Т	С	В

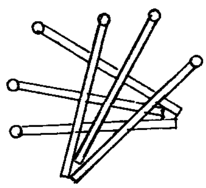
Забелешка. Дадената задача може да ја интерпретираме на следниот начин: При дадено почетно боење во шест бои да се заврши обојувањето на таблицата, така што боите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала да се различни. ■

VI ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

Во секојдневниот живот, често пати сме во прилика, врз основа на вистинити или невистинити информации, да донесуваме одлуки. Притоа, се наложува потреба донесените одлуки да бидат правилни, или математички речено да бидат логички. Во оваа глава ќе разгледаме неколку задачи, во кои ќе разгледуваме проблеми од овој вид, попознати како логички задачи. Во првиот дел ќе разгледуваме логички задачи за кои мислиме дека се "полесни", а во вториот дел ќе се задржиме на задачи за кои сметаме дека се малку потешки.

VI.1 ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ ЗА ЗАГРЕВАЊЕ

Задача 01. Шест чкорчиња од кибрит да се поставaт така што секое чкорче ги допира останатите пет чкорчиња.

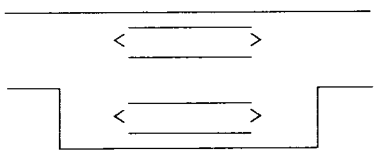


Решение. Решението на задачата е дадено на цртежот десно. ■

Задача 02. *Стојмен и Рајна бројат колку минувачи ќе поминат по тротоарот покрај нив за еден час. Стојмен стои пред влезната порта и ги брои минувачите кои му доаѓаат од обете страни, а Рајна шета лево-десно по тротоарот со иста брзина како и минувачите и ги брои минувачите со кои се разминува. Кој ќе изброи повеќе минувачи?*

Решение. И двајцата ќе избројат ист број минувачи. Всушност секој минувач кој ќе помине покрај Стојмен мора да се бразмине со Рајна, бидејќи неговата брзина не е поголема од брзината на Рајна, и освен тоа секој таков минувач само еднаш ќе се размине со Рајна бидејќи неговата брзина не е помала од брзината на Рајна. ■

Задача 03. *Низ еден канал пловат три брода "Аполон", "Беркли" и "Венеција" во еден правец. Во спротивен правец пловат трите брода "Галеб", "Охрид" и "Струга". Каналот е толку тесен што во него не може да се разминат два брода. Но за среќа во каналот има еден мал залив кој може да собере само еден брод (види го цртежот). Како ќе се разминат бродовите А, Б и В со бродовите Г, О и С?*



Решение. Најпрво бродот А ќе влезе во заливот, бродовите Б и В ќе се повлечат назад. Бродовите Г,О и С ќе се разминат со бродот А,а потоа бродот А слободно го продолжува патот. Бродовите Г, О и С се повлекуваат пред заливот. На аналоген начин како и бродот А, така и бродовите Б и В поединечно ќе се разминат со бродовите Г, О и С. ■

Задача 04. *Двајца возрасни луѓе и две деца треба да се превезат од еден на друг брег на една река. Како тоа ќе го направат, ако се знае дека сите умеат да веслаат и дека на располагање имаат чамец во кој можат да се сместат две деца или само еден возрасен човек?*

Решение. Најпрво на другиот брег ќе се префрлат двете деца, а едното ќе го врати чамецот назад. Потоа со чамецот ќе се превезе еден од возрасните, а другото дете ќе го врати чамецот назад. Сега повторно децата ќе се превезат на другиот брег и едно од нив ќе го врати чамецот назад, со кој ќе се превезе вториот возрасен човек. Конечно другото дете се враќа назад по својот другар и го превезува на другиот брег.

Да забележиме дека, вкупно имаме девет преминувања на реката во обете насоки. ■

Задача 05. *Ефтим тргнал на пазар и со себе понесол зелка, а повел коза и волк. Кога дошол до реката, затекнал чамец во кој со себе можел да ја понесе само зелката, или само козата, или само волкот. Но во негово отсуство козата ќе ја изеде зелката, а волкот ќе ја изеде козата. Како може Ефтим на другиот брег на реката да ги превезе и зелката и козата и волкот?*

Решение. Очигледно Ефтим смее заедно да ги остави само волкот и зелката, па затоа треба да постапи на следниот начин. Прво ќе ја пренесе козата и ќе се врати по волкот. Кога ќе го пренесе волкот ќе ја врати козата. Потоа ќе ја остави козата и ќе ја пренесе зелката. На крајот ќе се врати по козата. ■

Задача 06. *Тројца истражувачи имаат тројца водичи со човекојадни особини, кои се манифестираат кога водичите се во мнозинство. Треба да преминат преку река, при што на располагање им е чамец во кој можат да се превезат само двајца од нив. Како можат истражувачите безбедно да ја поминат реката?*

Решение. Можеме да претпоставиме дека групата се наоѓа на десниот брег на реката. Прво на левиот брег ќе се превезат двајца водичи, а потоа еден од нив ќе се врати и ќе го превезе и другиот водич. Еден од водичите ќе го врати чамецот на десниот брег, а двајца истражувачи ќе преминат на левиот брег. Назад, на десниот брег, се враќаат еден истражувач и еден водич, а потоа на левиот брег ќе се превезат останатите двајца истражувачи. Останатиот водич, кој е на левиот брег со истражувачите, на два пати ќе ги превезе останатите два водичи. ■

Задача 07. *Во секоја од три кутии* I, II *и* III *се наоѓа по едно топче: или бело, или црно, или зелено. На првата кутија пишува "бело", на втората "црно", а на третата "бело или зелено". Ако се знае дека натписите не соодветствуваат на вистината, одредете кое топче во која кутија е.*

Решение. Бидејќи во третата не е ни белото ни зеленото, следува дека во неа е црното топче. Во првата не е белото и не е црното топче па е зеленото, а во втората не е црното туку е белото топче. ■

Задача 08. *Пред вас се три исти кутии. Во едната од нив се наоѓаат 2 црни топчиња, во другата едно црно и едно бело топче, а во третата 2 бели топчиња. На капаците на кутиите пишува: прва-"две црни", втора-"две бели", трета-"црно и бело". Меѓутоа, се знае дека ниеден од натписите не одговара на вистината. Дали можете, без да гледате во кутијата, со извлекување на само едно топче од некоја од кутиите, врз основа само на неговата боја да одредите во која кутија се наоѓаат кои топчиња?*

Решение. Треба да извлечеме топче од третата кутија на која пишува "црно и бело". Имено, бидејќи натписот не одговара на вистината во оваа кутија ќе се наоѓаат истобојни точиња и со извлекувањето ќе одредиме кои топчиња се наоѓаат во оваа кутија. Ако извлеченото топче е бело, тогаш во кутијата се наоѓаат две бели топчиња. Сега во втората кутија ќе се наоѓаат две црни топчиња и во првата кутија ќе се наоѓаат црно и бело топче. Слично, ако извлечеме црно топче, тогаш во првата кутија се две бели, а во втората црно и бело топче. ■

Задача 09. *Славко со синот и Јордан со синот се на риболов. Славко уловил онолку риби колку што уловил и неговиот син, а Јордан уловил трипати повеќе од својот син. Вкупно се уловени 35 риби. Синот на Славко се вика Никола. Како се вика синот на Јордан?*

Решение. Ќе разгледаме два случаи:

(а) синот на Јордан не е Славко; и

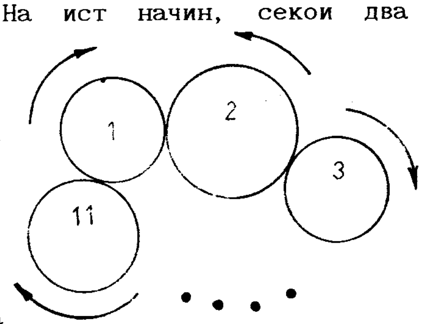
(б) синот на Јордан е Славко.

Во првиот случај, според условот на задачата, вкупниот број на уловените риби е $2x+4y$, т.е. уловени се парен број риби. Бидејќи 35 е непарен број добиваме противречност, од која следува дека Славко е син на Јордан. Значи, на риболов биле татко, син и внук, т.е. тројца и тие уловиле: Јордан 21, Славко 7 и Никола 7 риби. ■

Задача 10. *Во рамнина се сместени 11 запчаници, така што првиот е поврзан со вториот (вртејќи го првиот запчаник го вртиме и вториот), вториот е поврзан со третиот, третиот со четвртиот и т.н. Последниот, единаесеттиот, е поврзан со првиот запчаник.*

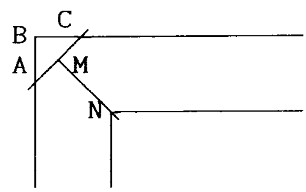
Дали може да се вртат запчаниците на овој систем и зошто?

Решение. На цртежот се прикажани првите три запчаници и последниот, единаесеттиот запчаник на дадениот систем. Нека првиот запчаник (означен со бројот 1) се врти во насоката на стрелката на часовникот. Вториот запчаник, движен од првиот ќе се врти во спротивната насока. На ист начин, секои два поврзани запчаници ќе се вртат во две спротивни насоки. Така третиот се врти во насока спротивна од насоката на вториот, односно во иста насока како и првиот запчаник. Во иста насока како и првиот запчаник се вртат сите непарни запчаници па значи и единаесеттиот, последен запчаник. Бидејќи последниот запчаник е поврзан со првиот, тој мора да се врти во спротивна насока во однос на првиот, што противречи на претходниот заклучок. Значи запчаниците на дадениот систем не можат да се вртат. ■



Задача 11. *Една нива во форма на правоаголник е опкружена од сите страни со ров кој има насекаде иста ширина еднаква на 5m. Треба да се конструира мост за премин преку ровот, а на располагање се дадени само две штици чија должина е еднаква на 4,9m. Како може да се конструира мостот?*

Решение. Решението е покажано на цртежот десно. Најпрво се поставува штица која ги поврзува точките A и C така што триаголникот ABC е правоаголен и рамностран со прав агол кај темето B и AC=4,8m. Нека M е средина на AC. Растојанието од точката N до точката M е



$$\overline{MN} = 5\cdot\sqrt{2}-2,4 < 5\cdot1,42-2,4 = 7,1-2,4 = 4,7 < 4,9.$$

Значи точките M и N можат да се поврзат со втората штица, и со тоа мостот е конструиран. ■

Задача 12. *Во рамнината е дадена кружница која е разделена на 12 еднакви поделци, а поделците се нумерирани со броевите од 1 до 12, како на рачен часовник.*

а) Да се раздели рамнината со една права така што збирот на броевите од едната и од другата страна на правата биде ист.

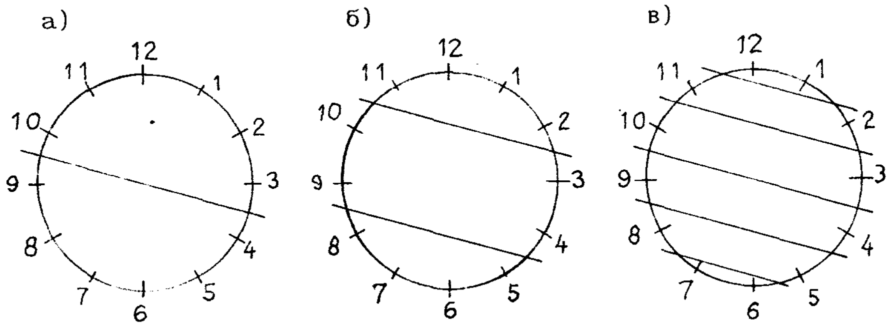
б) Да се подели рамнината со помош на две линии на 3 дела така што збирот на броевите во сите делови биде ист.

в) Да се подели рамнината со помош на пет линии на 6 дела така што збирот на броевите во сите делови биде ист.

Решение. Забележуваме дека

$$1+12 = 2+11 = 3+10 = 4+9 = 5+8 = 6+7.$$

Затоа во сите три случаи доволно е да се поставаат правите така што тие да се паралелни со правата која ги спојува првиот и дванаесеттиот поделок. На тој начин ги добиваме решенијата:



VI.2 ДОПОЛНИТЕЛНИ ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

Задача 01. *Брачните другари Маркоски, Илиоски и Златановски се натпреварувале во стрелаштво. Вкупно имале 1000 погодоци. Сопрузите биле подобри и имале 604 погодоци. Илиоски (Трајан) имал ист број погодоци како и неговата сопруга. Маркоски (Петар) имал еден и пол пати повеќе погодоци од својата сопруга, а Златановски (Крсте) имал два пати повеќе погодоци од својата сопруга. Од сопругите Анка била најдобра и имала 10 погодоци повеќе од Вида, која исто така имала 10 погодоци повеќе од Споменка. Одредете кој колку погодоци имал поодделно и кој кому е сопруг, односно супруга.*

Решение. Сопругите имале вкупно 1000-604=396 погодоци. Третина од тоа остварила Вида, т.е. 132 погодоци. Анка има 10 погодоци повеќе, т.е.142 погодоци, а Споменка има 10 погодоци помалку, т.е. 122 погодоци. Сега не е тешко да се констатира дека сопругот на Анка е Крсте Златановски, кој остварил два пати повеќе погодоци, а тоа е 284 погодоци. Сопругот на Вида е Петар Маркоски и тој остварил 198 погодоци и сопругот на Споменка е Трајан Илиоски и тој остварил 122 погодоци. ■

Задача 02.* *На училишната табла е напишан трицифрен број xy8. Три ученици ги погаѓаат особините на овој број.*

Зоран: Сите цифри му се парни и има парен број различни прости множители.

Душан: Делив е со 9 и претставува квадрат на некој природен број.

Никола: Помал е од 400 и е еднаков на производот на 13 со квадратот на некој природен број.

Определете кои цифри стојат на местата на x и y ако знаете дека, секој од учениците погодил само по една особина на трицифрениот број.

Решение. Бројот на училишната табла има последна цифра 8, па затоа не може да биде квадрат на некој природен број. Значи, точно е тврдењето на Душан дека бројот е делив со 9. Според тоа, бараниот број е еден од броевите 108, 198, 288, 378, 468, 558, 648, 738, 828, 918. Врз основа на изјавата на Никола добиваме дека тоа може да се броевите помали од 400 или бројот 468, бидејќи $468=36\cdot13$. Да ги разложиме броевите на прости множители. Добиваме, $108=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3$, $198=2\cdot3\cdot3\cdot11$, $288=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$, $378=2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7$ и $468=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot13$. Гледаме дека само една од особините кои ги навел Зоран имаат два од преостанатите пет броеви, и тоа 108 има парен број прости множители и 468 е запишан со парни цифри. Значи на училишната табла е запишан еден од броевите 108 или 468. ■

Задача 03.* *Тројца пријатели, Кирил, Наум и Гроздан, отишле на пазар со своите жени. Имињата на жените се Златка, Јованка и Тодорка. Одредете кој со кого е во брак, ако е познато следното:*

(1) *секој платил за секој купен предмет онолку денари, колку предмети што купил;*

(2) *секој маж потрошил 63 денари повеќе од својата жена; и*

(3) *Кирил купил 23 предмети повеќе од Јованка, а Наум 11 предмети повеќе од Златка.*

Решение. Ако е x бројот на предметите кои ги купил маж, тогаш тој платил x^2 денари за нив. Нека y е бројот на предметите кои ги купила неговата жена. Таа платила y^2 денари. Од условот на задачата имаме

$$x^2-y^2=63, \quad \text{т.е.} \quad (x-y)(x+y)=63,$$

при што x и y се природни броеви, па затоа се можни следните три комбинации: $63\cdot1$, $21\cdot3$ и $9\cdot7$.

Така, ги добиваме следните три системи линеарни равенки

$$\begin{cases} x+y=63 \\ x-y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=21 \\ x-y=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=7 \end{cases},$$

чии решенија се подредените парови (32,31), (12,9) и (8,1).

Сега ги наоѓаме оние вредности чија разлика е 23. Тоа се 32 и 9, што значи дека Кирил купил 32 предмети, а Јованка купила 9 предмети. Разликата 11 е помеѓу 12 и 1, што значи дека Наум купил 12 предмети, а Златка 1 предмет. Тогаш останува дека Гроздан купил 8 предмети, а Тодорка купила 31 предмет. Според тоа, брачните парови се Кирил-Тодорка, Наум-Јованка и Гроздан-Златка. ■

Задача 04. *Во една кутија се наоѓаат 2 црни и 3 бели капи Од тие капи земени се три и се ставени на главите на лицата А, В и С кои што се наредени еден позади друг така што лицето А ги гледа пред себе лицата В и С, лицето В го гледа само лицето С, а лицето С не гледа никого. Никој од нив не ја гледа својата капа, ниту пак се вртел и гледал во кутијата кои капи останале. Го прашале лицето А каква боја има неговата капа, а тој одговорил: "Не знам". Го прашале лицето В каква боја има неговата капа, а тој исто така одговорил: "Не знам". Тогаш лицето С изјавило: "При тие одговори јас веќе знам каква капа имам на главата".*

Каква боја има капата на главата на лицето С?

Решение. Фактот дека лицето А изјавило дека не ја знае бојата на неговата капа покажува дека барем едно од лицата В и С има бела капа. Навистина, во спротивно кога и двете лица В и С би имале црни капи, тогаш лицето А би знаело дека неговата капа сигурно има бела боја. Фактот дека лицето В не ја знаело бојата на својата капа покажува дека лицето С нема црна капа. Навистина, кога лицето С би имало црна капа, тогаш лицето В би знаело дека има бела капа бидејќи барем еден од нив има бела капа. Значи, лицето С има бела капа. ■

Задача 05. *Професорот Илија на своите надарени ученици Иван, Васко и Цане им рекол: "Овде имам неколку капи, и тоа две се црни, а останатите се бели. Секому од вас ќе му ставам на главата една од нив. Така секој од вас ќе види каква капа имаат на главата неговите пријатели, но нема да види каква капа има тој самиот, ниту кои капи преостанале."*

Кога го сторил тоа, професорот го прашал Иван: "Каква боја има капата што ја имаш на твојата глава?". Тој одговори дека не знае. Истото се случило и со Васко. Што одговорил Цане?

Решение. Бидејќи Иван не знае каква капа има на главата, сигурно е дека Васко и Цане немаат двајцата црни капи. Имено, во тој случај Иван веднаш би одговорил дека има бела капа на својата глава. Значи Васко може да заклучи дека било тој, било Цане има бела капа (а можеби и двајцата имаат бели капи). Кога Цане би имал црна капа, Васко тоа би го видел и така би дознал дека тој самиот има бела. Но, бидејќи тој самиот рекол дека не знае каква капа има, останува дека Цане има бела капа.

Цане ги слушнал одговорите на Иван и Васко, па бидејќи тој е надарен ученик, ќе заклучи дека има бела капа. ■

Задача 06. *Седум соработници (Марија, Иванка, Ласте, Петре, Милан, Тодор и Коста) понекогаш ручаат во ресторан. Притоа,*

-Марија руча во ресторан само во среда.

-Иванка и Милан никогаш не ручаат заедно во ресторан.

-Ласте не руча во ресторан ако и Марија не појде со него.

-Петре и Коста не ручаат во ресторан заедно ако и Иванка не руча со нив.

Ако шест од соработниците ручаат заедно во среда, кој од од соработниците ќе биде отсутен?

Кој е најголемиот број соработници што можат да одат заедно на ручек во вторник?

Решение. Јасно е дека ќе биде отсутен или Милан или Иванка. Ако Иванка е отсутна, тогаш Петре и Коста нема заедно да ручаат во ресторан, па во тој случај најмногу 5 соработници ќе ручаат заедно. Според тоа ако во среда ручаат заедно шест соработници, тогаш отсутен ќе биде Милан.

Во вторник Марија не оди на ручек, што значи дека тогаш и Ласте нема да оди на ручек. Бидејќи Иванка и Милан никогаш не ручаат заедно, добиваме дека во вторник заедно можат да ручаат најмногу четири соработници. ∎

Задача 07. *По натпреварот на кој учествувале Никола, Доротеј, Весна и Софија, на прашањето каков бил редоследот добиени се следните три одговори:*

-Никола: "Весна е прва, а Доротеј е втор."

-Доротеј: "Весна е втора, а Софија е трета."

-Весна: "Софија е четврта, а Никола е втор."

Секој од нив дал по еден точен и еден неточен исказ. Каков бил редоследот?

Решение. Ако исказот на Доротеј "Весна е втора" е точен, тогаш двата искази на Никола се неточни, што не е можно. Значи, Весна не е втора, а Софија е трета. Тогаш исказот на Весна "Никола е втор" е точен. Бидејќи Никола е втор, исказот на Никола "Весна е прва" е точен. Според тоа, редоследот бил следниот: Весна е прва, Никола е втор, Софија е трета и Доротеј е четврт. ∎

Задача 08. *Илинка, Филип и Самоил се одлични ученици кои никогаш не лажат. На прашањето која оценка ја добиле на писмената работа по математика, тие одговориле:*

Илинка: "Ако Самоил и јас добивме оценка 5, тогаш и Филип доби оценка 5."

Филип: "Ако јас добив оценка 5, тогаш и Илинка доби оценка 5."

Самоил: "Ако Филип и јас добивме оценка 5, тогаш и Илинка доби оценка 5."

Познато е дека еден од нив добил 4, а другите двајца добиле 5. Кои оценки ги добиле Илинка, Филип и Самоил?

Решение. Нека p, q и r се исказите "Илинка добила 5", "Филип добил 5" и "Самоил добил 5" соодветно. Знаејќи дека еден од нив не е точен, а другите два се точни ја составуваме следната таблица:

p	q	r	$p\wedge r\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$q\wedge r\Rightarrow p$
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥

Бидејќи исказите на Илинка, Филип и Самоил, т.е. $p \wedge r \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ и $q \wedge r \Rightarrow p$ се точни, од таблицата следува дека Илинка и Филип добиле 5, а Самоил добил 4.

Задачата можете да ја решите и со "чисто" размислување (без да користите симболика). Обидете се! ■

Задача 09. *Ана, Борјан, Вера и Горазд ги освоиле првите четири награди на натпревар по математика. Нивните професори се Илиевски, Јованоски, Костоски и Лазов. Учениците заедно со своите професори дошле од градовите Прилеп, Ресен, Скопје и Тетово.*

(1) *Ученикот на професорот Костоски не освоил ни прва ни втора награда.*

(2) *Вера освоила прва награда.*

(3) *Ученикот од Тетово освоил втора награда.*

(4) *Ана е од Прилеп.*

(5) *Горазд, ученикот на професорот Јованоски, освоил четврта награда.*

(6) *Професорот Лазов е од Ресен.*

Од кој град е Вера и кој е ученикот на професорот Лазов?

Решение. Формираме табела со четири редици и четири колони. Во првата редица ги ставаме имињата на учениците, во втората наградата која секој ученик ја освоил, во третата презимињата на нивните професори и во четвртата имињата на градовите од кои доаѓаат. (Ќе ги пишуваме само првите букви на имињата и презимињата.)

Според условите (2), (4) и (5) табелата можеме да ја потполниме на следниот начин.

ученик	А	Б	В	Г
награда			I	IV
проф.				Ј
град	П			

Бидејќи само во колоната на Борјан непознати се наградата и градот истовремено, според условот (3) добиваме дека Борјан е од Тетово и освоил II награда. Понатаму, според условите (5) и (1) добиваме дека ученикот на професорот Костоски е Ана и таа освоила III награда. Сега табелата изгледа:

ученик	А	Б	В	Г
награда	III	II	I	IV
проф.	К			Ј
град	П	Т		

Бидејќи само на Вера се непознати и професорот и градот истовремено, според условот (6) имаме дека Вера е ученик на професорот Лазов и дека таа е од Ресен. ■

Задача 10. *Учениците Ангелина, Бојана, Цветко, Димитар, Евгенија и Фросина решавале некоја задача. Задачата ја решиле двајца. На прашањето, кој ја решил задачата, добиени се следните пет одговори:*

(1) *Ангелина и Цветко;*

(2) *Бојана и Фросина;*

(3) *Фросина и Ангелина;*

(4) *Бојана и Евгенија;*

(5) *Димитар и Ангелина.*

Во четири од овие пет одговори еден дел е точен, а другиот е неточен, додека во еден одговор и двата дела се неточни. Кои ученици ја решиле задачата?

Решение. Нека претпоставиме дека во првиот одговор двата податоци се неточни, т.е. и Ангелина и Цветко не ја решиле задачата. Тогаш, според останататите одговори имаме: од (3) Фросина ја решила задачата, па од (2) Бојана не ја решила задачата, па од (4) Евгенија ја решила задачата и од (5) Димитар ја решил задачата. Добивме дека, задачата ја решиле три ученици, Фросина, Евгенија и Димитар, што е спротивно на условот, дека задачата ја решиле само двајца од учениците.

Сега да претпоставиме дека во вториот одговор двата податоци не се точни, т.е. дека Бојана и Фросина не ја решиле задачата. Тогаш имаме, од (3) дека Ангелина ја решила задачата, од (1) дека Цветко не ја решил задачата, од (4) дека Евгенија ја решила задачата и од (5) дека Димитар не ја решил задачата. Според тоа, во овој случај добивамне дека задачата ја решиле само Ангелина и Евгенија, што одговара на условот на задачата.

Сите други претпоставки водат до спротивност, па заклучуваме дека задачата ја решиле само Ангелина и Евгенија. ■

Задача 11. *Само еден од учениците Андон, Васил и Сотир згрешил. Кога ги прашале кој згрешил, одговориле:*

Андон: Јас не згрешив. Васил згреши.

Васил: Андон не згреши. Сотир згреши.

Сотир: Јас не згрешив. Андон згреши.

Ако се знае дека еден од нив двапати ја кажал вистината, другиот двапати излагал, а третиот еднаш излагал и еднаш ја кажал вистината, одредете кој згрешил.

Решение. Да претпоставиме дека двете изјави на Андон се вистинити. Од втората од неговите изјави следува дека Васил згрешил. Тоа значи, првата изјава на Васил е вистинита, а втората лажна и првата изјава на Сотир е вистинита, а втората е лажна. Но, тоа противречи на фактот дека едниот двапати дал лажна изјава.

Да претпоставиме дека двете изјави на Андон се лажни. Тогаш, според првата изјава, заклучуваме дека Андон згрешил, па двете изјави на Васил ќе бидат лажни. Ова противречи на фактот дека Васил во овој случај можел да даде или две вистинити изјави или една вистинита и една лажна изјава.

Не може првата изјава на Андон да е лажна, а втората вистинита, бидејќи во тој случај и Васил и Андон згрешиле. Останува првата изјава на Андон е вистинита, а втората лажна. Тогаш двете изјави на Васил се вистинити, а двете изјави на Сотир се лажни. Во овој случај се исполнети условите на задачата, па заклучуваме, дека Сотир згрешил. ■

Задача 12. *Јордан, Климент и Ѓорѓи навиваат за три различни клубови: "Вардар", "Пелистер" и "Силекс" (за ист клуб не* *навиваат двајца од нив). На прашањето за кој клуб навиваат, ги дале следните одговори.*

Јордан:"Јас не навивам за "Пелистер"."

Климент:"Јас навивам за "Пелистер"."

Ѓорѓи:"Јас не навивам за "Вардар"."

Се знае дека само еден од нив ја зборува вистината. Кој за кој клуб навива? Кој не лаже?

Решение. Да претпоставиме дека само Јордан ја зборува вистината. Тогаш Ѓорѓи би навивал за "Вардар", а ни Климент ни Јордан не би навивале за "Пелистер", што не е можно. Значи Јордан лаже и тој навива за "Пелистер". Од овде следува дека и Климент лаже, бидејќи тврди дека навива за "Пелистер". Значи единствено Ѓорѓи ја зборува вистината, па тој не навива за "Вардар", што значи дека навива за "Силекс". Конечно Климент навива за "Вардар". ■

Задача 13. *Три сестри Елена, Катерина и Султана оценети се, по математика, со три различни оценки: 3, 4 и 5. Дамјан пробал да ги одреди нивните оценки: "Султана добила 3, Катерина не добила 3, а Елена не добила 5." Султана на тоа одговорила: "Ја кажа вистината само за една од нас трите."*

Одредете ги оценките на трите сестри.

Решение. Ако претпоставиме дека Дамјан ја погодил само оценката на Султана, тогаш следува дека Султана и Катерина добиле иста оценка, што не е можно. Исто така, не е можна претпоставката дека Катерина не добила оценка 3, бидејќи во тој случај ниедна сестра не добила оценка 3. Значи, Дамјан погодил само дека Елена не добила оценка 5. Бидејќи се останатите претпоставки неточни, добиваме дека Катерина добила оценка 3, а Султана не добила 3.

Конечно, Катерина добила 3, Елена 4, Султана 5. ■

Задача 14*. *Во едно семејство се водел следниот разговор.*

Мајката: "Вчера разбрав дека Доротеј, синот на Методија Размоски, дипломирал на факултет, иако има само 21 година."

Таткото: "Мислам дека грешиш. Синот на М. Размоски се вика Никола и има 18 години."

Ќерката: "Јас не ја познавам фамилијата на М. Размоски но пред некој ден другарката ми зборуваше за неговиот син и добро се сеќавам дека, притоа ми кажа дека тој има 25 год. и спомна некое друго име, кое сигурно не е Доротеј."

Синот: "Бидејќи добро го познавам семејството Размоски морам да ви кажам дека секој од вас, кога се работи за името на синот на М. Размоски и неговите години, искажа едно вистинито и едно невистинито тврдење."

Како се вика и колку е стар синот на Методија Размоски, при што е познато дека тој има само еден син?

Решение. Да тргнеме од изјавата на мајката. Претпоставуваме дека синот на Методија Размоски е Доротеј и дека не е стар 21 година. Тогаш, од изјавата на таткото, следува дека Доротеј бил стар 18 год. Во тој случај двата искази во изјавата на ќерката се неточни, што според изјавата на синот не е точно. Значи, почетната претпоставка не е точна, па останува заклучокот дека синот на Методија Размоски се вика Никола и дека е стар 21 година. ■

Задача 15. *Митре, Томе и Зоран се осомничени дека еден од нив го скршил домашниот аквариум, но сите одрекнуваат дека се виновни.*

"Кој од вас тројцата лаже?", запрашал татко им. Следеле одговорите:

Митре: "Зоран лаже.";

Томе: "Лаже Митре или Зоран."; и

Зоран: "Знам дека Томе нема да излаже."

Врз база на овие изјави татко им веднаш го открил виновникот. Кој го скршил аквариумот?

Решение. Јасно е дека сите тројцата не лажат, бидејќи ако лаже Митре или Зоран, тогаш Томе ја зборува вистината. Затоа да претпоставиме дека Митре ја зборува вистината. Тогаш Зоран лаже, па од изјавата на Зоран следува дека и Томе лаже. Меѓутоа, ако Зоран лаже, тогаш изјавата на Томе е вистинита. Така доаѓаме до противречност, од која следува дека Митре лаже. Но, тоа значи дека Зоран не лаже, а од изјавата на Зоран следува дека и Томе исто така ја зборува вистината.

Конечно, аквариумот го скршил Митре. ■

Задача 16. *Од тројца другари: Борко, Бранко и Тодор, еден е алатничар, другиот е бравар, а третиот е тракторист. Еден од нив живее во Битола, другиот во Берово, а третиот во Тетово. Ако се знае дека:*

а) Борко многу ретко патува во Битола, иако сите роднини му живеат во Битола;

б) меѓу нив има двјаца чии занимања и место на живеење почнуваат со иста буква како и името;

в) сопругата на алатничарот е сестра на Борко,

одредете ги нивните занимања и места на живеење.

Решение. Роднините на Борко се во Битола, па алатничарот е зет на Борко и тој исто така е во Битола. Борко не е во Битола, па од б) заклучуваме дека Борко е бравар и живее во Берово, а Тодор е тракторист и живее во Тетово. Според тоа Бранко е алатничар и живее во Битола. ■

Задача 17. *Во колона се наоѓаат учениците* A, B, C, D *и* E *еден зад друг. Меѓу учениците* A *и* B, *а исто така и меѓу учениците* D *и* E, *се наоѓаат точно едно момче и едно девојче. На првото и последното место нема девојчиња, а не се ниту учениците* A *и* E. *Зад ученикот* D *има само едно девојче.*

Како се распоредени учениците A,B,C,D *и* E? *Со кои букви се означени момчињата, а со кои девојчињата?*

Решение. Бидејќи помеѓу A и B како и помеѓу D и E има барем по двајца ученици, следува дека ниеден од нив не е на трето место. Според тоа на трето место е C. Бидејќи A и E не се ни на прво ни на последно место, на тие места се учениците D и B, па затоа тие не се девојчиња. Бидејќи зад D се наоѓа само едно девојче, D е прв, а B е последен. Притоа A мора да е втор, а E е четврт. Девојче е C, а останатите се момчиња. ■

Задача 18*. *Во Куманово живеат четворица другари Горан, Зоран, Јован и Стојан. Секој од нив има постар брат што се вика како еден од неговите другари. Исто така, и името на таткото на секој од нив е име на некој од неговите другари. Се разбира секој татко и неговите синови имаат различни имиња.*

Таткото на Стојан и братот на Јован го носат името на детето чиј брат се вика Јован. Братот на детето што го носи името на Зорановиот брат се вика како детето чиј татко е Горан. Чиј татко се вика Стојан?

Решение. Да ги означиме децата со првите букви на нивните имиња, т.е. со Г,З,Ј и С. Ако X е едно од децата, тогаш со Б(X) да го означиме името на неговиот брат, а со Т(X) името на неговиот татко. Со помош на овие ознаки, условите на задачата можеме да ги запишиме на следниот начин:

(i) X≠Б(X)≠Т(X)≠X;

(ii) Б(X)=Ј ако и само ако Т(С)=Б(Ј)=X;

(iii) X=Б(З) ако и само ако Т(Б(X))=Г.

Бидејќи Т(С)≠С и Б(Ј)≠Ј, според условот (ii) можни се следните два случаи:

а) Т(С)=Б(Ј)=Г; или

б) Т(С)=Б(Ј)=З.

Во случај кога важи а) од (ii), имаме Б(Г)=Ј, па мора да биде Б(З)=С. Но, тогаш според (iii), имаме Т(Б(С))=Т(З)=Г што не е можно, бидејќи Т(С)=Г.

Во случај кога важи б), од (ii) имаме Б(З)=Ј, а според (iii), Т(Б(Ј))=Т(З)=Г. Значи, имаме Б(Ј)=З, Б(З)=Ј, па мора да биде Б(Г)=С, Б(С)=Г. Потоа имаме Т(З)=Г, Т(С)=З, па мора да биде Т(Г)=Ј и Т(Ј)=С.

Од досега изнесеното следува дека можен е случајот Т(С)=Б(Ј)=З, т.е. таткото на Јован се вика Стојан. ■

Задача 19. *Владо, Кирил, Петар, Милан, Раде и Томе се натпреварувале во трчање. Владо стигнал на целта после Кирил, а пред Петар. Милан стигнал после Петар. Раде бил четврт. Томе бил на целта пред Владо, но не победил во трката. Каков бил редоследот на целта?*

Решение. Пред Владо се Кирил и Томе. Бидејќи Томе не е победник, имаме дека Кирил е прв, Томе е втор, Владо трет, Раде веќе знаеме е четврт. Милан стигнал после Петар, значи последен, а Петар е петти. ■

Задача 20. *Четворица другари Вангел, Борис, Ванчо и Глигор се натпреварувале во трчање. После трката секој од нив го прашале кое место го завзел. Вангел одговорил: "Јас не бев ни прв, ни последен." Борис одговорил: "Јас не бев последен." Ванчо одговорил: "Јас бев прв." Глигор одговорил "Јас бев последен."*

Ако се знае дека, тројца ја зборувале вистината, а еден лажел, одредете кој лажел и кој бил прв.

Решение. Да претпоставиме, дека Вангел лажел. Тогаш сите останати ја зборувале вистината, т.е. Ванчо бил прв, а Глигор бил последен. Според тоа, Вангел не бил ни прв ни последен и, значи, тој ја зборувал вистината. Така, добивме противречност, па значи Вангел ја зборувал вистината.

Да претпоставиме дека Борис лажел, т.е. тој бил последен. Тогаш Глигор мора да ја зборува вистината, т.е. тој исто така е последен, што повторно е противречност. Значи и Борис мора да ја зборува вистината.

Нека сега претпоставиме дека Ванчо лажел, а сите останати ја зборувале вистината. Притоа Вангел мора да биде на второ или на трето место; Борис на прво, второ или на трето место; Ванчо (тој лажел) на второ, трето или четврто место и Глигор мора да е на четврто место. Според тоа, добиваме дека Борис е на прво место.

Останува да го провериме последниот случај, имено претпоставката дека Глигор лажел. Тогаш сите останати ја зборувале вистината, па значи никој нема да биде последен што повторно е противречност.

Конечно, покажавме дека Ванчо лажел, а прв бил Борис. ∎

Задача 21. *Ученичките Темјана, Илина, Магдалена и Костадинка на училишниот крос имале стартни броеви 1, 2, 3 и 4, соодветно, и тие ги освоиле првите четири места. Одредете го редоследот на овие ученички, ако се знае:*

а) Темјана не е прва, Илина не е втора, Магдалена не е трета и Костадинка не е четврта;

б) Магдалена не го освоила првото место; и

в) стартниот број на ученичката која го освоила четвртото место се поклопува со бројот на местото кое го освоила онаа ученичка, чиј стартен број е бројот на местото кое го освоила ученичката со стартен број 2.

Решение. Ќе направиме табела и во неа ќе ги запишиме податоците од условите а) и б), при што ќе оперираме со стартните броеви на ученичките. Првото место го освоила ученичката со стартен број 2 или 4. Ќе покажеме дека ученичката со стартен број 4 не го освоила првото место.

Да претпоставиме дека ученичката со број 4 била прва. Но, тоа значи дека ученичката со број 2 била трета или четврта. Меѓутоа, таа не може да биде четврта, бидејќи ученичката со број 4 го освоила првото место, па од условот в) ќе следува дека и ученичката со број 1 го освоила четвртото место.

	I	II	III	IV
1.	0			
2.		0		
3.	0		0	
4.				0

Ако ученичката со број 2 била трета, тогаш ученичката со број 3 може да го освои второто место, што не е можно, бидејќи тогаш според условот в) ученичката со број 2 го освоила четвртото место, што е противречност. Ученичката со број 3 не може во овој случај да биде ни четврта, бидејќи ученичката со број 4 е четврта (условот в), а таа веќе го освоила првото место.

Значи прва била ученичката со број 2. Сега местото кое го освоила ученичката со број 1 определува која ученичка го освоила четвртото место. Лесно се покажува дека ученичката со број 1 го освоила третото место. Тогаш ученичката со број 3 била четврта, а ученичката со број 4 го освоила второто место.

Значи, Темјана го освоила третото место, Илина го освоила првото место, Магдалена го освоила четвртото место и Костадинка го освоила второто место. ■

Задача 22. *Учениците Ана, Илко, Цане и Дончо се натпреварувале во трчање. Секој од нив го прогнозирал редоследот на целта на трката:*

-Ана: Ана, Илко, Дончо и Цане;

-Илко: Илко, Ана, Цане и Дончо;

-Цане: Цане, Илко, Дончо и Ана;

-Дончо: Дончо, Цане, Илко и Ана.

После натпреварот се покажало дека никој точно не го прогнозирал редоследот на сите натпреварувачи на целта, туку само еден од нив го погодил местото само на еден од натпреварувачите. Каков бил редоследот на крајот на трката?

Решение. Да ги запишиме дадените прогнози во облик на квадратна табела

I	II	III	IV
Ана	Илко	Дончо	Цане
Илко	Ана	Цане	Дончо
Цане	Илко	Дончо	Ана
Дончо	Цане	Илко	Ана

Сите четири ученици различно го прогнозирале победникот на трката па затоа еден од нив сигурно погодил кој е прв. Според тоа, за второто место ниедна прогноза не е точна, па затоа останува на второ место да е Дончо. Слично за третото место останува да го освоила Ана и четвртото место го освоил Илко. Значи само Цане ја прогнозирал својата победа, па редоследот е Цане, Дончо, Ана и Илко. ■

Задача 23. *На еден шаховски турнир учествувале пет шахисти. Одредете ги резултатите на сите партии ако се знае дека:*

а) секој шахист играл по една партија со секого,

б) секој шахист освоил различен број поени,

в) шахистот кој го освоил првото место не ремизирал ниедна партија,

г) шахистот кој го освоил второто место не изгубил ниедна партија, и

д) шахистот кој го освоил четвртото место не добил ниедна партија.

Напомена. Во шахот победникот добива еден поен, за нерешен резултат секој играч добива по половина поен, а за изгубена партија не се добива ниеден поен.

Решение. Според условот г) вториот шахист не загубил ниедна партија, што значи тој не загубил ни од првиот шахист а бидејќи според условот в) тој не ремизирал ниедна партија тој загубил од вториот шахист. Ова да го забележиме во табелата А.

игр	1	2	3	4	5	пое
1		0	1	1	1	3
2	1		0,5	0,5	0,5	2,5
3	0	0,5				
4	0	0,5				
5	0	0,5				

Табела А

игр	1	2	3	4	5	пое
1		0	1	1	1	3
2	1		0,5	0,5	0,5	2,5
3	0	0,5		0,5	1	2
4	0	0,5	0,5		0,5	1,5
5	0	0,5	0	0,5		1

Табела Б

Според тоа, првиот шахист освоил најмногу 3 поени, а вториот шахист освоил најмалку 2,5 поени бидејќи првиот го победил, а од останатите не загубил. Бидејќи првиот освоил повеќе поени од вториот б), останува само една можност: имено првиот освоил 3 поени, а вториот освоил 2,5 поени. Затоа резултатите на нивните партии со останатите шахисти можеме веднаш да ги одредиме и истите се дадени во табелата А.

Бидејќи шахистите освоиле различен број поени (б), добиваме дека максималниот број поени кои можат да ги освојат третиот, четвртиот и петтиот шахист се 2; 1,5 и 1 поен. Ќе докажеме дека ниеден од нив нема освоено помал број поени. Навистина, сите пет играчи вкупно одиграле 10 партии, т.е. заедно освоиле точно 10 поени (а). Првиот и вториот освоиле заедно 5,5 поени, па добиваме дека преостанатите тројца освоиле 4,5 поени. Но, 2+1,5+1=4,5 што значи дека ниеден од собироците не може да се намали.

Ако овие броеви 2; 1,5 и 1, т.е. поените на третиот, четвртиот и петтиот ги запишеме во збирната колона на табелата, бидејќи четвртиот не добил ниедна партија произлегува дека тој ги ремизирал останатите партии. Ова да го забележиме во табелата Б. Резултатот на партијата помеѓу третиот и петтиот сега е јасен, имено третиот ја добил оваа партија. Конечно, ја добиваме табелата Б со резултатите од сите партии на турнирот. ■

Задача 24. *Стојко и Димитринка играат шаховски меч, при што после секоја одиграна партија ја менуваат бојата на фигурите. Ако се знае дека,*

а) во 11 одиграни партии ниедна не завршила реми,

б) постигнати се 5 победи со црни фигури, и

в) вкупниот резултат е 7:4 за Стојко,

определете кој со кои фигури ќе игра во 12-тата партија.

Решение. Шахистот кој во дванаесеттата партија игра со бели фигури, го означуваме со А, играл до сега пет пати со бели фигури. Нека А победил x пати со бели фигури и y пати со црни фигури. Тогаш другиот играч победил (5-x) пати со црни фигури. Бидејќи 5-x+y=5, следува дека x=y. Според тоа А победил парен број пати (x+y=2x), од што следува дека А е Димитринка, па таа ќе игра со бели фигури во 12-тата партија. ■

Задача 25. *На еден шаховски турнир учесниците играле секој со секого по еднаш и ниедна партија не завршила со реми. Докажете дека меѓу учесниците постои шахист* А *со следново својство: ако* В *е некој друг учесник на турнирот, тогаш* А *го победил* В, *или постои шахист* С *кој што е победен од* А *и го победил* В.

Решение. За шахистот А избираме произволен шахист со максимален број на поени. Нека В е произволен друг шахист. Треба да докажеме дека не е можно истовремено А да изгубил од В и да не постои шахист С кој изгубил од А и го победил В. Навистина да претпоставиме дека А изгубил од В и дека не постои шахист С кој изгубил од А и го победил В. Тогаш секој шахист кој е победен од А е победен и од В. Освен тоа А изгубил од В, па следи дека В има освоено повеќе поени отколку А, што противречи со претпоставката за изборот на шахистот А. ■

Задача 26. *На шаховски турнир учествувале 8 шахисти и сите освоиле различен број поени. Шахистот, кој го освоил второто место, освоил онолку поени колку што освоиле четворицата последнопласирани шахисти. Кој е резултатот меѓу шахистите, кои ги освоиле третото и седмото место?*

Решение. Шахистите кои ги освоили последните четири места, играле меѓу себе 6 партии и затоа тие освоиле најмалку 6 поени заедно. Според тоа, шахистот кој го освоил второто место освоил најмалку 6 поени.

Од друга страна, шахистот кој го освоил првото место може да има 7 или 6,5 поени. Во првиот случај тој ги добил сите партии, па значи шахистот кој го освоил второто место освоил најмногу 6 поени. Во вториот случај, бидејќи сите освоиле различен број поени, вториот шахист освоил најмногу 6 поени.

Значи вториот шахист освоил точно 6 поени.

Според тоа, четворицата последнопласирани освоиле точно 6 поени, т.е. поените од меѓусебните 6 партии. Тоа значи дека тие ги изгубиле партиите со останатите четири шахисти. Конечно, третопласираниот го победил седмопласираниот шахист. ■

VI.3 НЕКОИ ЛОГИЧКИ ПАРАДОКСИ

На крајот од оваа глава ќе разгледаме некои логички задачи за кои на прв поглед изгледа дека не може да се решат, на пример некој да се спаси од сигурна смрт, или пак да ја дознае вистината незнаејќи дали соговорникот лаже или не и слично. Меѓу нив се наоѓа и познатиот Раселов парадокс за "берберот кој ги бричи сите оние кои самите не се бричат".

Задача 01. *Две момчиња и се додворуваат на иста девојка. Таа им вели: "Напишете ми по една песна. Ќе ја одберам онаа, која повеќе ќе ми се допадне. Ако погодам кој од вас двајцата ја напишал, ќе се омажам за него. Ако не погодам, ќе се омажам за оној, кој ја напишал другата песна."*

Дали е "праведен" овој услов?

Решение. Со наведениот услов девојката сигурно ќе се омажи
за она момче, за кое ќе претпостави дека ја напишало песната што повеќе ќе и се допадне.

Навистина, ако погоди, тоа е очигледно. Ако пак не погоди, тогаш нема да се омажи за оној кој ја напишал одбраната песна туку за другиот, па значи повторно за оној за кој претпоставила дека ја напишал одбраната песна.

Според тоа, ако под "праведен" услов подразбираме услов при кој и двете момчиња ќе имаат подеднакви изгледи, тогаш предлогот на девојката не е "праведен". ■

Задача 02. *Во земјата "Неправдија" се суди на следниот начин: Судијата на обвинетиот му нуди избор од две ливчиња, од кои на едното пишува "живот", а на другото "смрт". Обвинетиот со врзани очи избира едно од нив. Ако на избраното ливче пишува "живот", тој е слободен, а во спротивен случај е осуден на смртна казна.*

Еден обвинет дознал дека судијата решил по секоја цена да го погуби, па затоа и на двете ливчиња кои ќе ги добие за избор ќе пишува "смрт". Сепак обвинетиот не настрадал. Напротив, познавањето на намерата на судијата сигурно да го погуби му овозможува сигурно да се спаси. Како?

Решение. Обвинетиот зема едно ливче и веднаш го проголтува. Тогаш, според законите на судењето може да се тврди дека на него пишувало спротивно од она што е напишано на преостанатато ливче. Бидејќи на преостанатото ливче пишува "смрт", судијата мора да го ослободи. ■

Задача 03.* *Едно племе човекојадци фатило еден истражувач. Нивниот поглавар му рекол: "Мораш да дадеш една осмислена изјава. Ако таа биде вистинита ќе те испечеме и ќе те изедеме, а* *ако биде лажна ќе те свариме и ќе те изедеме."*

Дали може истражувачот да се спаси?

Решение. Истражувачот ќе се спаси ако изјави: "Вие ќе ме сварите."

Имено, тогаш не смеат да го испечат, бидејќи печењето е предвидено за вистинита изјава, а кога би го испекле, изјавата "Вие ќе ме сварите." би била лажна. Но не смеат ни да го сварат бидејќи варењето е предвидено за лажна изјава, а кога би го свариле, изјавата "Вие ќе ме сварите." би била вистинита. Според тоа, ако поглаварот го одржи даденото ветување, истражувачот нема ниту да биде сварен ниту да биде испечен.

Решението на поставениот проблем е во следново: Од пресудата на поглаварот во прв момент се чини дека истражувачот сигурно ќе настрада, бидејќи било која изјава да ја даде, таа ќе биде вистинита или лажна. Меѓутоа изјавата "Вие ќе ме сварите." сама по себе не е ниту вистинита ниту лажна во дадениот момент, туку нејзината вистинитост односно невистинитост зависи од идните настани. ■

Задача 04. *Во едно село во кое има само еден бербер постои закон според кој берберот ги бричи сите оние кои не се бричат сами и не бричи никој друг. Кој го бричи берберот?*

Решение. Постојат две можности, или берберот се бричи сам или берберот не се бричи сам. Следната дискусија покажува дека и двете можности доведуваат до прекршување на законот.

Во првиот случај, ако берберот се бричи сам, тогаш тој спаѓа во оние жители кои берберот не смее да ги бричи, што значи дека го прекршува законот.

Во вториот случај, ако тој не се бричи сам, тогаш според законот него треба да го бричи берберот, т.е. тој треба да се бричи сам, па затоа повторно го прекршува законот.

Проблемот на оваа парадоксална состојба е во тоа, што усвоениот закон не одредува кој ќе го бричи берберот. ■

Задача 05. *Раде и Томе се браќа близнаци, кои се разликуваат само по тоа што едниот секогаш лаже, а другиот секогаш ја зборува вистината. На сите поставени прашања тие одговараат со "Да!" или со "Не!". Треба да поставите едно и исто прашање и на Раде и на Томе, но така да и двајцата браќа дадат ист одговор. Наведете едно прашање на кое и двајцата ќе одговорат со "Да!" и едно прашање на кое и двајцата ќе одговорат со "Не!".*

Решение. На прашањето "Дали ти секогаш ја зборуваш вистината?" и двајцата ќе одговорат со "Да!", а на прашањето "Дали ти секогаш лажеш?" и двајцата ќе одговорат со "Не!".

Слично на прашањето "Дали твојот брат ја зборува вистината?" двајцата ќе одговорат со "Не!", а на прашањето дали твојот брат лаже, двајцата ќе одговорат со "Да!". ■

Задача 06.* *На еден остров живееле две племиња Фитумиту и Бајтата, кои по ликовите не се разликувале едни од други. Се-*

кој Фитумиту секогаш ја зборувал само вистината, а секој Бајтата секогаш лажел. Еден странски патник запрашал еден случаен минувач (М) на кое племе припаѓа, но не го дочул одговорот. Тогаш се обратил до двајца домородци А и В кои слушнале што одговорил М и ги запрашал што одговорил минувачот. На тоа прашање домородецот А рекол дека минувачот се нарекол себеси Бајтата, а домородецот В рекол дека минувачот се нарекол себеси Фитумиту. На прашањето на странецот дали со нивните одговори минувачот го излагал, и двајцата домородци А и В одговориле дека минувачот не го излагал.

На кои племиња припаѓаат домородците А, В и М?

Зошто на второто прашање и двајцата домородци А и В одговориле исто?

Решение. Најпрво да забележиме дека секој домородец на прашањето на кое племе припаѓа тој самиот, секогаш одговара дека е Фитумиту. Бидејќи домородецот В рекол дека минувачот се нарекол себеси Фитумиту што е вистина, а домородецот А рекол дека минувачот се нарекол Бајтата, заклучуваме дека домородецот В е Фитумиту, а домородецот А е Бајтата.

На второто прашање на странецот (дали минувачот го излагал) домородецот Фитумиту В одговорил дека минувачот не го излагал, па затоа заклучуваме дека минувачот М е Фитумиту.

Домородецот Бајтата А на второто прашање од странецот одговорол дека минувачот ја кажал вистината, бидејќи тој веќе го зема за точно тврдењето што самиот го искажал дека "домородецот се нарекол себеси Бајтата". Ако тоа е точно тогаш минувачот М излажал, па затоа сега домородецот А вели дека минувачот М ја зборувал вистината. Всушност А се заплеткал во сопствените лаги. ■

Задача 07.* *Еден патник се нашол на раскрсница од која излегуваат два патишта од кои само едниот води до Охридското езеро и не знае како да дојде до езерото, т.е. дали да оди по левиот или по десниот пат. Пред куќата покрај раскрсницата седат двајца браќа од кои едниот постојано ја зборува вистината, а другиот секогаш лаже. На патникот му е познато дека и двајцата на секое прашање одговараат само со "Да!" или со "Не!", но не знае кој од нив лаже, а кој ја зборува вистината.*

Дали може патникот само на еден од браќата да му постави едно и единствено прашање, па од одговорот да заклучи по кој пат треба да оди? Кое е тоа прашање?

Решение. Патникот може да го постави следното прашање: "Што ќе одговори твојот брат, ако го прашам, дали овој пат (покажува, да кажеме, на левиот пат) води до езерото?" Ако добие одговор дека братот тоа ќе го потврди, тогаш патникот треба да оди по десниот пат, т.е. по оној пат кој не го покажал, а ако добие одговор дека братот тоа ќе го негира, тогаш треба да оди по левиот пат, т.е. по оној пат кој го покажал.

Ако така постапи, тогаш сигурно го избрал правиот пат.

Навистина, ако патникот зборува со братот кој лаже, а овој му каже дека неговиот брат ќе го упати на левиот пат, тогаш тоа не е вистина, т.е. неговиот брат, кој секогаш зборува вистина, би го упатил на десниот пат, па значи тоа е вистинскиот пат.

Ако патникот зборува со братот кој зборува вистина па овој му каже дека неговиот брат би го упатил на левиот пат, тогаш тоа е навистина така, т.е. братот кој лаже би го упатил да оди по левиот пат, па тој пат е неисправен, а исправен е десниот пат.

Значи, од било кој да добие одговор дека ќе биде упатен на левиот пат, треба да оди по десниот пат.

Ако патникот разговара со братот кој лаже, а овој му каже дека неговиот брат ќе го упати на десниот пат, тоа повторно не е вистина па братот кој зборува вистина би го упатил на левиот пат, кој во овој случај е вистинскиот пат.

Исто така, ако разговара со братот кој ја зборува вистината, па овој му каже дека ќе биде упатен на десниот пат, тогаш тоа е навистина така, па тој пат не е добар и треба да оди по левиот пат.

Значи, и во двата случаи, од било кој да добие одговор дека ќе биде упатен на десниот пат, треба да оди по левиот пат.

Според тоа, ако патникот оди по спротивниот пат од оној за кој ќе добие одговор дека ќе му биде препорачан од братот на човекот со кој разговара, тогаш може да биде сигурен дека оди по вистинскиот пат. ■

Задача 08.* *Според една стара легенда, околу тркалезната маса седеле* 13 *витези на чело со крал Артур, при што секој се заколнал дека или секогаш ќе ја зборува вистината или секогаш ќе лаже. Во една прилика витезите седеле околу тркалезната маса, кога пристигнал еден странец и секој витез го запрашал што мисли за својот сосед од десната страна. Сите одговориле дека нивниот сосед е голем лажов; само кралскиот советник Мерлин, кој седел лево од кралот Артур одговорил дека кралот никогаш не излагал во животот. На прашањето на странецот, дали околу масата се повеќе оние кои лажат или оние кои ја зборуваат вистината кралот одговорил дека оние кои ја зборуваат вистината се повеќе, а неговиот советник Мерлин прецизирал дека оние кои ја зборуваат вистината се за тројца повеќе.*

Колку витези ја зборувале вистината и дали меѓу нив се и кралот Артур и неговиот советник Мерлин?

Решение. Да составиме таблица: во првата колона од лево е запишано името на оној кој одговара на прашањето на странецот, во првиот ред горе името на оној за кој станува збор, а во пресекот на редовите искажаното мислење на првиот за вториот. (Ознаки: вистинољубив-V, лажго-L, вистина-v и лага-l).

За кого зборува / Кој зборува	V	L
V	v	l
L	l	v

Од оваа табела се гледа дека ако се земат било кои два соседи на масата (ги исклучуваме кралот Артур и советникот Мерлин), тогаш едниот од нив е сигурно лажго, а другиот не е. Бидејќи советникот Мерлин рекол дека кралот Артур никогаш не лаже, од неговата изјава следува дека тие двајцата или секогаш лажат или секогаш ја зборуваат вистината. Во првиот случај, од сите витези ќе имаме 7 лажговци, а во вториот случај ќе имаме 6 лажговци (бидејќи вистинољубив е тогаш секој втор, исклучувајќи ги кралот и неговиот советник). И едното и другото противречи на одговорот кој го дал кралскиот советник, што значи дека советникот е лажго. Од тука следува дека и кралот Артур е лажго.

Значи, од 13 витези имаме 7 лажговци и 6 вистинољупци.■

Задача 09.* *Илија, Горјан и Александар биле сведоци на сообраќајна несреќа. Нивните изјави се противречни една на друга и секој тврдел дека некој друг лаже. Илија тврдел дека Горјан лаже, Горјан тврдел дека Александар лаже, а Александар го убедувал судијата дека не му верува ниту на Илија, ниту на Горјан. После кратко размислување судијата, без да постави прашање, донесол правилен заклучок. Кој од сведоците ја зборувал вистината?*

Решение. Нека претпоставиме дека Илија ја зборува вистината, т.е. дека Горјан лаже. Но, тоа значи дека Александар ја зборува вистината, а тој изјавува дека и Илија и Горјан лажат што противречи на претпоставката дека Илија зборува вистина.

Сега, претпоставуваме дека Горјан ја зборува вистината. Тогаш Александар лаже, а тоа значи дека ни Илија не е во право, т.е. лаже. Значи, задоволени се сите услови на задачата, па Горјан единствено ја зборува вистината.

На крајот, ако претпоставиме дека Александар ја зборува вистината, тогаш тоа ќе значи дека Горјан лаже, а Илија ја зборува вистината. Но, сега добиваме дека и Александар и Илија ја зборуваат вистината, а од друга страна од изјавата на Александар произлегува дека и Илија и Горјан лажат. Значи добивме дека Илија истовремено и лаже и ја зборува вистината, што повторно е противречност.

Според тоа, точно е дека само Горјан ја зборува вистината. ■

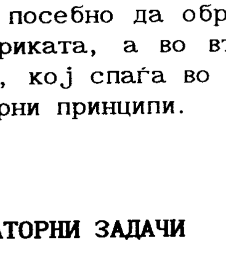
VII МАЛКУ ДА КОМБИНИРАМЕ

Речиси секојдневно се среќаваме со проблеми од типот: колку различни трицифрени броеви можат да се запишат со цифрите 1, 2, 3 и 4, ако цифрите не се повторуваат или ако цифрите се повторуваат. Во оваа глава ќе се задржиме на некои од овие задачи, кои ги изучува математичката дисциплина позната под името комбинаторика. Во првиот дел ќе разгледаме неколку комбинаторни задачи, при што нема посебно да обрнеме внимание на теориските основи на комбинториката, а во вториот дел ќе го разгледаме принципот на Дирихле, кој спаѓа во редот на наједноставните елементарни комбинаторни принципи.

VII.1 РАЗНИ КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ

Задача 01. *Шефот на салата на еден ресторан добил задача околу тркалезна маса, за вечера, да распореди четири мажи и определен број на жени, и тоа на тој начин да ниедна жена не седи покрај друга жена и наспроти секој од гостите да се наоѓа некој од спротивниот пол. Дали шефот на салата може да направи таков распоред?*

Решение. За да наспроти секој од четирите мажи седи жена, околу масата мора да се распоредат точно четири жени, и тоа така што меѓу секои две жени да биде по еден маж. Нека AB, CD, EF и HG се четирите дијаметри на тркалезната маса (цртеж).

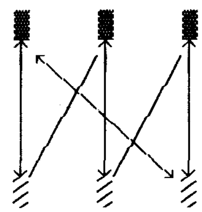


Ако A е маж, тогаш B е жена, па според тоа D и F се мажи, од што следува дека E и C се жени. Тогаш H не е жена, т.е. е маж, од што следува дека G мора да е жена која е сосед со жена, што е спротивно со условот на задачата.

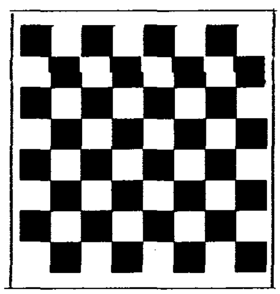
Значи, шефот на салата не може да го направи бараниот распоред на гостите. ■

Задача 02. *Од три момчиња и три девојки секое момче познава точно две девојки и секоја девојка познава точно две момчиња. Докажете дека момчињата и девојките можат да се распоредат по парови, така што секој пар да е составен од познаници.*

Решение. Ќе ги распоредиме момчињата и девојките во две редици на следниот начин. Наспроти момчето M_1 е неговата позничка D_1, а десно од девојката D_1 е другата познаничка D_2 (види цртеж). Девојката D_2 го познава момчето M_1 и уште едно момче M_2, кое ќе го ставиме наспроти D_2. Момчето M_2 ја познава D_2 и уште една девојка. Таа друга познаничка не може да биде D_1, бидејќи во тој случај M_3 и D_3 ќе имаат само по еден познаник (ќе се знаат само меѓу себе) или пак M_1, M_2, D_1, D_2 ќе имаат по три познаници што е спротивно на претпоставката. Значи другата познаничка на момчето M_2 е D_3 и истата да ја поставиме десно од D_2. Бидејќи M_1 и M_2 веќе имаат по две познанички, следува дека M_3 и D_3 се познаваат. Останува уште заклучокот (види од цртежот) дека D_1 и M_3 се познаваат. Одовде следува дека можат да се формираат следните парови на познаници (M_1, D_1); (M_2, D_2) и (M_3, D_3) односно следните парови познаници (M_1, D_2); (M_2, D_3) и (M_3, D_1). ■



Задача 03. *Колку квадрати, различни по големина или по положба, можеме да нацртаме на шаховска табла од 64 квадратни полиња, така што секој од тие квадрати содржи само цели полиња?*



Решение. Секое поле претставува по еден квадрат. Имаме, 64 квадрати од по едно поле на шаховската табла. Земајќи по четири соседни полиња, можеме во првите два реда да нацртаме 7 квадрати од по 4 полиња, потоа во вториот и третиот ред исто толку и т.н. Така добиваме $7 \cdot 7 = 49$ квадрати кои содржат по 4 полиња од шаховската табла. Земајќи по ред по три соседни редови, добиваме квадрати со по 9 полиња. Така во првиот, вториот и третиот ред имаме 6 такви квадрати, а исто толку и во вториот, третиот и четвртиот, и т.н. Според тоа, имаме вкупно $6 \cdot 6=36$ квадрати со по 9 полиња. Така последователно добиваме 25 квадрати со по 16 полиња, 16 квадрати со по 25 полиња, 9 квадрати со 36 полиња, четири квадрати со по 49 полиња и конечно и самата табла е еден квадрат со 64 полиња.

Значи на шаховската табла можеме да нацртаме $64+49+36+25+ +16+9+4+1=204$ квадрати. ■

Задача 04. *Ристана и Драгица собираат поштенски марки. Ристана има шест дупликати, кои ги нема Драгица, а секоја чини по 1 денар. Драгица има четири дупликати, кои ги нема Ристана, а секоја чини 2 денари. Одредете на колку различни начини Ристана и Драгица можат да ги разменат дупликатите, така што секоја размена да биде праведна.*

Решение. За да размената биде праведна, Ристана мора за секоја марка на Драгица да даде две свои. Притоа може да се случи Ристана да замени само еден пар свои марки за една марка или да замени два пара свои марки за две марки или да замени три пара свои марки за три марки на Драгица.

Од своите 6 марки Ристана може да направи 15 различни парови (комбинации): да комбинира прва со втора, прва со трета, прва со четврта, прва со петта, прва со шеста, втора со трета, втора со четврта, втора со петта и т.н. Секој таков пар може да го замени со било која марка на Драгица. Така, ако Ристана заменува само еден пар од своите марки за една марка на Драгица, замената може да се изврши на $15 \cdot 4=60$ различни начини.

Ако Ристана дава по 4 свои марки за 2 марки на Драгица, тогаш кај Драгица има вкупно 6 комбинации, и тоа: прва со втора, прва со трета, прва со четврта, втора со трета, втора со четврта и трета со четврта. Истовремено Ристана може да направи од своите 6 марки вкупно 15 комбинации од по 4 марки, на следниот начин: од вкупно шесте марки ги вади веќе направените комбинации од по две марки и на тој начин добива комбинација од по четири марки. Бидејќи таа има точно шест марки, јасно е дека на овој начин ќе ги добие сите можни комбинации од по четири марки. На крајот, бидејќи на секоја комбинација на Ристана и соодветствува комбинација на Драгица, во овој случај има $15 \cdot 6=90$ праведни размени.

На крајот, ако Ристана ги дава сите свои марки за 3 марки на Драгица, тогаш бидејќи Драгица може да направи четири комбинации од по три марки (прва, втора и трета; прва, втора и четврта; прва, трета и четврта; втора, трета и четврта), во овој случај има само 4 праведни размени.

Значи, бројот на праведните размени е $60+90+4=154$. ■

Задача 05. *Во првата фудбалска лига на Македонија има 18 клубови. Колку фудбалски натпревари се одиграни во рамките на* *натпреварувањето за титулата првак на Македонија во текот на една година, ако секој клуб игра со секој по два натпревари и ниеден натпревар не се повторува?*

Решение. Натпреварите се играат во есенскиот и пролетниот период. Во секој период еден клуб ќе одигра по 17 натпревари, а вкупно се играат $(18\cdot 17):2=153$ натпревари (имаме 18 клуба по 17 натпревари секој клуб, при што секој натпревар го броиме двапати, кај двата противника). Значи во текот на првенството ќе се одиграат вкупно $153\cdot 2=306$ натпревари. ■

Задача 06*. *Една комисија одржала 40 состаноци. На секој состанок присуствувале по 10 членови на комисијата, при што два исти члена присуствувале најмногу на еден заеднички состанок.*

Докажете дека комисијата има повеќе од 60 членови.

Решение. Секој пар членови на комисијата се среќавал на најмногу еден заеднички состанок. На секој состанок присуствувале $(10\cdot 9):2=45$ различни парови. Комисијата се состанала 40 пати и на секој состанок присуствувале различни парови (два исти членови присуствувале најмногу на еден заеднички состанок), па затоа од членовите на комисијата мора да се формираат најмалку $40\cdot 45=1800$ различни парови.

Ако комисија брои 60 (или помалку) членови, тогаш може да се формираат најмногу $(60\cdot 59):2=1770<1800$ парови. Значи комисијата мора да брои повеќе од 60 членови. ■

Задача 07. *На кружница се распоредени 1994 точки, така што 1993 се обоени со црна боја, а една е означена со црвена боја. Да ги разгледаме сите многуаголници со темиња во тие точки. Дали има повеќе многуаголници кои имаат по едно црвено теме, или се повеќе многуаголници кои немаат црвено теме?*

Решение. Да ги разгледаме сите многуаголници кои немаат црвено обоено теме. На секој од нив соодветствува по еден многуаголник кој го добиваме кога црвеното теме го присоединиме со двете негови најблиски темиња на многуаголникот. Значи, сигурно е дека бројот на многуаголниците кои имаат по едно црвено теме не е помал од бројот на многуаголниците кои немаат црвено теме. Понатаму, било кои две црно обоени точки со црвената точка формираат триаголник. Според тоа, бројот на многуаголниците кои имаат едно црвено теме е поголем од бројот на многуаголниците кои немаат црвено теме, и тоа за бројот на триаголниците кои имаат црвено теме, а нив ги има

$$(1993\cdot 1992):2=1985028.$$ ■

Задача 08*. *На еден фудбалски турнир секоја екипа одиграла по еден натпревар со сите останати екипи. Победникот на овој турнир освоил 7 бодови, второпласираниот 5 бодови и третопласираниот освоил 3 бодови. Колку бодови освоил клубот кој бил на последното место?*

Напомена. За победа клубот добива 2 бода, за нерешен резултат се добива 1 бод, а за пораз се добиваат 0 бодови. Ако два клуба соберат ист број бодови, тогаш нивното место на табелата се одредува според разликата на дадените и примените голови во сите одиграни натпревари.

Решение. Нека на турнирот учествувале x екипи. Секоја екипа одиграла (x-1)-натпревар. На натпревар играат по две екипи, па во производот x(x-1) секој натпревар се смета два пати. Според тоа, бројот на одиграни натпревари е (x(x-1)):2.

Во еден натпревар се игра за два бода, па вкупниот број освоени бодови на турнирот е еднаков на x(x-1), т.е. во просек на една екипа имаме x-1 освоени бодови. Ако е x=4, тогаш вкупниот број на бодови е $x(x-1)=4\cdot3=12$. Во нашиот случај вкупниот број бодови не е помал од 7+5+3=15, што значи дека на турнирот учествувале повеќе од 4 екипи (најмалку 5 екипи).

Според условот на задачата, трите првопласирани екипи освоиле вкупно 15 бодови, во просек по 5 бодови на една екипа. Секоја од преостанатите екипи освоила не повеќе од 3 бода (имено толку има третопласираната екипа), па затоа во просек на една екипа имаме помалку од 5 бода, т.е. $x-1<5$, па е $x<6$. Значи биле 5 екипи и тие освоиле x(x-1)=20 бодови.

Последните две екипи заедно освоиле 5 бода но ниедна од нив не освоила повеќе од 3 бода, па значи екипата која била на последното, петтото место, освоила 2 бода. ■

Задача 09. *Колку шестцифрени броеви може да се состават од цифрите* 0,1,2,3,4 *и* 5 *ако секоја цифра се појавува само еднаш и парните цифри да се една до друга?*

Напомена. 0 е парна цифра.

Решение. Кога ќе ги распоредиме парните цифри, непарните цифри можеме да ги распоредиме на преостанатите три места. Притоа, непарните цифри можеме да ги распоредиме на $3\cdot2\cdot1=6$ начини, бидејќи за една цифра имаме 3 можности, потоа за втората цифра имаме 2 можности на преостанатите две места и на крајот за третата цифра ни останува третото слободно место. Парните цифри можеме да ги распоредиме на првите три места на $2\cdot2\cdot1=4$ начини (0 не може да биде на првото место), на второто, третото и четвртото место на $3\cdot2\cdot1=6$ различни начини, и исто толку различни распоредувања на третото, четвртото и петтото место, како и на четвртото, петтото и шестото место.

Конечно, шестцифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата има вкупно $6\cdot(4+6+6+6)=132$. ■

Задача 10. *На колку различни начини може да се состави список кој содржи 7 ученици?*

Решение. На првото место на списокот можеме да ставиме едно од седумте имиња на учениците. Потоа, на второто место можеме да ставиме едно од преостанатите шест имиња на учениците кои не се запишани во списокот, на третото место едно од преостанатите пет имиња на учениците кои не се запишани и т.н. Значи, вкупниот број различни начини на кој може да се состави бараниот список е $7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$. ∎

Задача 11. *На колку различни начини можат околу тркалезна маса да седнат 6 девојчиња и 6 момчиња, така што две личности од ист пол не седат еден до друг?*

Решение. Столиците да ги нумерираме со броевите 1,2,3,4, 5,6,7,8,9,10,11 и 12. Ако едно девојче седи на непарно место, тогаш и сите девојчиња седат на непарните места што значи дека момчињата седат на парните места. Момчињата можеме да ги распоредиме на $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ различни начини на парните места и девојчињата можеме да ги распоредиме на 720 различни начини на непарните места. Бидејќи на секој распоред на момчињата соодветствуваат 720 распореди на девојчињата добиваме $720\cdot720=518400$ различни распоредувања. Исто толку различни распоредувања ќе имаме ако девојчињата седат на парните, а момчињата на непарните места.

Значи вкупниот број различни распоредувања е 1036800. ∎

Задача 12. *На полицата се наоѓаат 10 книги од кои 5 се со математичка содржина, а останатите 5 се од белетристика. На колку различни начини можат да се распоредат книгите ако на првите 5 места се наоѓа белетристичката литература?*

Решение. Првите пет книги можеме да ги распоредиме на $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ различни начини и на исто толку различни начини можеме да ги распоредиме и останатите пет книги. Бидејќи на секое распоредување на првите 5 книги соодветствува произволно распоредување на вторите 5 книги добиваме дека бројот на можните распоредувања е $120\cdot120=14400$. ∎

Задача 13. *На една кружница се дадени 9 различни точки. Колку отсечки, триаголници и четириаголници определуваат дадените точки?*

Решение. Дадените точки определуваат $9\cdot8:2=36$ отсечки.

Секоја отсечка со преостанатите 7 точки определува 7 триаголници, што изнесува $36\cdot7=252$. Бидејќи секој триаголник притоа е три пати земен предвид добиваме дека, бројот на различните триаголници е $252:3=84$.

Секој триаголник со преостанатите 6 точки формира 6 четириаголници, што изнесува $84\cdot6=504$. Бидејќи секој четириаголник е земен предвид четири пати, бројот на различни четириаголници е $504:4=126$. ∎

Задача 14. *Во едно одделение има 25 ученици. На колку различни начини може да се избере одделенска заедница од три члена?*

Решение. За првиот член имаме 25 кандидати, за вториот член имаме 24 кандидати и за третиот член имаме 23 кандидати. Значи имаме $25\cdot24\cdot23=13800$ комбинации. Бидејќи одделенската заедница ABC е иста со одделенските заедници ACB, BAC, BCA, CAB и CBA добиваме дека вкупниот број на одделенски заедници е еднаков на 13800:6=2300. ■

Задача 15. *Во една просторија има 6 светилки. Ако секоја светилка може, но не мора да свети и сметаме дека просторијата е осветлена ако свети најмалку една светилка, определете на колку различни начини може да биде осветлена просторијата.*

Решение. Ако гори по една светилка просторијата може да биде осветлена на 6 различни начини. Ако горат по две светилки просторијата може да биде осветлена на $6 \cdot 5:2=15$ различни начини (делиме со 2, бидејќи комбинацијата на светилките A и B ја сметаме иста со комбинацијата на светилките B и A). Ако горат по три светилки ќе имаме $6 \cdot 5 \cdot 4:(3 \cdot 2)=20$ различни начини. Ако горат по четири светилки, тогаш ќе имаме $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3:(4 \cdot 3 \cdot 2)=15$ различни начини. Конечно ако горат по пет светилки ќе имаме $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2:(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)=6$ различни начини, а ако горат сите шест светилки ќе имаме еден начин на осветлување.

Според тоа, број на сите можни различни осветлувања ќе биде $1+6+15+20+15+6=63$. ■

Задача 16. *Во едно населено место се наоѓаат 7 семафори со три сигнални бои: црвена, жолта и зелена. На колку различни начини во секој момент можат да бидат распоредени светлата на семафорите?*

Решение. Ако работи само првиот семафор имаме 3 можности. Ако работи и вториот семафор за него имаме 3 можности и за секоја можност по 3 можности од првиот семафор, т.е. $3 \cdot 3$ можности. Продолжувајќи со вклучување на секој следен семафор бројот на можностите се зголемува 3 пати, па затоа за седумте семафори имаме $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3=2187$ начини. ■

Задача 17. *Спортската прогноза содржи 13 парови. Прогноза на резултатите се врши со помош на цифрите 1, 2 и 0. Колку најмалку колони треба да пополниме ако сакаме да бидеме сигурни дека имаме тринаесет погодоци?*

Решение. Аналогно на претходната задача, за да бидеме сигурни во сите тринаесет погодоци треба да пополниме

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3=3^{13}=1594323$$

комбинации. ■

Задача 18. *Колку има петцифрени броеви запишани со цифрите 0, 1 и 2 такви што барем две соседни цифри им се еднакви?*

Решение. Најпрво да го определиме бројот на сите петцифрени броеви запишани со цифрите 0, 1 и 2. На првото место можат да бидат само цифрите 1 и 2, па според тоа имаме две можности. За второто, третото, четвртото и петтото место имаме по три можности, па затоа бројот на сите петцифрени броеви запишани со дадените цифри е

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3=162.$$

Сега да го определиме бројот на петцифрените броеви кај кои соседните цифри се различни. За местото на десетилјадите имаме две можности (1 или 2), за секоја од нив за местото на илјадите имаме две можности, потоа за местото на стотките за секоја претходна можност имаме две можности и т.н. Значи бројот на сите петцифрени броеви кои се запишани со цифрите 0,1,2 и имаат различни соседни цифри е еднаков на

$$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32.$$

Според тоа, петцифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата има 162-32=130. ■

Задача 19. *Борко, Васко, Димитрија, Живко и Јанко играат домино, двајца против двајца. Во секоја игра слободниот играч е судија. Притоа, кога еден од нив е судија останатите четворица играат онолку партии колку што е потребно секој од нив да биде по еднаш партнер со секој од другите тројца.*

Колку партии вкупно се одиграни?

Решение. Да ги означиме играчите со почетните букви на нивните имиња.

Секој играч е судија, додека останатите четворица ги променат партнерите. Така Б (Борко) е судија во следните партии: ВД против ЖЈ, ВЖ против ДЈ, ВЈ против ДЖ, т.е. трипати. Значи, секој играч е трипати судија, па затоа вкупно се изиграни $5\cdot3=15$ партии. ■

Задача 20. *Тројца ортаци, Ѓорче, Леонид и Никола имаат заедничка каса, но не сакаат ниеден од нив сам да ја отвори, туку сакаат касата да може да биде отворена ако двајца од нив се присутни. Колку брави треба да има касата и како треба на ортаците да им се поделат клучевите на тие брави?*

Решение. Касата треба да има три брави. Ѓорче ќе има клучеви од првата и втората брава, Леонид од втората и третата брава и Никола од првата и третата брава. ■

Задача 21*. *На шаховскиот турнир Игнат и Никита ги одиграле сите партии од првите 5 кола, а потоа го напуштиле турнирот. На турнирот се одиграни вкупно 38 партии. Дали Игнат и Никита играле меѓусебно?*

Решение. На турнирот имало повеќе од 9 учесници, бидејќи ако биле 9, тогаш би се играле 9 кола и во секое коло по 4 партии, односно вкупно 36 партии, 2 партии помалку отколку одиграните на турнирот. Ако турнирот започнал со 10 учесници, тогаш треба да се играат 9 кола и во секое коло по 5 партии. Во првите 5 кола учествувале сите натпреварувачи и се одиграни $5\cdot5=25$ партии. До крајот треба да се одиграат уште 4 кола. Ако Игнат и Никита играле меѓу себе, тогаш до крајот во секое коло се играат по три партии, односно 12 партии, бидејќи секогаш двајца учесници, кои треба да играат со Игнат и Никита, ќе бидат слободни. Тогаш вкупно би се одиграле 37 партии. Ако Игнат и Никита не играле меѓу себе, тогаш нивната партија е предвидена во едно од преостанатите 4 кола. Во тоа коло останатите учесници на турнирот ќе одиграат 4 партии, а во другите 3 кола по 3 партии, т.е. вкупно 13 партии, или до крајот од турнирот ќе се одиграат вкупно 38 партии. Значи, Игнат и Никита не ја одиграле меѓусебната партија. ■

Задача 22.* *На еден фудбалски турнир* 18 *екипи играле* 8 *кола, и секоја екипа играла со различни екипи во секое коло. Докажете дека постојат три екипи, кои меѓу себе не играле ниеден натпревар.*

Решение. Нека екипите ги означиме со $E_1, E_2, \ldots, E_{18}$. За екипата E_1 постојат девет екипи, на пример, $E_2, E_3, \ldots, E_{10}$ кои не играле со E_1 ниеден натпревар. Меѓу екипите $E_2, E_3, \ldots, E_{10}$ постојат две екипи, на пример, E_2 и E_3 кои меѓу себе не одиграле натпревар. Навистина, ако екипите $E_2, E_3, \ldots, E_{10}$ играле на турнирот секоја со секоја, тогаш тие заедно треба да одиграле $(9\cdot8):2=36$ натпревари. Од друга страна, ако овие девет екипи во сите кола играле само меѓу себе, тогаш тие би одиграле точно $8\cdot4=32<36$ натпревари (9 екипи во едно коло можат да одиграат 4 натпревари). Затоа постојат две екипи на пример E_2 и E_3 кои меѓу себе не одиграле натпревар. Конечно, екипите E_1, E_2 и E_3 се три екипи кои меѓу себе не одиграле натпревар, што требаше да докажеме. ■

VII.2 ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Принципот на Дирихле е еден од наједноставните елементарни комбинаторни принципи, но тој многу често се користи во решавање на разни комбинаторни задачи. Затоа истиот ќе го обработиме во овој посебен дел. Наједноставно кажано, тој принцип тврди дека ако, на пример, три папагали се сместени во два кафези, тогаш барем во еден кафез ќе има барем два папагала.

Задача 01. *(Принцип на Дирихле) Нека* n *е природен број. Ако* n+1 *предмети се распоредени на произволен начин во* n *кутии, тогаш барем во една кутија има барем два предмета.*

Решение. Доказот е едноставен и се спроведува со спротивност. Ако претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по еден предмет, бидејќи има само n кутии, ќе следува дека во кутиите се распоредени најмногу n предмети, што противречи на претпоставката дека се распоредени n+1 предмети. ■

Забелешка: Принципот на Дирихле кажува дека постои кутија во која има барем два предмети, но не дава начин, т.е. алгоритам како таа кутија да се најде.

Задача 02. *Да се докаже дека меѓу 367 луѓе секогаш има барем двајца што имаат заеднички роденден.*

Решение: Нека S е даденото множество луѓе и нека T е множеството денови во годината. Бидејќи во годината има помалку од 367 денови според принципот на Дирихле, следува дека постојат барем два члена од S што имаат заеднички роденден. ■

Задача 03. *(а) Во полињата на квадрат 3x3 распоредени се броевите 1,2 и 3. Дали е можен распоред при кој збирот на броевите во секоја колона, редица и дијагонала да биде различен?*

(б) Дали можат броевите -1,0,1 да се распоредат во квадратна таблица 5x5, така што збирот на броевите во секоја колона, редица и дијагонала да биде различен?

Решение. (а) Редици, колони и дијагонали во квадрат 3x3 има вкупно 8, а можни збирови се 7 (најмалиот е 1+1+1=3, а најголемиот е 3+3+3=9). Според принципот на Дирихле мора меѓу збировите на броевите во редиците, колоните и дијагоналите да има барем два еднакви.

(б) Збир на пет броеви од множеството $\{-1,0,1\}$ може да биде цел број m таков што $-5\le m\le 5$. Бидејќи имаме вкупно 11 збирови кои треба да се распределат во 12 колони редици и дијагонали, мора барем два збира да бидат еднакви. ■

Задача 04. *На еден шаховски турнир учествувале* n *шахисти, при што секој шахист играл со секој шахист по една партија. Докажете дека во секој момент на турнирот постојат барем двајца шахисти со еднаков број до тогаш одиграни партии.*

Решение. Можни се два случаи:

(а) постои барем еден шахист кој играл со сите други шахисти, и

(б) не постои шахист кој ги играл сите други шахисти.

Во првиот случај бројот на партиите кои секој шахист ги одиграл во некој момент припаѓа на множеството $\{1,2,...,n-1\}$, а во вториот случај е елемент на множеството $\{0,1,...,n-2\}$.

Бидејќи и двете множества имаат по n-1 елемент во секој момент постојат барем двајца учесници на турнирот со еднаков број одиграни партии. ■

Задача 05. *Докажете дека постои природен број кој е делив со* 1994, *а првите десет цифри му се* 1234567890.

Решение. Да ги разгледаме следните 1995 броеви

$a_1 = 1234567890$

$a_2 = 12345678901234567890$

.
.
.

$a_{1995} = 12345678901234567890...1234567890$ (1995 пати се повторува групата цифри 1234567890).

При делење на броевите $a_1, a_2, ..., a_{1995}$ со 1994 можеме да ги добиеме остатоците 0,1,2,...,1993, т.е. најмногу 1994 различни остатоци меѓу вкупно 1995 остатоци. Значи барем два остатоци се совпаѓаат и нека се тоа остатоцита на броевите a_i и a_j, $a_i>a_j$. Значи, бројот a_i-a_j се дели со 1994 и има облик

$$1234567890\ldots1234567890\underbrace{000\ldots\ldots000}_{10(i-j)\text{-нули}}$$

а групата цифри 1234567890 се повторува (i-j) пати. ■

Задача 06. *Дадени се пет произволни природни броеви. Докажи, дека помеѓу нив постојат барем два броја, такви што нивната разлика е делива со 4.*

Решение. Секој природен број при делење со 4 дава остаток 0,1,2 или 3. Значи, постојат само четири можности. Според тоа, помеѓу пет природни броеви барем два ќе имаат ист остаток при делење со 4, а тогаш нивната разлика е делива со 4. ■

Задача 07. *Дадени се 5 произволни цели броеви. Докажете дека помеѓу нив постојат барем два чија разлика е делива со 3.*

Решение. Множеството на цели броеви може да се подели во три класи броеви, чии претставници се од облик: $3m$, $3n+1$ и $3p+2$ каде m, n и p се цели броеви.

Помеѓу 5 броеви барем два мора да припаѓаат на иста класа и нивната разлика е делива со 3. Имено, $3m_1-3m_2=3(m_1-m_2)$; $(3n_1+1)-(3n_2+1)=3(n_1-n_2)$ и $(3p_1+2)-(3p_2+2)=3(p_1-p_2)$. ■

Задача 08. *Ако* 1994 *природни броеви ги подредиме произволно во низа, тогаш постојат неколку последователни членови на таа низа чиј збир е делив со* 1994. *Докажете!*

Решение. Нека дадените природни броеви се

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_{1994}.$$

Да ги разгледаме броевите

$$A_1=n_1,$$
$$A_2=n_1+n_2,$$
$$A_3=n_1+n_2+n_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{1994}=n_1+n_2+\ \ldots\ +n_{1994}.$$

Ако некој од овие броеви е делив со 1994, тогаш тврдењето е докажано. Затоа да претпоставиме дека ниеден од броевите A_1, ..., A_{1994} не е делив со 1994. Тогаш остатокот на секој од овие броеви при делење со 1994 е некој број од множеството $\{1,2,\ldots,1993\}$. Бидејќи имаме 1994 такви остатоци, постојат два броја A_i и A_j $(i<j)$, кои при делење со 1994 даваат ист остаток. Значи $1994|(A_j-A_i)$, т.е. $1994|(n_{i+1}+n_{i+2}+\ \ldots\ +n_j)$. ■

Задача 09. *Нека* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *се цели броеви. Тогаш постојат* $p,q\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, $p<q$, *така што* $n\,|\,a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots+a_q$.

Решение. Ги формираме збировите: $b_1=a_1$, $b_2=a_1+a_2$, ..., $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Ако еден од овие броеви, на пример b_i е делив со n, тогаш решение на задачата е p=0, q=i. Нека ниеден од броевите не е делив со n и за секој $1\le i\le n$, $b_i=c_i\cdot n+r_i$ при што $0<r_i<n$. Бидејќи има n остатоци $r_1, r_2, \ldots, r_n$, а тие можат да примат n-1 вредности $1,2,\ldots,n-1$, според принципот на Дирихле, следува дека барем два од тие остатоци се еднакви, т.е. постојат p<q такви што $r_p=r_q$, а тоа е и бараното решение, бидејќи

$$a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots+a_q = b_q-b_p = (c_q-c_p)\cdot n\ . \ \blacksquare$$

Задача 10. *Нека* n *е природен број. Докажете дека од произволни* n+1 *цели броеви, може да се изберат два броја така што нивната разлика да е делива со* n.

Решение. Најпрво да забележиме дека за секој цел број k, постојат (еднозначно определени) цел број s и $r\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, така што $k=s\cdot n+r$. Навистина, знаеме дека ова важи кога k е природен број. Ако k е цел негативен број или 0, тогаш постои цел број m така што k+nm е природен број. Тогаш постојат (еднозначно определени) цел број s' и $r\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ така што $k+nm=s'\cdot n+r$. Но од овде е $k=(s'-m)\cdot n+r=s\cdot n+r$ каде s е цел број. Се договараме да велиме во овој случај дека s е количникот, а r е остатокот при делењето на целиот број k со бројот n. Да ги разгледаме сега остатоците на дадените n+1 броеви при делење со n. Тоа се n+1 броеви, а секој од нив е еден од следните n броеви: $0,1,2,\ldots,n-1$. Затоа ќе постојат два броја кои при делење со n имаат ист остаток, а од овде нивната разлика е делива со n. ■

Задача 11. *а) Докажете дека за секој природен број* n *постои барем еден број од облик* 777...77700...000 *(во декаден запис), кој е делив со* n.

б) Докажете дека за секој природен број n *кој е заемно прост со* 10, *т.е.* $2\nmid n$ *и* $5\nmid n$, *постои барем еден број од облик* 777...777 *(во декаден запис), кој е делив со* n.

Решение. а) Да ги разгледаме следните n+1 броеви

$$7,\ 77,\ 777,\ \ldots\ ,\ \underbrace{777\ldots777}_{n+1\text{-сед.}}$$

Според претходната задача, меѓу нив постојат барем два броја чија разлика е делива со n. Но со одземање на помалиот од поголемиот од тие два броја се добива број од облик 777...77700...000, и со тоа задачата под а) е решена.

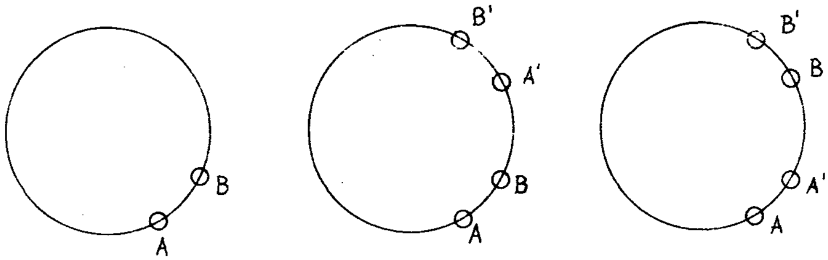
б) Користејќи го условот под а) добиваме дека постои број од облик 777...77700...000 кој е делив со n. Бидејќи $2\nmid n$ и

$5\nmid n$, со бришење на нулите од овој број се добива број 777...777 кој повторно е делив со n. ■

Задача 12*. *На дворот на кралот Артур се собрале* 2n *витези. Некои помеѓу нив се скарани. Познато е дека секој од нив е скаран со најмногу* (n-1) *витез. Докажете дека кралскиот советник Мерлин може витезите да ги распореди околу тркалезната маса, така што еден до друг не седат скарани витези.*

Решение. При решавањето на оваа задача за пар витези кои се скарани ќе го користиме терминот непријатели, а за оние кои не се скарани терминот пријатели.

Најпрво произволно да ги разместиме витезите околу тркалезната маса. Ако некаде еден до друг седат два непријатели ќе докажеме дека може да ги разместиме така што бројот на вакви парови скарани витези кои седат еден до друг, ќе се намали.



цртеж а цртеж б цртеж в

Нека два непријатели A и B седат еден до друг, при што B седи од десната страна на A (цртеж а). Тврдиме дека може да се најде место на масата каде пријател на витезот B седи десно од пријател на витезот A. Навистина, пријатели на витезот A нема помалку од n, па и местата кои се од нив десно исто така не се помалку од n, а според условот на задачата витезот B нема повеќе од (n-1) непријатели. Значи, постои место на кое десно од A' (пријател на витезот A) седи B' (пријател на витезот B), цртеж б). Сите витези кои на масата седат на делот од B надесно од A' (вклучувајќи ги и нив) ќе ги преместиме така да седнат во обратниот редослед (цртеж в). Јасно е дека при тоа бројот на паровите непријатели, кои седат еден до друг, ќе се намали за 1 (ако се A' и B' пријатели) или дури и за 2 (ако се A' и B' непријатели). ■

Задача 13. *Докажете дека во произволно множество на луѓе, постојат барем двајца кои имаат ист број на познаници во тоа множество на луѓе.*

Решение. Да претпоставиме дека тоа множество се состои од n луѓе. Можен е само еден од следните два случаи:

(i) Секој човек од тоа множество има барем еден познаник;

(ii) Постои барем еден човек кој никого не познава.

Ако важи (i), тогаш секој човек има 1,2,3,... или n-1 познаници, а бидејќи има n луѓе, ќе постојат двајца кои имаат ист број на познаници.

Нека важи (ii). Ако постојат барем двајца кои немаат познаници, тогаш постојат двајца кои имаат ист број (0) познаници. Затоа да претпоставиме дека постои само еден човек кој никого не познава. Тогаш останатите n-1 луѓе имаат по 1,2,3,... или n-2 познаници, па затоа меѓу нив ќе постојат двајца со ист број на познаници. ■

Задача 14*. *Докажете дека меѓу* n+1 *различни природни броеви помали од* 2n *може да се изберат три, такви што еден од нив да е еднаков на збирот од останатите два броја.*

Решение. Нека броевите се

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1}.$$

Ставаме $A=\{k_2-k_1, k_3-k_1, \dots, k_{n+1}-k_1\}$ и $B=\{k_2, k_3, \dots, k_{n+1}\}$. Секое од множествата се состои од по n (различни) природни броеви помали од 2n. Заедно се 2n природни броеви помали од 2n. Затоа помеѓу тие 2n броеви постојат два кои се еднакви. Јасно е дека тие припаѓаат на различни множества. Значи постојат броеви i и j такви што

$$k_i-k_1=k_j, \quad \text{т.е.} \quad k_i=k_1+k_j.$$

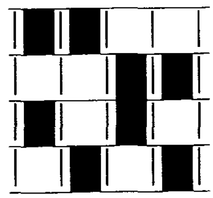
Забелешка. Интересно е да се забележи дека меѓу n различни природни броеви помали од 2n, не може секогаш да се изберат три броја така што еден од нив е еднаков на збирот од останатите два. Таков е на пр. изборот n,n+1,...,2n-1. ■

Задача 15. *Нека* n *е природен број и да ја разгледаме низата од петцифрени броеви кои ги претставуваат последните пет цифри на броевите* $n, n^2, n^3, n^4, \dots$ *На пример при* n=25 *тоа е низата* 00025, 00625, 15625, 90625, 65625,... *Докажете, дека почнувајќи од некој член оваа низа е периодична.*

Решение. Постојат само 10^5 можности за добиените петцифрени броеви, па затоа меѓу првите 10^5+1 членови на низата ќе има два исти члена, на пример i-тиот и j-тиот член на низата (i<j). Но тогаш (i+1)-от член на низата е ист со (j+1)-от член на низата, (i+2)-от член на низата е ист со (j+2)-от член на низата и т.н. Значи низата е периодична. ■

Задача 16*. *Квадрат со страна* 5 *е поделен на* 25 *единични квадратчиња и секој од нив е обоен со една од две бои. Докажете дека постојат четири еднобојни квадрати чии центри се темиња на правоаголник со страни паралелни со страните на квадратот. Докажете дека тврдењето не важи за квадрат со страна* 4.

Решение. Нека спомнатите бои во задачата се црна и бела. Да ги именуваме редовите на таблата со 1,2,3,4 и 5, а колоните со a,b,c,d и e независно од редоследот. Во првиот ред барем три полиња се обоени со иста боја. Нека се тоа a1,b1 и c1 и нека се обоени бело. Ако две од полињата a2, b2, c2 се обоени бело, тогаш бараниот правоаголник е најден. Слично важи и за редовите 3, 4 и 5. Затоа, да претпоставиме дека во секоја од следните четири тројки a2, b2, c2; a3, b3, c3; a4, b4, c4 и a5, b5, c5, има барем по две црни полиња. Бидејќи има само 3 различни можности на распоредување на два елементи на три полиња, следува дека постојат две од тие четири тројки за кои црните полиња се еднакво распоредени. Според тоа, и во овој случај, бараниот правоаголник е најден.



Дека тврдењето на задачата не важи за квадрат со страна 4 се гледа од боењето на цртежот десно.■

Принципот на Дирихле можеме да го искажеме и во поопшт облик, што е направено во следната задача.

Задача 17. *(Принцип на Дирихле) Нека* $k\cdot n+r$ *предмети,* $r\geq1$ *се сместени во* n *кутии. Тогаш барем во една кутија има барем* $k+1$ *предмети.*

Решение. Доказот е едноставен и се спроведува со спротивност. Ако претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по k предмети, бидејќи има n кутии, ќе следува дека во кутиите се распоредени најмногу $n\cdot k$ предмети, што противречи на претпоставката дека се распоредени $n\cdot k+r$ предмети.■

Задача 18. *Во одделението имало 30 ученици и сите работеле тест. Еден од нив, Филип, направил 13 грешки работејќи го тестот. Останатите направиле помалку грешки. Докажете дека барем три ученици направиле ист број на грешки (може да има ученици кои не направиле грешка).*

Решение. Останатите 29 ученици направиле $0,1,2,\dots,12$ грешки, па затоа ќе ги поделиме во 13 групи: во група без грешки, со една грешка, со две грешки, ... , со 12 грешки. Бидејќи $29=2\cdot13+3$, јасно е дека во некоја од 13-те групи мора да има повеќе од 2 ученици. Затоа постојат најмалку три ученици кои направиле ист број на грешки. ■

Задача 19. *Во Република Македонија има околу 2150000 жители и на главата на секој од нив има не повеќе од 300000 влакна коса. Докажете дека во Македонија има барем 8 луѓе со ист број влакна на главата.*

Решение. Сите жители ќе ги распределиме во групи според бројот на влакна на главата. Вакви групи има 300001 т.е. група со 0 влакна, група со 1 влакно,..., група со 300000 влакна на главата, а луѓе има 2150000. Бидејќи $2150000=7\cdot300001+49993$, заклучуваме дека мора да постои група во која ќе има барем 8 луѓе со ист број влакна на главата. Доколку тоа не е случај во секоја група ќе има најмногу по 7 луѓе, па нивниот број не надминува 2100007, а тоа противречи на бројот на жителите на Републиката. ■

Задача 20. *Во едно одделение 40 ученици правеле по три писмени задачи. Никој не добил оценка помала од 3 и секој до-*

бил по три различни оценки. Александар забележал дека во одделението има најмалку 7 ученици кои имаат иста оценка не секоја од трите писмени задачи.

Дали Александар е во право?

Решение. За секој ученик постојат 6 можности, т.е. дека ги добил оценките: (3,4,5), (3,5,4), (4,3,5), (4,5,3), (5,3,4) и (5,4,3), па ќе ги распоредиме во 6 групи. Во одделението има 40 ученици, значи повеќе од 36, па затоа во некоја од шесте групи мора да има повеќе од 6 ученици, т.е. најмалку 7 ученици. Според тоа, Александар бил во право. ■

Задача 21*. *Седумнаесет научници се допишуваат, секој со секого на три различни теми. Секој пар се допишува само на по една тема. Докажете дека постојат барем три научници, кои меѓусебно се допишуваат на една иста тема.*

Решение. Да избереме произволен научник од групата од 17. Бидејќи тој се допишува со останатите 16, а преписката се врши на три теми, постои барем една тема за која тој се допишува со барем 6 од останатите научници. Имено, кога тој за секоја тема би се допишувал со не повеќе од 5 научници, со оглед на тоа дека постојат три теми, вкупниот број на останатите научници нема да биде поголем од 15, што не е можно.

Да избереме една таква група од 6 научници со која избраниот научник се допишува на иста тема. Ако помеѓу овие 6 научници постојат барем двајца кои меѓу себе се допишуваат на истата тема како и со избраниот, тогаш тие заедно со избраниот научник се бараните тројца научници. Ако тоа не е точно, тогаш сите 6 научници помеѓу себе се допишуваат само на преостанатите две теми. Да избереме еден од тие шест научници. Помеѓу преостанатите 5 научници постојат барем тројца со кои тој се допишува на една иста тема (останаа само две теми). Ако барем двајца од тие тројца се допишуваат на истата тема како и со него, тогаш со него ја сочинуваат бараната тројка научници. Во спротивно, сите тројца се допишуваат на преостанатата една тема, па повторно ја имаме бараната тројка.

Значи, бараната тројка научници која се допишува на иста тема секогаш постои, што и требаше да докажеме. ■

Задача 22. *Според пописот во* 1991 *год. во Р. Македонија живееле* 2150000 *жители во* 5990 *населени места. Докажете дека постојат барем две населени места со еднаков број жители.*

Решение. Ако во сите населени места бројот на жителите е различен, тогаш најмалиот можен број на жители ќе изнесува

$$1+2+3+\ldots+5988+5989+5990.$$

Бидејќи $1+5990=2+5989=3+5988=\ldots=5991$, и како овие збирови ги има $5990:2=2995$, вкупниот збир ќе изнесува $2995\cdot 5991=$ $=17943045$. Значи, ако во сите населени места во Македонија има различен број на жители, тогаш Македонија треба да има најмалку 17943045 жители, што е над 8 пати повеќе од вистинскиот број. Од тука заклучуваме дека постојат барем две населени места во Македонија со еднаков број на жители. ■

Задача 23.* *Дадени се 10 различни природни броеви помали од 26. Докажете дека меѓу сите можни разлики на парови различни броеви од дадените 10 броја, постојат барем три еднакви разлики.*

Решение. Дадените 10 броја да ги подредиме по големина, т.е. нека е

$$1 \le n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6 < n_7 < n_8 < n_9 < n_{10} < 26.$$

Ќе докажеме дека помеѓу следните девет разлики

$$n_2-n_1, n_3-n_2, n_4-n_3, n_5-n_4, n_6-n_5, n_7-n_6, n_8-n_7, n_9-n_8 \text{ и } n_{10}-n_9$$

има барем три еднакви броеви, со што задачата ќе биде решена. Ако меѓу овие 9 разлики нема барем три еднакви, тогаш меѓу нив има најмногу две единици, две двојки, две тројки, две четворки и две петки. Од овде добиваме дека

$$n_{10}-n_1=(n_{10}-n_9)+(n_9-n_8)+(n_8-n_7)+(n_7-n_6)+(n_6-n_5)+(n_5-n_4)+$$
$$+(n_4-n_3)+(n_3-n_2)+(n_2-n_1) \ge \underbrace{1+1+2+2+3+3+4+4+5}_{9 \text{ собирци}} = 25,$$

т.е. дека $n_{10} \ge n_1+25 \ge 26$, што противречи на фактот дека $n_{10}<26$. Значи меѓу горните 9 разлики мора да има барем три еднакви. ■

Задача 24.* *Определете ги сите можности за запишување на бројот 1995 како збир од 1983 непарни природни броеви.*

Забелешка. Распоредот на броевите во збирот не е битен, на пример, 3+1 И 1+3 е една можност.

Решение. Нека $1995=a_1+a_2+\ldots+a_{1983}$, каде што $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge$ $\ge a_{1983}$, се непарни природни броеви. Лесно се докажува дека $a_7=a_8=\ldots=a_{1983}=1$. Според тоа бараните можности се всушност можностите за запишување на бројот 18 како збир од 6 непарни природни броеви. Бидејќи $4 \cdot 5>18$ и $15+5>18$, се добива дека a_4, a_5, a_6 можат да бидат 1 или 3, а $3 \le a_1 \le 13$. Со комбинирање на броевите 1,3,5,7,9,11 и 13 се добиваат бараните можности:

3+3+3+3+3+3	5+3+3+3+3+1	5+5+3+3+1+1
5+5+5+1+1+1	7+3+3+3+1+1	7+5+3+1+1+1
7+7+1+1+1+1	9+3+3+1+1+1	9+5+1+1+1+1
11+3+1+1+1+1 и	13+1+1+1+1+1. ■	

Задача 25. *Во квадрат со страна* 1m *на произволен начин се сместени* 51 *точка. Докажете дека постојат три точки, меѓу овие* 51 *точка, кои можат да се покријат со круг чиј радиус е* $1/7$m.

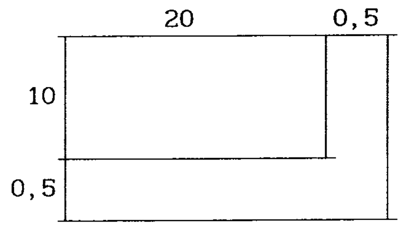
Решение. Квадратот да го поделиме на 25 еднакви квадрати со страна 0,2m. Според принципот на Дирихле, ќе постои квадрат со страна 0,2m кој ќе содржи барем три од дадените 51 точка. Избираме три од тие точки. Тие се покриени со квадрат со страна 0,2m, а тој квадрат може да се покрие со круг со радиус $1/7$m, бидејќи $2/7>0,2\cdot\sqrt{2}$. ■

Задача 26. *Во круг со радиус* 1m *на произволен начин се сместени* 51 *точка, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажете, дека постојат три точки меѓу нив кои формираат триаголник чија плоштина е помала од* 12,6 dm^2.

Решение. Кругот го делиме на 25 складни исечоци чиј централен агол е $360^\circ:25=14,4^\circ$. Според принципот на Дирихле, ќе постои исечок во кој се наоѓаат барем три точки. Избираме произволни три од тие точки. Плоштината на триаголникот што тие го формираат е помала од плоштината на кружниот исечок. Плоштината на кружниот исечок е $\frac{\pi}{25}m^2<0,126m^2=12,6dm^2$. ■

Задача 27. *Во една шума во облик на квадрат со страна* 1km, *растат* 4550 *борови стебла со дијаметар не поголем од* 50cm. *Докажете дека во таа шума постои правоаголна површина со димензии* 10mx20m *на која нема борово стебло.*

Решение. Шумата треба да ја покриеме со дисјунктни правоаголници со димензија 10mx20m, но тие правоаголници не смеат да бидат "на растојание" помало од 0,5m бидејќи во спротивно едно борово стебло може да има делови во два такви правоаголника. Затоа во шумата ќе сместуваме помошни правоаголници со димензии 10,5mx20,5m. Како 1000:10,5=95,238 и 1000:20,5=48,78, во шумата можат да се сместат 95x48=4560 помошни правоаголници. Притоа соодветните правоаголници не може да имаа заеднички борови стебла. Било како да се распоредат боровите стебла во шумата, секогаш ќе останат барем 10 правоаголници во кои нема да има борови стебла. ■



Задача 28. *Еден ученик на часот по ликовно воспитување обоил дел од својот лист. Знаејќи дека димензијата на листот е* 21cmx30cm *и дека ученикот обоил површина од* 314cm^2, *докажете дека постојат барем две необоени точки на листот, кои се симетрични во однос на една од симетралите на листот.*

Решение. Да го преклопиме листот вдолж една од неговите симетрали. Претпоставувајќи дека боењето е свежо, со тоа преклопување на листот ќе се обојат уште најмногу 314cm^2. Со тоа на листот ќе бидат обоени не повеќе од 628cm^2, а како плоштината на листот е 630cm^2, ќе останат необоени барем 2cm^2. Избираме произволна необоена точка од листот. Тогаш и нејзината симетрична точка во однос на симетралата на преклопот на листот ќе биде исто така необоена. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. V.STOJANOVIĆ: Matematiskop 2, Naučna kniga, Beograd 1985.
2. V.ANDRIĆ: Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DM Srbije, Beograd 1991.
3. A.ZOLIĆ: Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Mat.list, Beograd 1990.
4. Г.И.ЗУБЕЛЕВИЧ: Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва 1967.
5. Н.П.АНТОНОВ, М.Я.ВЫГОДСКИЙ, В.В.НИКИТИН, А.И.САНКИН: Сборник задач по елементарной математике, Москва 1961.
6. V.STOJANOVIĆ, A.ZOLIĆ: Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DM Srbije, Beograd 1991.
7. И.JAHEB, К.МИШЕВСКИ: Десет години републички натпревари по математика (основни училишта), Нумерус, Скопје 1985.
8. Регионални натпревари по математика за учениците во средните училишта во СР Македонија, Библиотека Математичка школа бр.10, Скопје 1988.
9. Републички натпревари по математика за учениците во средните училишта во СР Македонија, Библиотека Математичка шко-школа бр.8, Скопје 1977.
10. Републички натпревари по математика за учениците во средните училишта во СР Македонија, Библиотека Математичка школа бр.9, Скопје 1988.
11. Натпревари по математика за учениците од средните училишта во СФР Југославија во 1989год, Библиотека математичка школа бр. 12, Скопје 1989.
12. Популарно математичко списание НУМЕРУС, комплетна едиција, СДМИ на Македонија, Скопје.
13. Математечко списание СИГМА, комплетна едиција, СДМИ на Македонија, Скопје.
14. R.Đurković: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DM Srbije, Beograd 1991.
15. Д.ДИМОВСКИ, К.ТРЕНЧЕВСКИ, Р.МАЛЧЕСКИ, Б.ЈОСИФОВСКИ: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје 1993.
16. Zbirka zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola Srbije u 1993. godini, DMS, Valjevo 1993.
17. Шчепан Еленски: Лиливати, Издательство Техника, София 1967 (превод од полски).
18. Я.И.Перельман: Занимательная алгебра, Издательство Наука, Москва 1967.
19. Я.И.Перельман: Живая математика, Издательство Наука, Москва 1967.
20. Z.K.Kostić: Između igre i matematike, Tehnička knjiga, Beograd 1963.
21. И.Тюфекчиев,Х.Лесов: Задачи за извънкласна работа по математика в IV и V клас, София 1985.

С О Д Р Ж И Н А