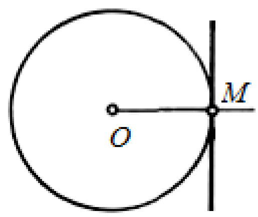
Алија Муминагиќ, Данска

ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА КОНСТРУИРАЊЕ НА ТАНГЕНТИ НА КРУЖНИЦА ПОВЛЕЧЕНИ ОД ТОЧКА НАДВОР ОД НЕА

На училиште научи дека тангента на кружница е права која има една и само една заедничка точка со кружницата и дека тангентата на кружницата е нормална на оној радиус на кружницата кој го поврзува центарот на кружницата со допирната точка на тангентата (допирен радиус).

Врз основа на ова не е тешко да се конструира тангента на кружницата $k(o,r)$ во некоја нејзина точка M. При оваа конструкција прво треба да се повлече радиусот OM, ап потоа да се конструира нормала на OM во точката M (цртеж десно).



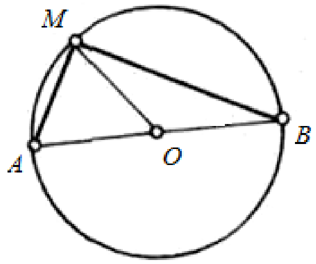
Меѓутоа, често пати е потребно да се конструираат оние тангенти на дадена кружница за кои не се знае допирната точка, но за кои се знае дека минуваат низ дадена точка, која е надвор од кружницата. Во практиката најчесто тоа се прави така што еден раб на линијарот го „допираме“ до кружницата и линијарот го движиме се додека тој раб не мине низ дадената точка. Но, тоа не е точен начин на конструкција на тангентата повлечена од дадената точка на кружницата и за таков не се смета дури и ако имаме идеално точни инструменти за цртање.

За точно да се изврши оваа конструицја, потребно е прво да се определи допирната точка на секоја тангента и кружницата и тоа како пресек на две прави, права и кружница или две кружници. За тоа постојат повеќе начини и во следните разгледувања ќе прикажеме некои од нив. Но, пред тоа ќе докажеме една теорема која е потребна за нашите разгледувања.

Теорема 1 (Талес). Секој периферскиот агол агол на кружницата конструиран над нејзиниот дијаметар е прав агол.

Доказ. Нека M произволна точка од кружницата чиј дијаметар е AB. Триаголниците AOM и BOM се рамнокраки, при што

$$\measuredangle AOM + \measuredangle BOM = 180^\circ .$$



Имаме,

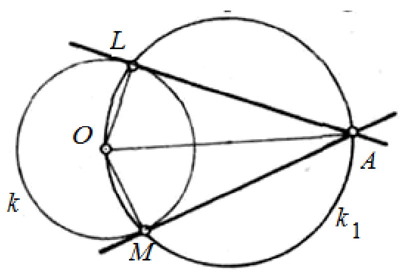
$$\measuredangle OAM = \measuredangle OMA \text{ и } \measuredangle OBM = \measuredangle OMB ,$$

па затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle AMB &= \measuredangle OAM + \measuredangle OMN \\ &= \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle AOM) + \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle BOM) \\ &= \frac{360^\circ - (\measuredangle AOM + \measuredangle BOM)}{2} \\ &= \frac{360^\circ - 180^\circ}{2} = 90^\circ.\end{aligned}$$

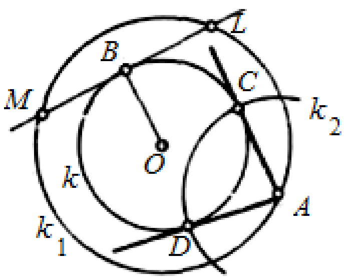
Конечно, од произволноста на точката M следува тврдењето на теоремата. ■

Конструкција 1. Нека е дадена кружница $k(O,r)$ и точка A надвор од неа, од која треба да се конструира тангента на дадената кружница (цртеж десно). Ја определуваме средината на отсечката OA (пресек на правата OA и симетралата на отсечката OA) и конструираме кружница k_1 над дијаметар OA. Оваа кружница ја сече кружницата k во точките L и M. Правите AL и AM се бараните тангенти на кружницата k.



Доказ. Бидејќи $\measuredangle OLA$ и $\measuredangle OMA$ се перифериски агли на кружницата k_1, конструирани над дијаметарот OA, тие се прави агли. Според тоа, радиусите OL и OM на кружницата k се нормални на правите AL и AM, соодветно, што значи дека овие прави се тангенти на дадената кружница. ■

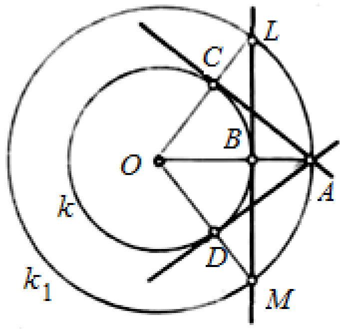
Конструкција 2 (Евклид). Нека е дадена кружница $k(O,r)$ и точка A надвор од неа, од која треба да се конструира тангента на дадената кружница (цртеж десно). Конструираме кружница $k_1(O,\overline{OA})$ и тангента t на кружницата k во нејзина произволна точка B. Оваа тангента ја сече кружницата k_1 во точките L и M. Понатаму, конструираме кружница $k_2(A,\overline{BL})$ која ја сече k во точките C и D. Точките C и D се допирните точки на тангентите конструирани од



точката A на кружницата k, т.е. правите AC и AD се бараните тангенти.

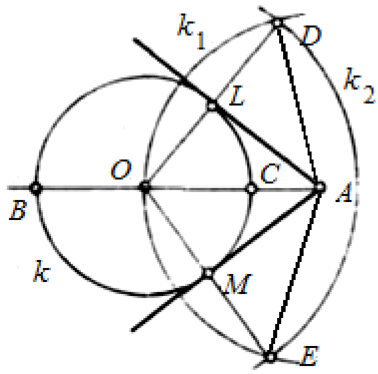
Доказ. Лесно се докажува дека $\overline{BL}=\overline{BM}$, при што должината не зависи од изборот на точката B. Затоа ако $B\equiv C$ или $B\equiv D$, тогаш точката B е мора да биде оддалечена од точката A на растојание $\overline{BL}=\overline{BM}$. Затоа точките C и D се допирните точки на тангентите повлечени од точката A на кружницата k. ■

Конструкција 3. Нека е дадена кружница $k(O,r)$ и точка A надвор од неа, од која треба да се конструира тангента на дадената кружница (цртеж десно). Нека B е пресечната точка на отсечката OA и кружницата k. Конструираме кружница $k_1(O,\overline{OA})$ и тангента на кружницата k во точката B. Оваа тангента ја сече кружницата k во точките L и M. Ги конструираме отсечките OL и OM, кои ја сечат k во точките C и D, соодветно. Овие точки се допирните точки на тангентите повлечени од точката A на кружницата k, т.е. правите AC и AD се бараните тангенти.



Доказ. Имаме $\triangle ODA\cong\triangle OBM$, бидејќи $\overline{OA}=\overline{OM}, \overline{OD}=\overline{OB}$ и $\measuredangle AOD=\measuredangle MOB$. Оттука следува дека $\measuredangle ODA=\measuredangle OBM=90^\circ$ и слично $\measuredangle OCA=\measuredangle OBL=90^\circ$, па затоа правите AC и AD се бараните тангенти. ■

Конструкција 4. Нека е дадена кружница $k(O,r)$ и точка A надвор од неа, од која треба да се конструира тангента на дадената кружница (цртеж десно). Ја конструираме правата OA, која кружницата k ја сече во точките B и C. Понатаму, ги конструираме кружниците $k_1(A,\overline{AO})$ и $k_2(O,\overline{BC})$. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките D и E. Правите OD и OE ја сечат k во точките L и M, соодветно. Овие точки се допирните точки на тангентите повлечени од точката A на кружницата k, т.е. правите AL и AM се бара-



ните тангенти.

Доказ. Триаголниците AOD и AOE се рамнокраки, бидејќи $\overline{AD} = \overline{AO}$ и $\overline{AE} = \overline{AO}$. Точките L и M се средини на нивните основи OD и OE, бидејќи $\overline{OL} = \frac{\overline{OD}}{2}$ и $\overline{OM} = \frac{\overline{OE}}{2}$. Според тоа, $AL \perp OL$ и $AM \perp OM$, па затоа правите AL и AM се бараните тангенти. ■

Задачи за самостојна работа

1. Точката S е оддалечена $13\,cm$ од центарот на кружницата k, чиј радиус е $r = 5\,cm$. Колкава е должината на тангентата повлечена од точката A на оваа кружница, ако под должина на тангентата се подразбира должината на отсечката чии краји точки се дадената точка и допирната точка на тангентата на кружницата?

2. Должината на радиусот на дадена кружница е $4\,cm$. Конструирај точка S од која дадената кружница се гледа под агол 60°, што значи дека тангентите повлечени од точката S на кружницата зафаќаат агол од 60°. Колку вакви точки постојат?

3. Кружницата $k(O,r)$ се гледа од точката S под агол од 90°. Каков е четириаголникот кој го ограничуваат двете тангенти, повлечени од точката S на дадената кружница и допирните радиуси на кружницата?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија