СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 6 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. Дан описанный пятиугольник $ABCDE$. Центр его вписанной окружности лежит на диагонали AC. Докажите, что $$AB + BC > CD + DE + EA.$$ *Егор Бакаев*
4	2. В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых? *Егор Бакаев*
4	3. Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N. Оказалось, что N делится на M. Докажите, что если теперь разложить N на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N. *Александр Грибалко*
5	4. Мама и сын играют. Сначала сын режет головку сыра 300 г на 4 куска. Затем мама распределяет 280 г масла на 2 тарелки. Наконец, сын раскладывает куски сыра на те же тарелки. Он выиграет, если на каждой тарелке сыра будет не меньше, чем масла (иначе выиграет мама). Кто из них может победить, как бы ни действовал другой? *Александр Шаповалов*
5	5. Набор состоит из одинаковых трёхклеточных уголков, у которых центральные клетки испачканы краской. Прямоугольную доску покрыли в один слой уголками, не выходящими за пределы доски, а затем убрали уголки. Испачканные клетки оставили на доске следы. Всегда ли по этим следам можно узнать, как именно лежали уголки? *Александр Грибалко*

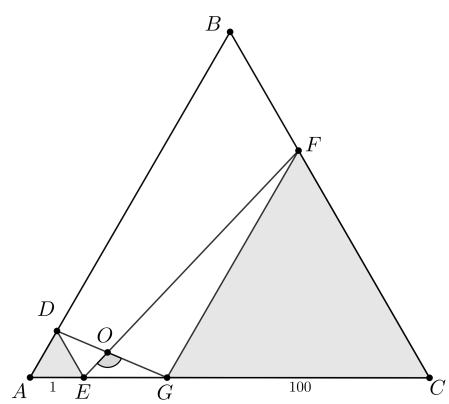
СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 6 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых? *Егор Бакаев*
4	2. У двух многочленов с вещественными коэффициентами старшие коэффициенты равны 1. У каждого многочлена степень нечётна и равна числу его различных вещественных корней. Произведение значений первого многочлена в корнях второго равно 2024. Найдите произведение значений второго многочлена в корнях первого. *Сергей Янжинов*
5	3. В ряд записаны 5 натуральных чисел. Каждое из них, кроме первого, — наименьшее натуральное число, на которое не делится предыдущее. Могут ли все пять чисел быть различными? *Борис Френкин*
5	4. В равностороннем треугольнике ABC проведены отрезки ED и GF, так что образовались два равносторонних треугольника ADE и GFC со сторонами 1 и 100 (точки E и G лежат на стороне AC). Отрезки EF и DG пересекаются в точке O, причём угол EOG равен 120°. Чему равна сторона треугольника ABC? *Михаил Евдокимов*
5	5. Имеются чашечные весы без гирь и две кучи камней неизвестных масс, по 10 камней в каждой куче. Разрешается проводить сколько угодно взвешиваний, но на каждую чашу помещается не более 9 камней. Всегда ли можно узнать, какая из куч тяжелее, или установить равенство их масс? *Сергей Дориченко*



СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 20 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

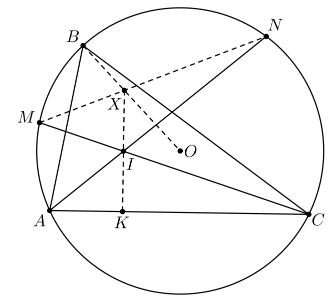
4 1. Барон Мюнхгаузен взял несколько карточек и написал на каждой по натуральному числу (числа могут повторяться). Барон утверждает, что использовал только две различные цифры, зато когда он для каждой пары карточек нашёл сумму чисел на них, то среди первых цифр этих сумм встретились все цифры от 1 до 9. Могут ли слова барона быть правдой?

Максим Дидин

6 2. Петя и Вася по очереди проводят дороги на плоскости, начинает Петя. Дорога — это горизонтальная или вертикальная прямая, по которой можно двигаться только в одну сторону (выбранную при создании дороги). Всегда ли Вася может действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам от любого перекрёстка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?

Александр Перепечко

7 3. В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Прямые AI и CI вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках N и M. Отрезки MN и BO пересекаются в точке X. Докажите, что прямые XI и AC перпендикулярны.



Фёдор Ивлев

4. У 10 детей есть несколько мешков с конфетами. Дети начинают делить конфеты между собой. Каждый по очереди забирает из каждого мешка свою долю и уходит. Доля вычисляется так: делим текущее число конфет в каждом мешке на число оставшихся детей (включая себя), если нацело не поделилось — округляем до целого в меньшую сторону. Может ли всем достаться разное количество конфет,

5 а) если мешков всего 8;

3 б) если мешков всего 9?

Алексей Глебов

8 5. На каждой стороне выпуклого многоугольника построили треугольник, третья вершина которого — пересечение биссектрис двух углов многоугольника, примыкающих к этой стороне. Докажите, что вместе эти треугольники покрывают весь многоугольник.

Егор Бакаев

10 6. Назовём ходы коня, при которых он смещается на две клетки по горизонтали и на одну по вертикали, *горизонтальными*, а остальные — *вертикальными*. Требуется поставить коня на одну из клеток доски 46×46, после чего чередовать им горизонтальные и вертикальные ходы. Докажите, что если запрещено посещать клетки более одного раза, то будет сделано не более 2024 ходов.

Александр Грибалко

10 7. Даны две строго возрастающие последовательности положительных чисел, в которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Известно, что каждая последовательность содержит хотя бы одно число, которого нет в другой последовательности. Какое наибольшее количество общих чисел может быть у этих последовательностей?

Борис Френкин

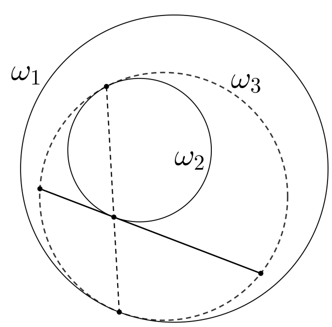
СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 20 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. Петя записал на доске натуральное число. Каждую минуту Вася умножает последнее записанное на доску число на 2 или на 3 и записывает результат на доске. Может ли Петя выбрать начальное число так, чтобы в любой момент среди всех записанных на доске чисел количество начинающихся на 1 или 2 было больше, чем количество начинающихся на 7, 8 или 9, как бы ни действовал Вася? *Максим Дидин*
6	2. Клетчатую доску 20×20 разбили на двухклеточные доминошки. Докажите, что некоторая прямая содержит центры хотя бы десяти из этих доминошек. *Александр Юран*
7	3. Известно, что каждый прямоугольный параллелепипед обладает свойством: квадрат его объёма равен произведению площадей трёх его граней, имеющих общую вершину. А существует ли параллелепипед, который обладает этим же свойством, но не является прямоугольным? *Александр Буфетов*
8	4. Существует ли такая бесконечная последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, что $a_1 = 1$ и для всех натуральных k выполняется равенство $$a_k = a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \ldots?$$ *Илья Лобацкий*
10	5. Дана окружность ω_1, а внутри неё — окружность ω_2. Выбирают произвольную окружность ω_3, которая касается двух предыдущих, причём оба касания внутренние. Точки касания соединяют отрезком, а через точку пересечения этого отрезка с окружностью ω_2 проводят касательную к ω_2 и получают хорду окружности ω_3. Докажите, что концы всех таких хорд (полученных при всевозможных выборах окружности ω_3) лежат на фиксированной окружности. *Павел Кожевников*
12	6. Замок Мерлина состоит из 100 комнат и 1000 коридоров. Каждый коридор соединяет какие-то две комнаты, каждые две комнаты соединены не более чем одним коридором. Мерлин выдал мудрецам план замка и объявил испытание. Мудрецы должны будут распределиться по комнатам, как хотят. Далее каждую минуту Мерлин указывает коридор, и один из мудрецов переходит по нему из комнаты на любом его конце в комнату на другом его конце. Мерлин победит, если когда-то укажет коридор, на концах которого нет мудрецов. Число m назовём *волшебным числом замка*, если m мудрецов могут, сговорившись перед испытанием, действовать так, чтобы никогда не проиграть, причём m — минимальное такое число. Чему может равняться волшебное число замка? (Все, включая Мерлина, всегда знают расположение всех мудрецов.) *Тимофей Васильев*
14	7. На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму единичного круга. Всегда ли можно вбить в стол несколько точечных гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём одинаковым количеством гвоздей? (Вбивать гвозди на границы кругов запрещено.) *Владимир Дольников, Павел Кожевников*



46-й Международный математический Турнир городов
2024/25 учебный год, осенний тур, базовый вариант

Решения задач

Младшие классы

1. [4] *Дан описанный пятиугольник ABCDE. Центр его вписанной окружности лежит на диагонали AC. Докажите, что $AB + BC > CD + DE + EA$.*

Егор Бакаев

Решение. При симметрии относительно диаметра AC касательные AB и CB перейдут в касательные AE и CD соответственно, поэтому лучи AE и CD пересекутся в точке B', симметричной точке B. Так как $AB + BC = AB' + B'C$, требуемое неравенство примет вид $AB' + B'C > CD + DE + EA \iff AE + EB' + B'D + DC > CD + DE + EA \iff EB' + B'D > DE$, что верно по неравенству треугольника.

2. [4] *В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?*

Егор Бакаев

Ответ. Нельзя. Назовём *кластером* максимальную группу подряд лежащих камней одного цвета.

Решение 1. В начале все кластеры нечётны: имеют длину 1. Заметим, что если в какой-то момент все кластеры нечётны, то после применения операции все будут нечётны: три нечётных кластера «склеиваются» в один. Поэтому никогда не появятся два чётных кластера.

Решение 2. Заметим, что 50-й камень – белый, а 51-й – чёрный. Оба их надо перекрасить. Один из этих двух камней перекрасится первым, после чего они станут одноцветными и далее уже всегда будут одноцветными (так как каждой операцией перекрашивается какой-то кластер целиком). Значит, сделать их чёрным и белым, как требуется, мы не сможем.

3. [4] *Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N. Оказалось, что N кратно M. Докажите, что если теперь разложить N на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N.*

Александр Грибалко

Решение 1. Если N делится на M, то разложение M на простые множители является частью разложения N на простые множители. После того, как мы увеличим на 1 каждый сомножитель из разложения N, все входящие в него простые множители числа M увеличатся на 1 и дадут в произведении число N.

Решение 2. Пусть $M = p_1 \ldots p_k$, где $p_1 \le \ldots \le p_k$. Тогда $N = (p_1 + 1)\ldots(p_k + 1)$. Одна из скобок, скажем, $p_i + 1$, должна делиться на p_k, и так как $p_i \le p_k$, это возможно лишь в случае $p_i + 1 = p_k$, откуда $p_i = 2$, $p_k = 3$. Итак, $M = 2^l 3^m$, $N = 3^l 4^m = 2^{2m} 3^l$, причём $m \le l \le 2m$. Значит, новое число равно $3^{2m} 4^l$ и делится на $N = 3^l 4^m$. (Интересно, что новое (третье) число – квадрат первого.)

4. [5] *Мама и сын играют. Сначала сын режет головку сыра 300 г на 4 куска. Затем мама распределяет 280 г масла на 2 тарелки. Наконец, сын раскладывает куски сыра на те же тарелки. Он выиграет, если на каждой тарелке сыра будет не меньше, чем масла (иначе выиграет мама). Кто из них может победить, как бы ни действовал другой?*

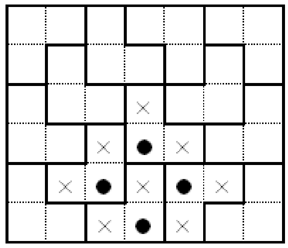
Александр Шаповалов

Ответ: сын. **Решение**. Уменьшим всё в 20 раз: у сына станет 15 г сыра, у матери 14 г масла. Сын делит сыр на куски в 1, 2, 4 и 8 г. Пусть на одной тарелке не больше k г, но больше $k - 1$ г масла, где k – целое число. Тогда на второй тарелке масла меньше $15 - k$ г. Сын кладёт на первую тарелку k г (как известно, из чисел 1, 2, 4, 8 можно составить любую целую сумму от 1 до 15), а на вторую $15 - k$ г.

5. [5] *Набор состоит из одинаковых трёхклеточных уголков, у которых центральные клетки испачканы краской. Прямоугольную доску покрыли в один слой уголками, не выходящими за пределы доски, а затем убрали уголки. Испачканные клетки оставили на доске следы. Всегда ли по этим следам можно узнать, как именно лежали уголки?*

Александр Грибалко

Ответ: не всегда. **Решение**. На рисунке представлено разбиение прямоугольника 6×7 на уголки. Отразим фигуру из четырёх отмеченных уголков относительно её вертикальной оси симметрии. Фигура перейдёт в себя, следы – в следы, а разбиение поменяется.



Старшие классы

1. [3] *В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?*

Егор Бакаев

Ответ. Нельзя. Назовём *кластером* максимальную группу подряд лежащих камней одного цвета.

Решение 1. В начале все кластеры нечётны: имеют длину 1. Заметим, что если в какой-то момент все кластеры нечётны, то после применения операции все будут нечётны: три нечётных кластера «склеиваются» в один. Поэтому никогда не появятся два чётных кластера.

Решение 2. Заметим, что 50-й камень – белый, а 51-й – чёрный. Оба их надо перекрасить. Один из этих двух камней перекрасится первым, после чего они станут одноцветными и далее уже всегда будут одноцветными (так как каждой операцией полностью перекрашивается какой-то кластер). Значит, сделать их чёрным и белым, как требуется, мы не сможем.

2. [4] *У двух многочленов с вещественными коэффициентами старшие коэффициенты равны* 1. *У каждого многочлена степень нечётна и равна числу его различных вещественных корней. Произведение значений первого многочлена в корнях второго равно 2024. Найдите произведение значений второго многочлена в корнях первого.*

Сергей Янжинов

Ответ: – 2024.

Решение. Пусть $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$, $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_n)$. По условию $\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(b_j - a_i) = 2024$. Надо найти $\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(a_i - b_j)$. Поскольку m и n нечётны, оно от первого отличается знаком.

3. [5] *В ряд записаны 5 натуральных чисел. Каждое из них, кроме первого, – наименьшее натуральное число, на которое не делится предыдущее. Могут ли все пять чисел быть различными?*

Борис Френкин

Ответ: не могут.

Решение 1. Пусть n – первое число в строке. Если n делится на какие-то степени (с натуральными показателями) различных простых чисел, то оно делится и на произведение этих степеней. Поэтому наименьшее число, на которое не делится n, – степень (возможно, первая) какого-то простого числа p. Если $p = 2$, то третье число в строке равно 3, четвёртое равно 2, а пятое снова 3. Если же p нечётно, то третье число равно 2, четвёртое 3 и пятое снова 2. В любом случае пятое число равно третьему.

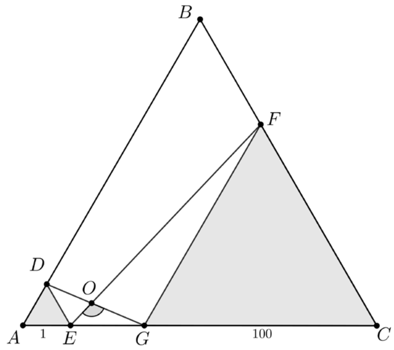
Решение 2. Пусть записаны числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Рассмотрим три случая.

1) a_2 нечётно. Тогда $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 2$.

2) a_2 чётно но не кратно 3. Тогда $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $a_5 = 2$.

3) $a_2 = 2^k3^lm$, где k, $l > 0$, m не кратно ни 2, ни 3. Тогда a_1 делится на 2^k, 3^l и m, но не делится на a_2. Противоречие.

4. [5] *В равностороннем треугольнике ABC проведены отрезки ED и GF, так что образовались два равносторонних треугольника ADE и GFC со сторонами* 1 *и* 100 *(точки E и G лежат на стороне AC). Отрезки EF и DG пересекаются в точке O, причём угол EOG равен* 120°. *Чему равна сторона треугольника ABC?*



Михаил Евдокимов

Ответ: 111.

Решение. Заметим, что $\angle FEG = \angle OEG = 60° - \angle OGE = 60° - \angle DGE = \angle GDE$. Значит, треугольники FGE и GED подобны по двум углам (ведь ещё $\angle DEG = \angle FGE = 120°$), откуда $FG : GE = GE : ED$, поэтому $GE = \sqrt{FG \cdot ED} = \sqrt{100 \cdot 1} = 10$, и далее $AC = 1 + 10 + 100 = 111$.

5. [5] *Имеются чашечные весы без гирь и две кучи камней неизвестных масс, по 10 камней в каждой куче. Разрешается проводить сколько угодно взвешиваний, но на каждую чашу помещается не более 9 камней. Всегда ли можно узнать, какая из куч тяжелее, или установить равенство их масс?*

Сергей Дориченко

Ответ: не всегда.

Решение. Пусть нам даже известны массы всех камней, кроме одного: в первой куче все камни по 10 г, во второй – 9 камней по 1 г и один камень массой больше 90 г (назовём его большим). Тогда результаты взвешиваний без большого камня нам и так известны заранее, а при любом взвешивании с участием большого камня перевесит чаша, на которой он лежит.

При этом масса первой кучи равна 100 г, а масса второй – любое число, большее 99 г. Если оно при этом меньше 100 г, то тяжелее первая куча, если больше 100 г – то вторая. Поэтому сравнить кучи не удастся.

46-й ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР

Решения сложного варианта

8 – 9 классы

1 (4 балла). *Барон Мюнхгаузен взял несколько карточек и написал на каждой по натуральному числу (числа могут повторяться). Барон утверждает, что использовал только две различные цифры, зато когда он для каждой пары карточек нашёл сумму чисел на них, то среди первых цифр этих сумм встретились все цифры от 1 до 9. Могут ли слова барона быть правдой?*

(Максим Дидин)

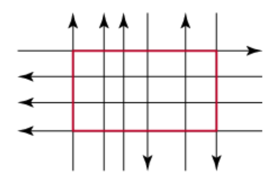
Ответ: могут. Годятся цифры 2 и 6. Напишем, например, числа 6, 22, 26, 26, 62, 66. Приведём для каждой цифры от 1 до 9 сумму с этой первой цифрой:

128=62+66; **2**8=22+6; **3**2=26+6; **4**8=22+26; **5**2=26+26; **6**8=62+6; **7**2=66+6; **8**8=62+26; **9**2=66+26.

Замечание. Можно доказать, что примеров с другими цифрами нет.

2 (6 баллов). *Петя и Вася по очереди проводят дороги на плоскости, начинает Петя. Дорога — это горизонтальная или вертикальная прямая, по которой можно двигаться только в одну сторону (выбранную при создании дороги). Всегда ли Вася может действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам от любого перекрёстка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?*

(Александр Перепечко)



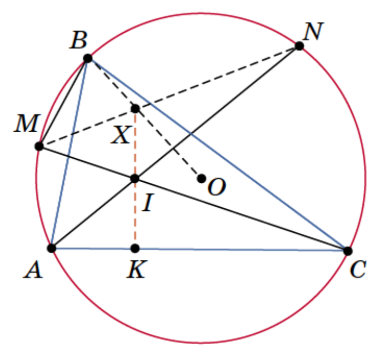
Ответ: всегда. Пусть, пока все дороги параллельны, Вася сохраняет это, следя за тем, чтобы крайние дороги были разных направлений. Когда Петя проведёт пересекающую их дорогу, Вася с одной из сторон от неё проводит дорогу противоположного направления так, чтобы возник *большой цикл* (цикл из четырёх крайних дорог, красный на рисунке).

Далее Вася следит только за крайними дорогами — если они по-прежнему образуют цикл, он проводит любую не крайнюю дорогу (и большой цикл сохраняется), а если Петя испортил большой цикл, проведя крайнюю дорогу, Вася восстанавливает его, проводя рядом с Петиной новую крайнюю дорогу нужного направления.

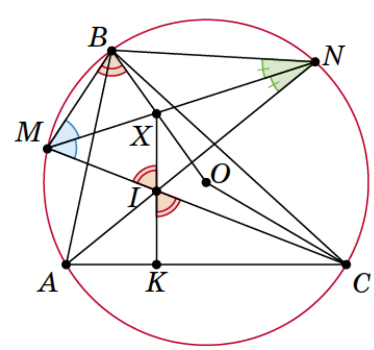
Докажем, что так Вася добьётся своей цели. Рассмотрим произвольные перекрёстки A и B. Выедем из A на большой цикл, по нему доедем до дороги, которая ведёт к перекрёстку B, и проедем в B.

3 (7 баллов). *В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Прямые AI и CI вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках N и M. Отрезки MN и BO пересекаются в точке X. Докажите, что прямые XI и AC перпендикулярны.*

(Фёдор Ивлев)



Заметим, что M и N – середины дуг AB и BC соответственно. Поэтому треугольники MBN и MIN равны по общей стороне и двум прилежащим углам. Значит, треугольники MBX и MIX равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда



$$\angle KIC = \angle MIX = \angle MBX = \angle MBA + \angle ABO = \\ = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 2C) = 90^\circ - \angle KCI,$$

то есть угол IKC прямой, что и требовалось.

Замечание. Равенство треугольников MBN и MIN следует также из леммы о трезубце.

4 (4 балла). *У 10 детей есть несколько мешков с конфетами. Дети начинают делить конфеты между собой. Каждый по очереди забирает из каждого мешка свою долю и уходит. Доля вычисляется так: делим текущее число конфет в каждом мешке на число оставшихся детей (включая себя), если нацело не поделилось — округляем до целого в меньшую сторону. Может ли всем достаться разное количество конфет,*

а) (5 баллов) *если мешков всего 8;*

б) (3 балла) *если мешков всего 9?*

(Алексей Глебов)

а) Ответ: нет. Если из одного мешка убрать 10 конфет, то каждый получит из этого мешка на одну конфету меньше, что не скажется на различии результатов. Поэтому можно считать, что в каждом мешке меньше 10 конфет.

Рассмотрим какой-либо мешок. Если в нём изначально было r конфет, то первые $10-r$ детей ничего не возьмут из этого мешка. После этого число детей станет равным r, и далее каждый ребёнок заберёт из мешка ровно по одной конфете. Значит, каждый ребёнок получит из каждого мешка не более одной конфеты, а всего — от 0 до 8 конфет. Но среди 10 чисел от 0 до 8 найдутся два одинаковых.

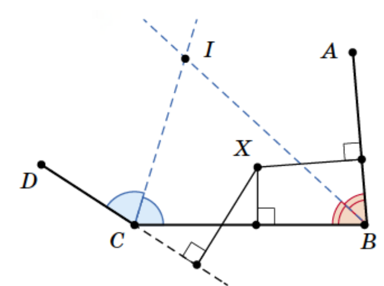
б) Ответ: да. Пусть число конфет в мешках равно соответственно 9, 8, $\ldots$, 1. Так как детей 10, первый ребёнок уйдёт, ничего не взяв ни из одного мешка. Останется 9 детей. Второй ребёнок заберёт только одну конфету из первого мешка. Останется 8 детей, а в мешках — 8, 8, 7, $\ldots$, 1 конфет. Третий ребёнок заберёт лишь по одной конфете из первых двух мешков. Останется 7 детей, а в мешках — 7, 7, 7, 6, $\ldots$, 1 конфет. И так далее: i-й ребёнок заберёт по одной конфете из первых $i-1$ мешков, где $i = 2, 3, \ldots, 10$. В частности, когда очередь дойдёт до 10-го ребёнка, в каждом мешке останется по одной конфете, и он заберёт их все. Итого, дети получат 0, 1, 2, $\ldots$, 9 конфет.

5 (8 баллов). *На каждой стороне выпуклого многоугольника построили треугольник, третья вершина которого — пересечение биссектрис двух углов многоугольника, примыкающих к этой стороне. Докажите, что вместе эти треугольники покрывают весь многоугольник.*

(Егор Бакаев)

Рассмотрим произвольную точку X внутри многоугольника и докажем, что она покрывается хотя бы одним треугольником.

Первый способ. Опустим из точки X перпендикуляры на все стороны (или их продолжения). Выберем сторону BC, для которой такой перпендикуляр самый короткий. Докажем, что треугольник BCI, построенный на этой стороне, содержит точку X.



Биссектриса состоит из точек угла, которые равноудалены от сторон угла, и делит угол на две части: в каждой из них до одной из сторон ближе, чем до другой. (Это верно для углов, меньших развёрнутого, а у выпуклого многоугольника все углы такие). Поэтому точка X лежит по ту же сторону от биссектрисы BI, что и сторона BC, и по ту же сторону от биссектрисы CI, что и сторона BC, а значит, лежит внутри треугольника BCI.

Второй способ. Предположим противное. Если точка X не покрыта ни одним треугольником, то можно немного сдвинуть её внутри многоугольника так, чтобы она по-прежнему не была покрыта, но вдобавок не лежала бы ни на одной из биссектрис (так как биссектрисы делят многоугольник на конечное число частей). Соединим тогда X со всеми вершинами нашего многоугольника. Каждый угол многоугольника разделится на две неравные части, одна из которых больше половины соответствующего угла, а другая — меньше. Рассмотрим все эти части углов, половина из них «меньшие» и половина «большие». Обойдём углы многоугольника по кругу. Если после меньшей части какого-то угла A идёт меньшая же часть следующего угла B, точка X попадёт внутрь треугольника со стороной AB — противоречие. Значит, за меньшей частью каждого угла следует большая часть следующего, а тогда меньшие и большие части строго чередуются (так как больших и меньших частей поровну). Но тогда расстояние от точки X до сторон многоугольника постоянно увеличивается при обходе по кругу. Сделав полный круг, получим противоречие (расстояние будет больше самого себя).

6 (10 баллов). *Назовём ходы коня, при которых он смещается на две клетки по горизонтали и на одну по вертикали,* горизонтальными*, а остальные —* вертикальными*. Требуется поставить коня на одну из клеток доски 46×46, после чего чередовать им горизонтальные и вертикальные ходы. Докажите, что если запрещено посещать клетки более одного раза, то будет сделано не более 2024 ходов.*

(Александр Грибалко)

Первое решение. Можно считать, что первый ход был горизонтальным (иначе повернём доску). Разделим доску на 23 вертикальные полосы ширины 2 клетки и раскрасим каждую в белый или чёрный цвет, чередуя цвета полос. Крайние полосы будут одного цвета, пусть чёрного. Тогда белых клеток будет всего $11 \cdot 2 \cdot 46 = 1012$. Заметим, что горизонтальный ход всегда меняет цвет клетки. Пусть всего ходов было хотя бы 2025. Тогда конь посетил 2026 клеток (включая начальную), которые разбиваются на 1013 пар соседних клеток, причём в каждой паре клетки соединены горизонтальным ходом, то есть разного цвета. Тогда белых клеток пройдено минимум 1013, что невозможно.

Второе решение. Пусть первый ход горизонтальный (иначе повернём доску). Покрасим каждую вертикаль в один из 4-х цветов в порядке 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, …, 1, 2. За три первых хода конь посетит 4 различных цвета. Затем он сместится вертикальным ходом и снова посетит 4 различных цвета и т. д. Сделав 2023 хода, он посетит $44 \cdot 46 = 2024$ клетки, поровну всех цветов. Все непосещённые клетки — цвета 1 и 2. Следующий вертикальный ход ещё возможен, а 2025-й — горизонтальный — уже нет.

Третье решение. Сделаем шахматную раскраску доски, тогда каждым ходом конь меняет цвет. Можно считать, что из чёрных клеток делаются вертикальные ходы, а из белых — горизонтальные. Рассмотрим 4 множества: чёрные клетки 1-й, 5-й, …, 45-й горизонталей; чёрные клетки 2-й, 6-й, …, 46-й горизонталей; белые клетки 1-й, 5-й, …, 45-й вертикалей; белые клетки 2-й, 6-й, …, 46-й вертикалей. Каждое содержит $23 \cdot 12$ клеток, из которых конь может пойти в $23 \cdot 11$ клеток. Значит, найдутся $23 \cdot 4$ клетки, из которых хода не было. Тогда всего ходов было не более $46 \cdot 46 - 23 \cdot 4 = 2024$.

7 (10 балла). *Даны две строго возрастающие последовательности положительных чисел, в которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Известно, что каждая последовательность содержит хотя бы одно число, которого нет в другой последовательности. Какое наибольшее количество общих чисел может быть у этих последовательностей?*

(Борис Френкин)

Замечание к условию. Предполагается, что обе последовательности бесконечны, иначе совпадений, очевидно, может быть сколько угодно (можно взять первые n членов последовательности Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, … как первую последовательность, и члены со второго по $(n+1)$-й — как вторую).

Ответ: 2. Правило построения последовательностей назовём просто *правилом.* Пусть два совпадения в последовательностях нашлись, рассмотрим второе. Если предыдущие члены тоже равны, то по правилу одна из последовательностей содержится в другой (так как они бесконечны), что запрещено. Пусть они не равны. Будем считать, что последовательности начинаются с них, и докажем, что теперь совпадение ровно одно. Итак, первая последовательность — $a_1, a_2, \ldots$, вторая — $b_1, b_2, \ldots$, причём

$$a_1 < b_1 < a_2 = b_2 < a_3.$$

Складывая первое и третье сравнения, получаем, что $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$, то есть, по правилу, $a_3 < b_3$. Складывая второе и четвёртое сравнения, получаем, что $b_1 + b_2 < a_2 + a_3$, то есть, по правилу, $b_3 < a_4$.

Действуя далее аналогично, получаем, что $a_n < b_n$ для каждого $n > 2$ и $b_n < a_{n+1}$ для всех натуральных n. Значит, далее совпадений не будет, поскольку последовательности идут так:

$$a_1 < b_1 < a_2 = b_2 < a_3 < b_3 < a_4 < b_4 < a_5 < \ldots$$

Пример. 1, 2, 3, 5, … и 1, 3, 4, … .

Комментарии. 1. Рассматривать второе (а не первое) совпадающее число требуется лишь для того, чтобы в обеих последовательностях оно было не первым членом. Поэтому если первый член каждой последовательности не содержится в другой, то у последовательностей не более одного общего числа.

2. Если последовательности не обязательно строго возрастают, совпадений может быть три: например, для последовательностей 1, 2, 3, 5, 8, … и 2, 1, 3, 4, 7, …

Сложный вариант, 10 – 11 классы

1 (4 балла). *Петя записал на доске натуральное число. Каждую минуту Вася умножает последнее записанное на доску число на 2 или на 3 и записывает результат на доске. Может ли Петя выбрать начальное число так, чтобы в любой момент среди всех записанных на доске чисел количество начинающихся на 1 или 2 было больше, чем количество начинающихся на 7, 8 или 9, как бы ни действовал Вася?*

(Максим Дидин)

Ответ: может. Назовём числа, начинающиеся на 1 или 2, *мелкими*, а начинающиеся на 7, 8 или 9, — *крупными.* Заметим, что сразу после каждого крупного числа на доске появится мелкое. В самом деле, если в крупном числе A всего k разрядов, то $7 \cdot 10^{k-1} \leqslant A < 10^k$, откуда $1,4 \cdot 10^k \leqslant 2A < 3A < 3 \cdot 10^k$, то есть, после A появится число, в котором k разрядов, а первая цифра — 1 или 2. Поэтому, если второе мелкое число появится на доске раньше первого крупного, то крупных чисел всегда будет меньше.

Петя может начать, например, с мелкого числа 112. Чтобы помешать Пете, Вася вынужден умножить его на 3 (получится 336), потом на 2 (672). Умножение 672 как на 2, так и на 3 даст мелкое число. Есть много других примеров: скажем, он может начать с числа 17.

2 (6 баллов). *Клетчатую доску* 20×20 *разбили на двухклеточные доминошки. Докажите, что некоторая прямая содержит центры хотя бы десяти из этих доминошек.*

(Александр Юран)

Рассмотрим 20 клеток, «нанизанных» на главную диагональ. Они принадлежат 20 разным доминошкам. Центры этих доминошек лежат на двух прямых, параллельных главной диагонали, поэтому на одной из этих прямых таких центров не меньше 10.

Комментарий. На самом деле, на каждой из этих двух прямых лежит ровно по 10 центров. Это следует из того, что ровно 10 доминошек, «нанизанных» на диагональ, смотрят в одну из половин доски, а оставшиеся 10 — в другую. (Проверьте, раскрасив доску в шахматном порядке и подсчитав количество клеток каждого цвета в каждой из половин.)

3 (7 баллов). *Известно, что каждый прямоугольный параллелепипед обладает свойством: квадрат его объёма равен произведению площадей трёх его граней, имеющих общую вершину. А существует ли параллелепипед, который обладает этим же свойством, но не является прямоугольным?*

(Александр Буфетов)

Ответ: нет. **Первый способ.** Расположим исходный непрямоугольный параллелепипед так, чтобы две противоположные непрямоугольные грани были горизонтальны. Пусть для него квадрат объёма равен произведению площадей трёх граней. Передвинем верхнюю грань так, чтобы она осталась на той же высоте над нижней гранью, но чтобы теперь боковые рёбра были перпендикулярны нижней грани. Объём параллелепипеда не поменяется, а площади боковых граней разве что уменьшатся (высоты параллелограммов станут минимальными возможными), поэтому для нового параллелепипеда квадрат объёма будет больше или равен произведению площадей граней. С другой стороны, теперь (если не учитывать один и тот же множитель — квадрат произведения трёх рёбер, выходящих из одной вершины) квадрат объёма равен по сути квадрату синуса угла в верхней грани, а произведение площадей граней равно по сути синусу угла верхней грани, то есть квадрат объёма меньше произведения площадей граней — противоречие.

Второй способ. Пусть такой параллелепипед существует. Если увеличить одно из его рёбер в k раз, то как произведение площадей трёх граней, так и квадрат объёма увеличатся в k^2 раз. Поэтому можно считать, что все рёбра равны 1, то есть все грани — ромбы. Если одна из граней — не квадрат, то её площадь $S < 1$. Площади двух остальных граней равны их высотам H_2 и H_3, а объём равен Sh, где h — высота, опущенная на первую грань. Тогда $SH_2H_3 = (Sh)^2$, то есть $H_2H_3 < h^2$. Но $h \leq H_2$ (по теореме о трёх перпендикулярах H_2 — гипотенуза, а h — катет прямоугольного треугольника, возможно, вырожденного). Аналогично $h \leq H_3$. Противоречие.

Вариация. Пусть a, b, c — стороны параллелепипеда, h — его высота, опущенная на грань со сторонами a и b. Тогда $V^2 = S_{ab}S_{bc}S_{ca} \geq S_{ab} \cdot b \cdot h \cdot a \cdot h \geq S_{ab}S_{ab}h^2 = V^2$. Из равенства следует, что $a \perp b$. Аналогично, $b \perp c$ и $c \perp a$.

4 (8 баллов). *Существует ли такая бесконечная последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, ..., что $a_1 = 1$ и для всех натуральных k выполняется равенство*

$$a_k = a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \ldots?$$

(Илья Лобацкий)

Ответ: существует.
Решение 1. Подходит последовательность, где $a_k = 1/k$, если k степень двойки, и $a_k = 0$ иначе.
Решение 2 (для знатоков). Положим $a_k = \frac{1}{k^s}$. Найдётся такое s, что

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots = 1,$$

так как дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots$$

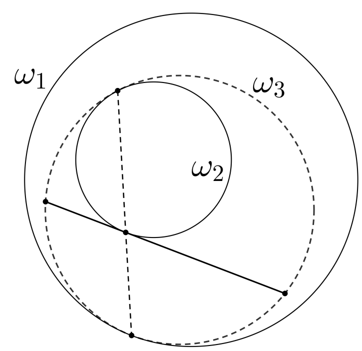
непрерывна при $s > 1$, причём $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2$ и $\zeta(s) \to +\infty$ при $s \to 1$. Тогда

$$a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \ldots = \frac{1}{(2k)^s} + \frac{1}{(3k)^s} + \frac{1}{(4k)^s} + \ldots = \frac{1}{k^s}\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots\right) = \frac{1}{k^s} \cdot 1 = a_k.$$

Примечание. Подойдёт любая последовательность a_1, a_2, ... с первым членом 1 и общей суммой 2, которая *мультипликативна* — для любых натуральных m и n выполнено $a_{m \cdot n} = a_m \cdot a_n$.

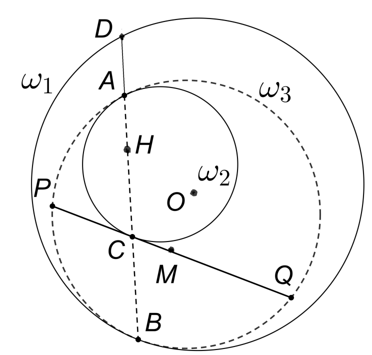
5 (10 баллов). *Дана окружность ω_1, а внутри неё — окружность ω_2. Выбирают произвольную окружность ω_3, которая касается двух предыдущих, причём оба касания внутренние. Точки касания соединяют отрезком, а через точку пересечения этого отрезка с окружностью ω_2 проводят касательную к ω_2 и получают хорду окружности ω_3. Докажите, что концы всех таких хорд (полученных при всевозможных выборах окружности ω_3) лежат на фиксированной окружности.*

(Павел Кожевников)



Пусть A и B — точки касания окружности ω_3 с окружностями ω_2 и ω_1 соответственно, C — точка пересечения отрезка AB с окружностью ω_2, и PQ — хорда окружности ω_3, касающаяся ω_2 в точке C.

Для каждой пары из окружностей ω_1, ω_2, ω_3 рассмотрим центр гомотетии, переводящий одну окружность в другую. По теореме о трех гомотетиях, эти три точки лежат на одной прямой. Поскольку центр гомотетии, переводящей касающиеся окружности одна в другую, совпадает с их точкой касания, получаем, что отрезок AB проходит через центр H гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2. Тогда хорда PQ параллельна проходящей через точку B касательной к ω_1, и серединный перпендикуляр к хорде PQ проходит через центр O окружности ω_1. Пусть M — середина хорды PQ. Не теряя общности, M лежит на отрезке CQ. Тогда



$$OP^2 = (OC^2 - CM^2) + MP^2 = OC^2 + (MP - CM)(MP + CM) = OC^2 + PC \cdot CQ = OC^2 + AC \cdot BC.$$

Докажем, что эта величина не зависит от выбора окружности ω_3, то есть концы всех хорд PQ равноудалены от O. Для этого продлим CA до пересечения с ω_1 в точке D. Пусть R и r — радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда

$$AC \cdot BC = (CD - AD) \cdot BC = CD \cdot BC - AD \cdot BC.$$

Заметим, что $CD \cdot BC = R^2 - OC^2$ — степень точки C относительно окружности ω_1. Поэтому $OP^2 = R^2 - AD \cdot BC$. Осталось доказать, что величина $AD \cdot BC$ не зависит от выбора ω_3.

Так как H — центр гомотетии, переводящий ω_1 в ω_2, то

$$\frac{R}{r} = \frac{HD}{HA} = 1 + \frac{AD}{HA}, \quad \text{откуда} \quad AD = HA \cdot \left(\frac{R}{r} - 1\right); \quad \text{аналогично,} \quad BC = HC \cdot \left(\frac{R}{r} - 1\right).$$

Тогда

$$AD \cdot BC = \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \cdot HA \cdot HC = \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \cdot s,$$

где s — степень точки H относительно окружности ω_2, то есть, величина, не зависящая от выбора ω_3.

6 (12 баллов. *Замок Мерлина состоит из 100 комнат и 1000 коридоров. Каждый коридор соединяет какие-то две комнаты, каждые две комнаты соединены не более чем одним коридором. Мерлин выдал мудрецам план замка и объявил испытание. Мудрецы должны будут распределиться по комнатам, как хотят. Далее каждую минуту Мерлин указывает коридор, и один из мудрецов переходит по нему из комнаты на любом его конце в комнату на другом его конце. Мерлин победит, если когда-то укажет коридор, на концах которого нет мудрецов.*
Число m назовём волшебным числом замка, если m мудрецов могут, сговорившись перед испытанием, действовать так, чтобы никогда не проиграть, причём m — минимальное такое число. Чему может равняться волшебное число замка? (Все, включая Мерлина, всегда знают расположение всех мудрецов.)

(Тимофей Васильев)

Ответ: $m = 1000$. Сначала докажем, что 1000 мудрецов всегда смогут выдержать испытание, независимо от того, как располагаются комнаты и коридоры в замке. Для этого мудрецы договариваются о следующем: каждый коридор закрепляется за каким-то конкретным мудрецом, который всегда находится в одной из комнат на концах этого коридора и переходит по нему, когда на этот коридор указывает Мерлин. Отсюда следует, что $m \le 1000$. Докажем, что $m \ge 1000$.

Первый способ. Покажем, что при 999 мудрецах у Мерлина есть план победы.

Для удобства предположим, что если мудрец выходит из комнаты, то он – самый младший из тех, кто в ней находился (в действительности совершенно неважно, кто из мудрецов где, важно только их количество в каждой из комнат).

Докажем, что если мудрецов в замке меньше, чем коридоров, то Мерлин может выбирать коридоры так, чтобы через несколько ходов вне зависимости от действий мудрецов образовался пустой коридор (обе комнаты на его концах пустые).

Индукция по числу мудрецов. База индукции очевидна: если коридоры есть, а мудрецов нет, то есть пустой коридор.

Переход индукции. Сначала покажем, что Мерлин может получить одну пустую комнату, из которой ведёт хотя бы один коридор. Возьмём самого старшего мудреца M. Если в результате команд Мерлина мудрец M покидает свою комнату, то эта комната становится пустой и будет искомой. Поэтому мы можем считать, что M всегда остаётся на своём месте вне зависимости от действий Мерлина. Наденем на M мантию-невидимку, по предположению индукции, Мерлин может получить две соседние комнаты, в которых никого нет (кроме, возможно, M). Таким образом, получена пустая комната, из которой ведёт хотя бы один коридор.

Пусть есть пустая комната v. Пусть из неё выходят коридоры $e_1, \dots, e_k$ и ведут в комнаты $v_1, \dots, v_k$. Назовём эти k комнат *уютными*, а эти k коридоров *опасными*. Если среди уютных комнат есть пустая, то Мерлин уже победил. Иначе выберем в этих комнатах по мудрецу (мудрец M_i находится в комнате v_i), назовём их *важными*. Не теряя общности, мы можем считать, что k самых пожилых мудрецов – это важные мудрецы.

Запретим Мерлину выбирать опасные коридоры и наденем на важных мудрецов по мантии-невидимке (то есть, мысленно удалим из замка k важных мудрецов и k коридоров вместе с вершиной v). По предположению индукции, у видимых мудрецов нет стратегии защиты от Мерлина. Это значит, что Мерлин может выбирать коридоры таким образом, что в исходном замке в какой-то момент или образуется пустой коридор, или один из важных мудрецов M_i должен будет выйти из своей комнаты v_i. В последнем случае в этот момент Мерлин получит две соседние пустые комнаты (v_i, v).

Второй способ. Занумеруем все комнаты от 1 до n в любом порядке. Пусть A_i — число мудрецов в комнате i, а k_i — число коридоров, ведущих из неё в комнаты с меньшими номерами.

Если $A_i < k_i$ для какой-то комнаты i, то Мерлин указывает эти k_i коридоров в порядке убывания номеров их концов до момента, когда случится переход мудреца в комнату i из некоторой комнаты j (где $j < i$). Получится расположение мудрецов $B = (B_1, \ldots, B_n)$, *лексикографически меньшее* расположения A, то есть $B_1 = A_1$, …, $B_{j-1} = A_{j-1}$, но $B_j < A_j$.

Затем Мерлин ищет в расположении B неравенство $B_l < k_l$, аналогично получает меньшее расположение и так далее. Число расположений конечно. Значит, если мудрецы не проиграют в этом процессе, то когда-то получится расположение M, в котором $M_i \geq k_i$ для всех i. Тогда

$$m \geq M_1 + \ldots + M_n \geq k_1 + \ldots + k_n = 1000,$$

то есть $m \geq 1000$.

7 (14 баллов). *На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму единичного круга. Всегда ли можно вбить в стол несколько точечных гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём одинаковым количеством гвоздей? (Вбивать гвозди на границы кругов запрещено.)*

(Владимир Дольников, Павел Кожевников)

Ответ: всегда.

Для удобства выберем единицу измерения так, чтобы площадь каждой салфетки равнялась 1. Рассмотрим часть плоскости, покрытую салфетками. Границы салфеток делят её на несколько (пусть k) областей. Занумеруем эти области числами от 1 до k и введём переменные x_1, …, x_k — искомые количества гвоздей, которые мы в итоге вобьём в соответствующие области.

Если можно было бы вбивать нецелое число гвоздей, достаточно было бы в каждую область вбить число гвоздей, равное её площади! Тогда каждая салфетка была бы прибита одним гвоздём. Если все эти площади рациональные, можно домножить их на общий знаменатель и получить одно и то же целое число гвоздей в каждом круге. Но что делать, если какие-то части имеют иррациональные площади? Далее можно пойти двумя путями.

Первое решение. Составим систему: для каждой салфетки просуммируем переменные, соответствующие областям, на которые разбита салфетка, и приравняем к 1. Получится система линейных уравнений с рациональными коэффициентами от переменных x_1, …, x_k. Хоть какое-то решение у этой системы существует (например, каждую переменную можно взять равной площади соответствующей части). Докажем, что у системы есть решение в положительных рациональных числах (тогда, домножив числа на общий знаменатель, получим решение исходной задачи).

Будем решать систему методом Гаусса: выразим одну переменную из первого уравнения и подставим в остальные, затем из второго уравнения выразим следующую переменную и подставим в уравнения с 3-го по последнее, и так далее. Так дойдём до конца и получим систему, равносильную исходной.

Возможно, в каких-то уравнениях после подстановки всё сократится, и они примут вид $0 = 0$ — не страшно. Последнее из уравнений, в котором не всё сократится, будет тогда иметь вид

$$x_i = r_i + r_j x_j + \ldots + r_n x_n,$$

где $r_j, \ldots, r_n$ — какие-то коэффициенты, которые, конечно же будут, рациональными!

Это значит, что переменным x_j, …, x_n мы можем придать любые значения — такие переменные называются «свободными». По их значениям мы однозначно найдём значение x_i. Подставив уже найденные значения в предыдущее уравнение, найдём значение очередной переменной, и так далее. Встречающиеся по дороге свободные переменные можно заменять любыми числами.

В итоге все переменные выразятся через рациональные константы и конечный набор так называемых «свободных» переменных, которым мы можем придавать любые значения, и по этим значениям однозначно получать какое-то решение системы.

Поэтому, если свободных переменных нет, то решение у системы единственное и тогда оно состоит из рациональных чисел!

Пусть свободные переменные есть. Мы можем придать каждой такой переменной x_j рациональное значение, сколь угодно близкое к площади j-й области. Ясно, что можно взять настолько близкие к площадям положительные рациональные значения, чтобы остальные, «несвободные» переменные также получились положительными (ведь каждая несвободная переменная x_i есть конечная линейная комбинация не более чем из k слагаемых с фиксированными коэффициентами, и подставляя в эту комбинацию числа, очень близкие к исходным площадям, мы получим число, близкое к соответствующей площади, которая изначально положительна). В итоге получим искомое рациональное решение.

Второе решение. Пусть $s_1, \ldots, s_k$ — площади соответствующих областей, на которые разбиты салфетки. Воспользуемся такой леммой (её доказательство можно прочитать, например, в статье С. Дориченко «О коровах, линейной алгебре и многомерных пространствах», «Квант» №5, 2012):

Пусть даны произвольные действительные числа $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Тогда, какое бы положительное число ε мы ни взяли, найдется такое натуральное число M, что каждое из чисел $s_1M, \ldots, s_kM$ будет отличаться от ближайшего к нему целого числа не больше, чем на ε.

Выберем ε равным $\frac{1}{2k}$ и найдём нужное M. Тогда каждое из чисел s_iM равно $N_i + \delta_i$, где N_i натуральное, а $|\delta_i| \leqslant \frac{1}{2k}$.

Если теперь для каждой салфетки сложить домноженные на M площади областей, на которые салфетка разбита, мы получим, с одной стороны, просто M (так как вся площадь салфетки тоже домножилась на M), а с другой стороны мы получим сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых натуральное с точностью до $\frac{1}{2k}$. Нецелые добавки суммарно составляют тогда не более $\frac{1}{2}$, и значит, взаимно уничтожаются, чтобы в итоге получилось целое число. Тогда если мы эти добавки отбросим, то для каждой салфетки сумма соответствующих натуральных чисел N_i по-прежнему будет равна M — одному и тому же числу! Поэтому выбрав для каждой части число гвоздей, равное соответствующему числу N_i, мы получим, что каждая салфетка будет прибита M гвоздями.

Комментарий. Как видно из решение, утверждение задачи верно для любого конечного числа салфеток одинаковой площади (при этом салфетки могут иметь разную форму).

Если же попробовать усилить задачу в другом направлении — потребовать, чтобы в каждую салфетку-единичный круг был вбит ровно один гвоздь, утверждение перестанет быть верным — см. задачу М1390 из Задачника «Кванта» №2 за 1993 г.

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 2 марта 2025 г.

баллы задачи

4 1. На доску записали числа 1, 2, ..., 100. Далее за ход стирают любые два числа a и b, где $a \geqslant b > 0$, и пишут вместо них одно число $[a/b]$. После 99 ходов на доске останется одно число. Каким наибольшим оно может быть? (Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x.)

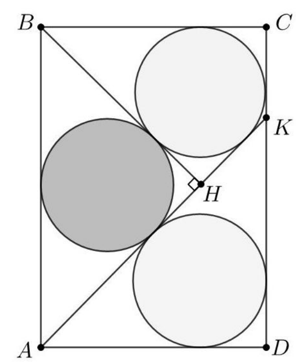
Егор Бакаев

5 2. В классе N школьников, среди них образовалось несколько компаний. *Общительностью* школьника назовём количество людей в наибольшей компании, куда он входит (если ни в одну не входит, то общительность равна 1). Оказалось, что у всех девочек в классе общительность разная. Каково наибольшее возможное количество девочек в классе?

Борис Френкин

5 3. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взята точка K. Из вершины B опустили перпендикуляр BH на отрезок AK. Оказалось, что отрезки AK и BH делят прямоугольник на три части, в каждую из которых можно вписать круг (см. рисунок). Докажите, что если круги, касающиеся стороны CD, равны, то и третий круг им равен.

Михаил Евдокимов



6 4. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)

Александр Шаповалов

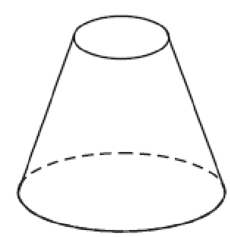
6 5. Прямоугольная клетчатая доска покрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета и разбита на доминошки 1×2. Везде, где граничат по стороне горизонтальная и вертикальная доминошки, стоит дверка. Она покрашена в тот же цвет, что и примыкающая клетка той доминошки, которая примыкает короткой стороной. Обязательно ли белых дверок столько же, сколько чёрных?

Борис Френкин

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 2 марта 2025 г.

баллы	задачи
4	1. Найдите наименьшее натуральное число, у которого найдутся четыре различных натуральных делителя с суммой 2025. *Марк Алексеев*
4	2. На плоскости провели 100 прямых, среди них никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники, все стороны которых лежат на этих прямых (в том числе четырёхугольники, внутри которых проведены линии). Обязательно ли выпуклых среди них столько же, сколько невыпуклых? *Егор Бакаев*
5	3. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.) *Александр Шаповалов*
5	4. На плоскости стояло ведро, верхнее основание больше нижнего. Ведро перевернули. Докажите, что площадь его видимой тени уменьшилась. (Ведро — это прямой круговой усечённый конус: его основания — два круга, лежащие в параллельных плоскостях, центры кругов лежат на прямой, перпендикулярной этим плоскостям. Видимая тень — это вся тень, кроме тени под ведром. Солнечные лучи считайте параллельными.) *Максим Дидин* 
6	5. Дан многочлен с целыми коэффициентами, имеющий хотя бы один целый корень. Наибольший общий делитель всех его целых корней равен 1. Докажите, что если старший коэффициент многочлена равен 1, то наибольший общий делитель остальных коэффициентов тоже равен 1. *Борис Френкин*

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 16 марта 2025 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Учитель назвал две различные ненулевые цифры. Коля хочет составить делящееся на 7
4 семизначное число, в десятичной записи которого нет других цифр, кроме этих двух. Всегда ли Коля может это сделать, какие бы две цифры ни назвал учитель?

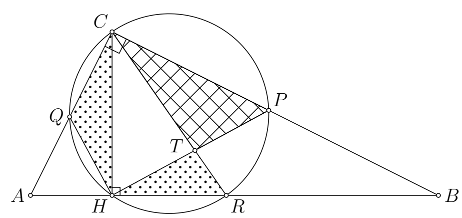
Алексей Толпыго

2. В квадрате 2025×2025 отмечено несколько клеток. За один ход Кирилл может узнать ко-
5 личество отмеченных клеток в любом клетчатом квадрате со стороной меньше 2025 внутри исходного квадрата. Какого наименьшего количества ходов точно хватит, чтобы узнать количество отмеченных клеток во всём квадрате?

Кирилл Никитин

3. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH. Некоторая окружность, проходящая через точки C
5 и H, повторно пересекает отрезки AC, CB и BH в точках Q, P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T. Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR?

Михаил Евдокимов



4. Даны $2N$ действительных чисел. Известно, что как ни разбей их на две группы по N чисел, произведение чисел первой группы отличается от произведения чисел второй группы не более чем на 2. Верно ли, что как ни расставь эти числа по кругу, найдутся два соседних числа, различающихся не более чем на 2, если

3 а) $N = 50$;

5 б) $N = 25$?

Илья Богданов

5. Имеется 15 неразличимых на вид монет. Известно, что одна из них весит 1 г, две – по 2 г, три – по 3 г, четыре – по 4 г, пять – по 5 г. На монетах есть соответствующие надписи с ука-
8 занием масс. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, все ли надписи сделаны верно? (Не требуется определять, какие именно надписи верны, а какие нет.)

Александр Грибалко

6. Равносторонний треугольник разрезан на белые и чёрные треугольники. Известно, что все белые треугольники — прямоугольные и равны друг другу, а все чёрные — равнобедренные и тоже равны друг другу. Обязательно ли кратны $30°$ все углы

4 а) у белых треугольников;

5 б) у чёрных треугольников?

Алексей Заславский

7. Хозяйка достала кусок мяса из холодильника, вокруг неё собрались котята. Раз в минуту хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котят (на свой выбор), причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли хозяйка скормить котятам поровну мяса, если всего котят

3 а) двое;

7 б) трое?

Андрей Кушнир

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 16 марта 2025 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

5

1. Существует ли такое положительное число $x > 1$, что

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \ldots > \{x^{100}\}?$$

(Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между x и ближайшим целым числом, не превосходящим x.)

Алексей Толпыго

6

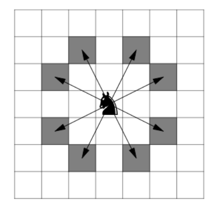
2. Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC. Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC. Оказалось, что рёбра SA, SB, SC первой пирамиды параллельны соответственно граням BCR, ACR и ABR второй пирамиды. Докажите, что объём одной из этих пирамид вдвое больше объёма другой.

Михаил Евдокимов

7

3. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 5 других?
(Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.)

Александр Тертерян



8

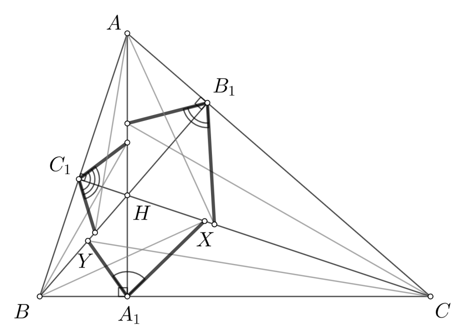
4. В стране, валюта которой — тугрики, ходят только купюры двух целочисленных достоинств. И покупатель, и продавец имеют достаточно много и тех, и других купюр, но при каждом платеже могут использовать вместе не более k купюр (включая сдачу). Известно, что так можно сделать платёж на любую целую сумму от 1 до n тугриков. Каково наибольшее возможное n (в зависимости от k)?

Александр Шаповалов

10

5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектрисы углов B и C треугольника BHC пересекают отрезки CH и BH в точках X и Y соответственно. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.

Алексей Доледенок



10

6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n со свойством: $f(m)$ не делится на n, но $f(p^k)$ делится на n для любого простого p и любого натурального k. Не ошибается ли барон?

Алексей Волостнов, Станислав Гришин

12

7. Петя красит каждую клетку доски $2m \times 2n$ в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше двухцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа двухцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася?
(Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.)

Александр Грибалко

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 30 марта 2025 года

1. На плоскости расположены круг и правильный 100-угольник, имеющие одинаковые площади. Какое наибольшее количество вершин 100-угольника может находиться внутри круга (не на границе)?

С. Дориченко, Б. Френкин

2. Дано натуральное число n. Натуральное число m назовём *удачным*, если найдутся m последовательных натуральных чисел, сумма которых равна сумме n следующих за ними натуральных чисел. Докажите, что количество удачных чисел нечётно.

Б. Френкин, П. Кожевников

3. Пусть A — набор из $n > 1$ различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел $a, b \in A$, где $a < b$, подсчитаем, сколько чисел в A являются делителями числа $b - a$. Какое наибольшее значение может принимать сумма полученных $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел?

В. Новиков

4. В трёхмерном координатном пространстве рассмотрим множество всевозможных кубов с целочисленными координатами вершин. Докажите, что в этом множестве существует такое бесконечное подмножество K, что любые два различных куба из K не имеют параллельных рёбер.

М. Малкин, М. Мееров

5. По кругу стоит 99 тарелок, на них лежат булочки (на тарелке может быть любое число булочек или вовсе их не быть). Известно, что на любых 20 подряд идущих тарелках лежит суммарно хотя бы k булочек. При этом ни одну булочку ни с одной тарелки нельзя убрать так, чтобы это условие не нарушилось. Какое наибольшее суммарное число булочек может лежать на тарелках?

В. Ретинский, П. Кожевников

6. Дан треугольник ABC. Пусть CL — его биссектриса, W — середина дуги BCA, а P — проекция ортоцентра на медиану, проведённую из вершины C. Окружность CPW пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB, в точке Q. Докажите, что $LC = LQ$.

А. Заславский

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР

Базовый вариант

8 – 9 классы

1 [4]. *На доску записали числа* 1, 2, ..., 100. *Далее за ход стирают любые два числа a и b, где $a \geqslant b > 0$, и пишут вместо них одно число $[a/b]$. После* 99 *ходов на доске останется одно число. Каким наибольшим оно может быть? (Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x.)*

(Егор Бакаев)

Ответ: 100. Очевидно, что все числа на доске всегда не меньше 1 и не больше 100. Применив указанную операцию к парам (99, 98), (97, 96), ..., (3, 2), оставим на доске число 100 и 50 единиц. Далее каждый ход убирает одну единицу.

2 [5]. *В классе N школьников, среди них образовалось несколько компаний.* Общительностью *школьника назовём количество людей в наибольшей компании, куда он входит (если ни в одну не входит, то общительность равна* 1*). Оказалось, что у всех девочек в классе общительность разная. Каково наибольшее возможное количество девочек в классе?*

(Борис Френкин)

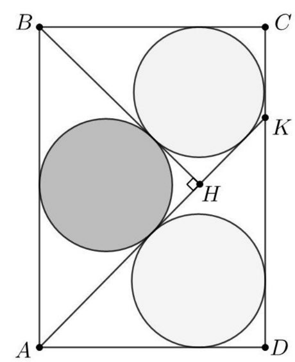
Ответ: $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ девочек. Уточним, что под наибольшей компанией для школьника подразумевается компания с наибольшим числом школьников в ней (таких может быть несколько).

Оценка. Пусть в классе k девочек. Девочка с наибольшей общительностью входит в компанию, где не меньше k человек. Других девочек в этой компании нет. Значит, в классе не менее $k-1$ мальчиков. Следовательно, $k+(k-1) \leqslant N$, то есть $k \leqslant \left[\frac{N+1}{2}\right]$.

Пример. При $k = \left[\frac{N+1}{2}\right]$ занумеруем девочек числами от 1 до k, мальчиков – числами от $k+1$ до N и создадим k компаний: в i-ю компанию входят i-я девочка и $i-1$ мальчиков с наименьшими номерами.

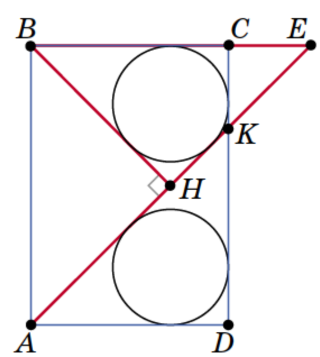
3 [5]. *На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взята точка K. Из вершины B опустили перпендикуляр BH на отрезок AK. Оказалось, что отрезки AK и BH делят прямоугольник на три части, в каждую из которых можно вписать круг (см. рисунок). Докажите, что если круги, касающиеся стороны CD, равны, то и третий круг им равен.*

(Михаил Евдокимов)



Уточним, что точки H и K предполагаются различными, как на рисунке (иначе утверждение задачи неверно).

Продлим отрезок AK до пересечения с прямой BC в точке E. Два правых круга симметричны относительно горизонтальной средней линии нашего прямоугольника. Значит, углы CBH и DAH равны, то есть AHB — равнобедренный прямоугольный треугольник. Поэтому и BHE — равнобедренный прямоугольный треугольник, равный треугольнику AHB. А окружности, вписанные в равные треугольники, равны.



4 [6]. *По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)*

(Александр Шаповалов)

При смешивании двух соков получается какая-то промежуточная сладость между сладостями этих соков. Назовём кувшин *нормальным*, если он пустой или сладость в нём равна 10%; *кислым* — если сладость в нём меньше 10%, *сладким* — если больше. Аналогично дадим название чану, куда мысленно сольём весь сок.

Решение 1. Если какой-то кувшин нормальный, то переливание из него не изменит название кувшина справа. Значит, справа тоже нормальный кувшин, и так далее. Тогда все кувшины нормальные и переливаний не требуется.

Иначе имеем чередование кислых и сладких кувшинов (в частности, всего кувшинов чётное количество). Разобьём кувшины на пары соседних, чтобы левый кувшин пары был кислым. Переливанием в каждой паре сделаем сладкий кувшин нормальным. Значит, чан кислый или нормальный. Если бы разбили на пары по-другому, то получили бы сладкий или нормальный чан. Следовательно, чан нормальный и все левые кувшины в парах опустели.

Решение 2. Занумеруем кувшины по кругу так, что изначально в 1-м можно сделать 10%-ю сладость с помощью 2-го, во 2-м — с помощью 3-го, и так далее, в $(n-1)$-м кувшине — с помощью n-го, в n-м — с помощью 1-го.

Тогда сделаем 1-й кувшин нормальным с помощью 2-го. Во 2-м кувшине сладость осталась та же, только сока могло стать меньше, значит, его всё ещё можно сделать нормальным с помощью 3-го кувшина. Сделаем. Аналогично сделаем нормальными все кувшины, кроме n-го. Если чан сладкий, то n-й кувшин тоже стал сладким, но тогда он и был сладким (из него ведь просто отлили часть сока). Начав процесс с другого кувшина, выясняем, что все кувшины были сладкими. Но тогда нельзя было выполнить ни одного переливания. Аналогичную ситуацию получаем, если чан кислый. Следовательно, чан нормальный. Тогда и n-й кувшин стал нормальным, и мы добились требуемого.

5 [6]. *Прямоугольная клетчатая доска покрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета и разбита на доминошки 1×2. Везде, где граничат по стороне горизонтальная и вертикальная доминошки, стоит дверка. Она покрашена в тот же цвет, что и примыкающая клетка той доминошки, которая примыкает короткой стороной. Обязательно ли белых дверок столько же, сколько чёрных?*

(Борис Френкин)

Ответ: обязательно.

Решение 1. Рассмотрим стороны клеток на границе доски. Среди них поровну белых и чёрных (так как у доски есть чётная сторона). Каждая длинная сторона доминошки, выходящая на границу, даёт вклад из одной белой и одной чёрной стороны клетки. Тогда и среди коротких сторон, выходящих на границу, поровну белых и чёрных сторон клеток. Поэтому, если мы проделаем новые дверки наружу в каждой короткой стороне доминошки, прилегающей к краю доски, то добавлено будет одинаковое количество белых и чёрных дверок.

Рассмотрим теперь произвольную клетчатую вертикаль (толщиной в одну клетку) и объединим в ней примыкающие друг к другу вертикальные доминошки в вертикальные полоски. В каждой получившейся полоске (если они есть) ровно две «горизонтальные» дверки, причём разного цвета (поскольку длина полоски чётна). Тогда в каждой вертикали поровну чёрных и белых дверок. То же верно и для горизонталей, а значит, и для всей доски.

Решение 2. Рассмотрим вертикальную прямую B, проходящую по границам клеток. Покажем, что на ней одинаковое количество белых и чёрных дверей.

Будем двигаться по B от самой нижней горизонтали к самой верхней. Без ограничения общности пусть первая встретившаяся дверь $Д_1$ — белая. До этого все доминошки, примыкающие к B, начинались и кончались на одних и тех же горизонталях (какие-то горизонтальные доминошки могли пересекать B). Поэтому вертикальная доминошка, примыкающая к $Д_1$, закончится на 1 клетку выше, чем горизонтальная. Если по другую сторону от B стоит вертикальная доминошка, то она закончится ещё на 1 клетку выше, и т.д. Рано или поздно доминошки с обеих сторон от B закончатся на одинаковой высоте (на краю доски или раньше). Значит, встретится горизонтальная доминошка, напротив которой расположена верхняя клетка вертикальной доминошки, то есть мы придём к следующей двери $Д_2$ (это могло произойти и сразу после двери $Д_1$). В каждой из пройденных вертикальных доминошек нижняя клетка белая, а верхняя чёрная. Поэтому дверь $Д_2$ чёрная.

Дальнейшее движение по прямой B происходит аналогично. Таким образом, белые и чёрные двери расположены на B парами. Аналогичное верно и для горизонтальных прямых. Отсюда следует ответ. (Из доказанного также следует, что общее количество дверей на вертикальных прямых чётно, как и на горизонтальных.)

10 – 11 классы,

1 [4]. *Найдите наименьшее натуральное число, у которого найдутся четыре различных натуральных делителя с суммой 2025.*

(Марк Алексеев)

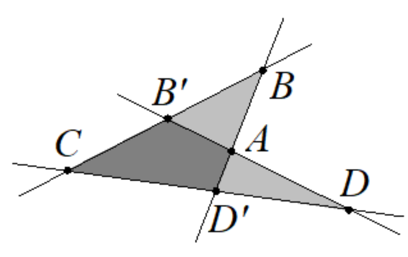
Ответ: 972. Сумма четырёх различных делителей числа n не больше $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} = \frac{25n}{12}$. Поэтому n будет самым маленьким в случае, когда $\frac{25n}{12} = 2025$, то есть $n = 972$. Это число подходит, так как 972 делится на 2, 3 и 4.

2 [4]. *На плоскости провели 100 прямых, среди них никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники, все стороны которых лежат на этих прямых (в том числе четырёхугольники, внутри которых проведены линии). Обязательно ли выпуклых среди них столько же, сколько невыпуклых?*

(Егор Бакаев)

Ответ: обязательно.

Рассмотрим произвольный невыпуклый четырёхугольник $ABCD$ из условия (угол A больше $180°$). Продлив его стороны BA и DA до пересечения со сторонами DC и BC, получим выпуклый четырёхугольник $AB'CD'$ (см. рисунок). Обратно, продлив стороны выпуклого четырёхугольника, получим невыпуклый. Таким образом, все четырёхугольники разбиваются на пары выпуклый-невыпуклый.



3 [5]. *По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)*

(Александр Шаповалов)

При смешивании двух соков получается какая-то промежуточная сладость между сладостями этих соков. Назовём кувшин *нормальным*, если он пустой или сладость в нём равна 10%; *кислым* — если сладость в нём меньше 10%, *сладким* — если больше. Аналогично дадим название чану, куда мысленно сольём весь сок.

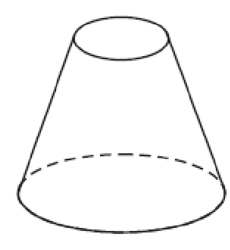
Решение 1. Если какой-то кувшин нормальный, то переливание из него не изменит название кувшина справа. Значит, справа тоже нормальный кувшин, и так далее. Тогда все кувшины нормальные и переливаний не требуется.

Иначе имеем чередование кислых и сладких кувшинов (в частности, всего кувшинов чётное количество). Разобьём кувшины на пары соседних, чтобы левый кувшин пары был кислым. Переливанием в каждой паре сделаем сладкий кувшин нормальным. Значит, чан кислый или нормальный. Если бы разбили на пары по-другому, то получили бы сладкий или нормальный чан. Следовательно, чан нормальный и все левые кувшины в парах опустели.

Решение 2. Занумеруем кувшины по кругу так, что изначально в 1-м можно сделать 10%-ю сладость с помощью 2-го, во 2-м — с помощью 3-го, и так далее, в $(n-1)$-м кувшине — с помощью n-го, в n-м — с помощью 1-го.

Тогда сделаем 1-й кувшин нормальным с помощью 2-го. Во 2-м кувшине сладость осталась та же, только сока могло стать меньше, значит, его всё ещё можно сделать нормальным с помощью 3-го кувшина. Сделаем. Аналогично сделаем нормальными все кувшины, кроме n-го. Если чан сладкий, то n-й кувшин тоже стал сладким, но тогда он и был сладким (из него ведь просто отлили часть сока). Начав процесс с другого кувшина, выясняем, что все кувшины были сладкими. Но тогда нельзя было выполнить ни одного переливания. Аналогичную ситуацию получаем, если чан кислый. Следовательно, чан нормальный. Тогда и n-й кувшин стал нормальным, и мы добились требуемого.

4 [5]. *На плоскости стояло ведро, верхнее основание больше нижнего. Ведро перевернули. Докажите, что площадь его видимой тени уменьшилась. (Ведро — это прямой круговой усечённый конус: его основания — два круга, лежащие в параллельных плоскостях, центры кругов лежат на прямой, перпендикулярной этим плоскостям. Видимая тень — это вся тень, кроме тени под ведром. Солнечные лучи считайте параллельными.)*



(Максим Дидин)

Верхнее основание параллельно плоскости, поэтому оно параллельно перенесётся светом. (То есть, тень круга, параллельного плоскости, — круг того же размера, лежащий в плоскости основания, с центром в «тени» центра круга.)

Усечённый конус является выпуклой оболочкой своих оснований. Поэтому полная тень в обоих случаях — это выпуклая оболочка двух кругов, равных основаниям. При переворачивании ведра центры оснований меняются местами друг с другом, поэтому соединяющий их отрезок одинаково спроектируется в обоих случаях. Следовательно, полные тени равны (симметричны друг другу).

(На рисунке изображен случай, когда тени верхнего и нижнего оснований не пересекаются, но они могут пересекаться; меньшая тень даже может лежать внутри большей.)

Видимая тень получается удалением из полной тени нижнего основания. Поэтому у перевёрнутого ведра видимая тень меньше.

5 [6]. *Дан многочлен с целыми коэффициентами, имеющий хотя бы один целый корень. Наибольший общий делитель всех его целых корней равен* 1. *Докажите, что если старший коэффициент многочлена равен* 1, *то наибольший общий делитель остальных коэффициентов тоже равен* 1.

(Борис Френкин)

Пусть наш многочлен имеет вид $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Предположим противное: остальные коэффициенты многочлена имеют общий простой делитель p. Тогда, если s — целый корень многочлена, то $f(s) = 0$, откуда $s^n = -(a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1s + a_0)$ делится на p. Но тогда и s делится на p (так как p — простое). Значит, наибольший общий делитель всех целых корней делится на p. Противоречие.

Сложный вариант

8 – 9 классы

1 [4]. *Учитель назвал две различные ненулевые цифры. Коля хочет составить делящееся на* 7 *семизначное число, в десятичной записи которого нет других цифр, кроме этих двух. Всегда ли Коля может это сделать, какие бы две цифры ни назвал учитель?*

(Алексей Толпыго)

Ответ: не всегда. Если учитель назовет цифры 1 и 8, то каждое число, которое может составить Коля, будет давать тот же остаток от деления на 7, что и число 1111111 (поскольку отличается от Колиного на число, составленное из нулей и семёрок, которое кратно 7). Но число 1111111 на 7 не делится — оно даёт остаток 1 при делении на 7.

Замечание. Ещё одна «плохая» пара — 2 и 9. В остальных случаях Коля может добиться желаемого. Действительно, случай, когда одна из названных цифр равна 7, очевиден. Пусть обе названные цифры a и b отличны от 7, причём $0 < a - b = c \neq 7$. Тогда число $\overline{aaaaaaa}$ даёт остаток a при делении на 7. Заметим, что числа c, $10c$, $\ldots$, 10^5c дают различные ненулевые остатки при делении на 7, и так как их шесть, то одно из них, скажем, 10^kc, даёт остаток a при делении на 7. Тогда Коле подходит число $\overline{aaaaaaa} - 10^kc$, состоящее из шести цифр a и одной цифры b.

2 [5]. *В квадрате* 2025×2025 *отмечено несколько клеток. За один ход Кирилл может узнать количество отмеченных клеток в любом клетчатом квадрате со стороной меньше* 2025 *внутри исходного квадрата. Какого наименьшего количества ходов точно хватит, чтобы узнать количество отмеченных клеток во всём квадрате?*

(Кирилл Никитин)

Ответ: 5 ходов. Обозначим исходный квадрат через K.

Оценка. Пусть ходов только 4. Ясно, что каждый из соответствующих четырёх квадратов должен содержать свою угловую клетку у K.

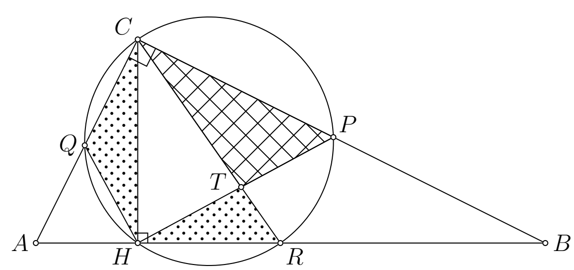
Если квадраты не покрывают K, то Кирилл ничего не узнает о количестве отмеченных клеток среди непокрытых. Если же квадраты покрывают K, то какие-то из них пересекаются (иначе рассмотрим квадрат, содержащий центральную клетку, его сторона не меньше 1013; но тогда стороны остальных квадратов не больше 1012, и взяв из них два квадрата, примыкающих к одной стороне K, видим, что эта сторона покрыта не полностью).

Пусть на каждом ходу отвечали, что отмечена одна клетка. Тогда отмеченных клеток в K могло быть как 4 (все его угловые клетки), так и меньше — когда была отмечена клетка из пересечения двух или более квадратов вместо углов K, попавших в эти квадраты.

Пример. Возьмём: 1) два квадрата со стороной 1013, покрывающие два противоположных угла; 2) центральную клетку; 3) два квадрата со стороной 1012, покрывающие два других противоположных угла. Первые два квадрата пересекаются как раз по центральной клетке, так что по первым трём числам мы узнаем, сколько отмеченных клеток покрывают первые три ква-драта. Остальное покрывают (без пересечений) оставшиеся два квадрата.

3 [5]. *В треугольнике* ABC *с прямым углом* C *провели высоту* CH. *Некоторая окружность, проходящая через точки* C *и* H, *повторно пересекает отрезки* AC, CB *и* BH *в точках* Q, P *и* R *соответственно. Отрезки* HP *и* CR *пересекаются в точке* T. *Что больше: площадь треугольника* CPT *или сумма площадей треугольников* CQH *и* HTR?

(Михаил Евдокимов)



Ответ: эти выражения равны.

Первое решение. Добавим к обеим суммам площадь треугольника RTP. Тогда надо сравнить площадь треугольника PCR и сумму площадей треугольников CHQ и PHR.

Заметим, что PQ и CR — диаметры окружности из условия, поэтому $CPRQ$ — прямоугольник. Площадь треугольника PCR равна половине площади прямоугольника. Но у треугольников PHR и CHQ равные основания PR и CQ, а сумма их высот, опущенных на PR и CQ соответственно, равна стороне PC прямоугольника. Поэтому их суммарная площадь — тоже половина площади прямоугольника.

Второе решение. Добавим к рассматриваемым площадям площадь четырёхугольника $BPTR$. Получим, что нужно проверить равенство

$$S_{CQH} + S_{BPH} = S_{BRC}.$$

Из вписанности $CPRH$ следует, что $\angle PHR = \angle PCR$. Поскольку PQ — диаметр окружности, то $\angle PHQ = 90^\circ = \angle CHB$, поэтому

$$\angle CHQ = \angle PHR = \angle PCR.$$

Каждый из углов HCQ и CBH дополняет угол BCH до 90°, поэтому

$$\angle HCQ = \angle PBH = \angle RBC.$$

Следовательно, треугольники CQH, BPH и BRC подобны по двум углам. Тогда площади этих треугольников относятся как квадраты коэффициентов подобия, поэтому

$$S_{CQH} + S_{BPH} = \left(\frac{CH}{BC}\right)^2 \cdot S_{BRC} + \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 \cdot S_{BRC} = \frac{CH^2 + BH^2}{BC^2} \cdot S_{BRC} = S_{BRC}.$$

4. *Даны $2N$ действительных чисел. Известно, что как ни разбей их на две группы по N чисел, произведение чисел первой группы отличается от произведения чисел второй группы не более чем на 2. Верно ли, что как ни расставь эти числа по кругу, найдутся два соседних числа, различающихся не более чем на 2, если а)* [3] *$N = 50$; б)* [5] *$N = 25$?*

(Илья Богданов)

а) **Ответ:** неверно. Пусть 50 чисел равны 2, а остальные 50 равны -2. Тогда при любом разбиении их на две группы по 50 чисел произведения в группах будут одинаковы (так как отрицательных чисел чётное количество). Но расставив числа по кругу, чередуя положительные с отрицательными, получим контрпример.

б) **Ответ:** верно. Разобьём числа по кругу на 25 пар соседних чисел. В каждой паре вычтем из большего числа меньшее. Пусть все разности больше 2. Перемножив эти разности, получим число, большее 2^{25}.

Но если в этом произведении разностей раскрыть скобки, то слагаемые (коих будет 2^{25}) можно сгруппировать по парам: произведение каких-то 25 исходных чисел минус произведение 25 оставшихся (будет именно знак минус из-за нечётности числа 25). Пар произведений будет $2^{25} : 2 = 2^{24}$, и их сумма не превосходит 2^{25} по условию. Противоречие.

5 [8]. *Имеется 15 неразличимых на вид монет. Известно, что одна из них весит 1 г, две – по 2 г, три – по 3 г, четыре – по 4 г, пять – по 5 г. На монетах есть соответствующие надписи с указанием масс. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, все ли надписи сделаны верно? (Не требуется определять, какие именно надписи верны, а какие нет.)*

(Александр Грибалко)

Для обозначения монет будем использовать надписи, которые сделаны на них.

Первое взвешивание: сравним $1+2+2+3+3+3$ и $5+5+5$. Минимальный возможный вес монет на первой чаше равен 14 г, а максимальный на правой — 15 г. Поэтому если левая чаша легче, то ней именно такой набор монет (возможно, с перепутанными надписями), а на правой — три монеты массой 5 г.

Второе взвешивание: сравним $1+4+4+4+5^*$ и $3+3+3+5+5$, где 5^* — монета, про которую уже известно, что она весит 5 г, а 5 — монета про которую мы этого не знаем.

Минимальный возможный вес монет на первой чаше — 18 г, а максимальный на правой — 19 г. Значит, если левая чаша легче, то на всех монетах на весах надписи сделаны верно. Тогда на оставшихся монетах 2, 2 и 4 надписи также правильные.

Если хоть одно из взвешиваний даст другой результат, то среди надписей есть ошибочные.

Замечание. В качестве второго взвешивания можно также сравнить $1+4+4+5^*+5^*$ и $3+3+3+5+5$.

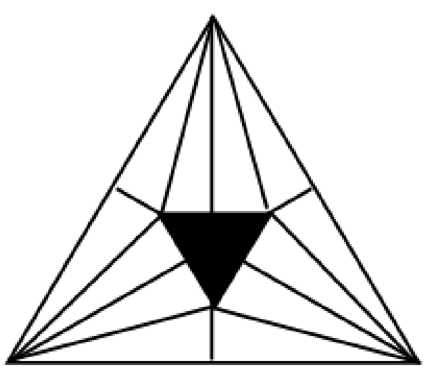
6. *Равносторонний треугольник разрезан на белые и чёрные треугольники. Известно, что все белые треугольники — прямоугольные и равны друг другу, а все чёрные — равнобедренные и тоже равны друг другу. Обязательно ли кратны* $30°$ *все углы а)* [4] *у белых треугольников; б)* [5] *у чёрных треугольников?*

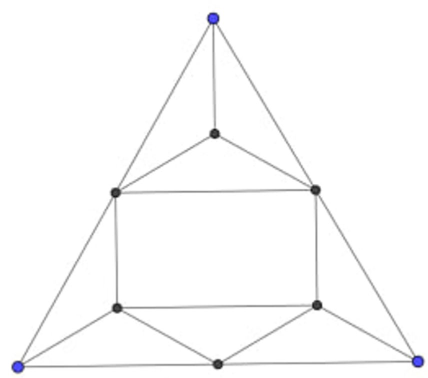
(Алексей Заславский)

Ответ: не обязательно в обоих пунктах.

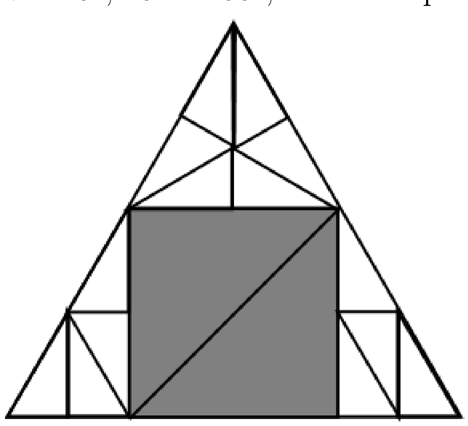
а) Контрпример приведён ниже на левом рисунке. Острые углы прямоугольных треугольников равны $15°$ и $75°$.

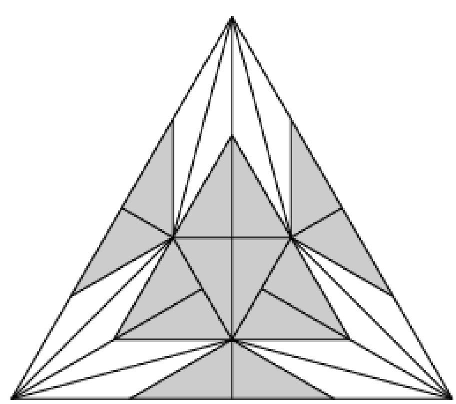
Замечание. Имеется бесконечно много других примеров. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB равностороннего треугольника ABC, и пусть A_1, B_1 — центры треугольников AB_0C_0, BC_0A_0 соответственно. Тогда $A_0B_0A_1B_1$ — прямоугольник, который можно разрезать на прямоугольные треугольники бесконечно многими способами, а остальная часть режется на 8 треугольников с углами $120°$, $30°$ и $30°$ (см. ниже правый рисунок).



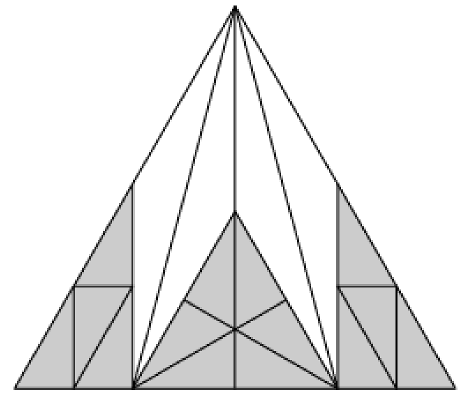


б) Ниже приведены два контрпримера. Во втором все 12 равнобедренных треугольников имеют углы $15°$, $15°$ и $150°$, а все 14 прямоугольных — $90°$, $60°$ и $30°$.





Третий пример (на рисунке справа) построен так. Возьмём на стороне AB треугольника ABC такие точки U, V, что $\angle ACU = \angle BCV = 15°$, на сторонах AC, BC точки X, Y соответственно, а на биссектрисе угла C точку Z так, что $XU \parallel CZ \parallel YV$, $XU = CZ = YV$. Тогда $CXUZ$, $CYVZ$ — ромбы, которые можно разрезать на четыре равных треугольника с углами 15°, 15° и 150° (или 75°, 75° и 30°). Теперь, проведя в прямоугольных треугольниках AUX, BVY средние линии, а в правильном треугольнике UVZ медианы, получим 14 равных прямоугольных треугольников.



7. *Хозяйка достала кусок мяса из холодильника, вокруг неё собрались котята. Раз в минуту хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котят (на свой выбор), причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли хозяйка скормить котятам поровну мяса, если всего котят а)* [3] *двое; б)* [7] *трое?*

(Андрей Кушнир)

Ответы: может в обоих пунктах.

Пусть вес исходного куска равен 1, а вес куска, оставшегося после первого отрезания, равен a. Тогда доля отрезаемого куска каждый раз равна $1-a$. Значит, вес второго отрезанного куска равен $a(1-a)$, а вес оставшегося равен $a-a(1-a)=a^2$, и так далее: после k-того отрезания вес оставшегося куска равен a^k, а вес отрезанного равен $(1-a)a^k$. Сократив на $(1-a)$, получим, что задачу можно переформулировать так:

для некоторого a между 0 и 1 и натурального k нужно разбить числа $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ на группы с равными суммами (две группы в пункте а) и три группы в пункте б)).

а) Заметим, что квадратное уравнение $1 = x + x^2$ имеет корень a между 0 и 1 (например, потому, что при $x = 0$ правая часть меньше 1, а при $x = 1$ она больше 1; или можно явно найти этот корень: $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$). Мы нашли нужное разбиение чисел $1, a, a^2$ на две части с равными суммами: $\{1\}$ и $\{a, a^2\}$. (Тогда, отдав одному котенку первый кусочек, а другому — два следующих, хозяйка получит желаемый результат.)

б) Заметим, что квадратное уравнение $1 = x + x^3$ имеет корень a между 0 и 1 (например, потому, что при $x = 0$ правая часть меньше 1, а при $x = 1$ она больше 1).

Поскольку $1 = a+a^3$, то для любого натурального k выполнено равенство $a^k = a^{k+1}+a^{k+3}$. Тогда

$$1 = a + a^3 = (a^2 + a^4) + a^3 = a^2 + (a^5 + a^7) + (a^4 + a^6) = a^2 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7.$$

Таким образом, для $n = 8$ и указанного a числа 1, a, $\ldots$, a^7 можно разбить на три группы с равными суммами:

$$\{1\}, \quad \{a, a^3\}, \quad \{a^2, a^4, a^5, a^6, a^7\}.$$

Замечание 1. Существуют и другие разбиения:

$$1 = a + a^4 + a^6 = a^2 + a^3 + a^5 + a^7,$$
$$1 = a^2 + a^3 + a^4 = a + a^5 + a^6 + a^7.$$

Замечание 2. Существуют примеры с другим значением a. Например, если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

$$1 + a^4 = a + a^2 = a^3 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}.$$

Замечание 3. Для четырёх котиков также существует пример. Если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

$$1 = a^2 + a^3 = a + a^5 = a^4 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + a^{13}.$$

Замечание 4 (для знатоков). В настоящий момент не известно, разрешима ли задача для $k \geqslant 5$ котиков. Есть лишь несколько дополнительных соображений, которые могут помочь в анализе общего случая. За каждым разбиением должен стоять неприводимый многочлен (как a^3+a-1 в решении задачи, или как a^3+a^2-1 в замечании 2), на который делятся разности элементов разбиения. Этот многочлен должен иметь действительный корень $a \in (0,1)$, удовлетворяющий дополнительным условиям. Так как одна из частей разбиения не меньше 1, то сумма остальных частей не меньше $k-1$. Значит

$$a + a^2 + \ldots = \frac{a}{1-a} > k - 1.$$

То есть корень многочлена должен лежать в интервале $(1-\frac{1}{k}, 1)$, и не должно быть корней в интервале $(0, 1-\frac{1}{k})$ (если бы такой корень был, то для него те же части, тоже были бы равны, что невозможно). В частности, это означает что многочлен не может быть возвратным.

Более простым для исследования является случай, когда одна из долей в точности равна 1. Тогда для некоторого n искомый неприводимый многочлен должен быть делителем многочлена

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a - (k-1).$$

Если все многочлены такого вида окажутся неприводимыми, то это будет означать что разбиение на k частей (когда одна из долей равна 1) невозможно. Пока доказательство последнего утверждения известно только для $k = 5$, см. `https://mathoverflow.net/q/490414/5712`

10 – 11 классы

1 [5]. *Существует ли такое положительное число $x > 1$, что*

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \ldots > \{x^{100}\}?$$

(Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между x и ближайшим целым числом, не превосходящим x.)

(Алексей Толпыго)

Ответ: существует.

Решение 1. Возьмём $x = 10^{100} + 0{,}1$. Тогда

$$x^n = 10^{100n} + C_n^1 10^{100(n-1)}(0{,}1) + \ldots + C_n^{n-1} 10^{100}(0{,}1)^{n-1} + (0{,}1)^n,$$

откуда $\{x_n\} = (0{,}1)^n$ при $n \leqslant 100$.

Решение 2. Возьмём $x = 2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 2^{-200}$. Тогда

$$x^n = 2^n - 2^{n-1}n\varepsilon + R\varepsilon^2,$$

где

$$|R| < 2^{n-2}(C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n) < 2^{200}$$

при $n \leqslant 100$, откуда

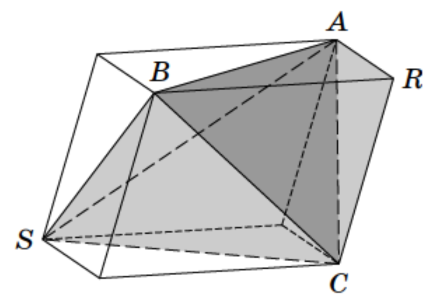
$$(2^{n-1}n - 1)\varepsilon < 1 - \{x^n\} < (2^{n-1}n + 1)\varepsilon < 1.$$

Следовательно, $0 < 1 - \{x\} < 1 - \{x^2\} < 1 - \{x^{100}\}$, что и требовалось.

2 [6]. *Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC. Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC. Оказалось, что рёбра SA, SB, SC первой пирамиды параллельны соответственно граням BCR, ACR и ABR второй пирамиды. Докажите, что объём одной из этих пирамид вдвое больше объёма другой.*

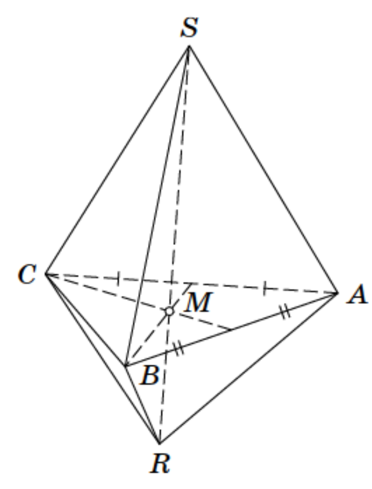
(Михаил Евдокимов)

Первый способ. Пусть рёбра SA, SB, SC параллельны граням BCR, ACR и ABR соответственно. Проведём через SA, SB, SC плоскости, которые параллельны BCR, ACR и ABR соответственно. Получается параллелепипед, пять вершин которого совпадают с вершинами наших пирамид (рисунок справа). Пусть V — объём этого параллелепипеда.



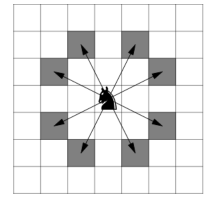
Тогда объём пирамиды $RABC$ равен $\frac{V}{6}$, как и объём трёх других пирамид, основаниями которых являются грани тетраэдра $SABC$. Поэтому объём пирамиды $SABC$ равен $V - 4\frac{V}{6} = 2 \cdot \frac{V}{6}$, то есть вдвое больше объёма пирамиды $RABC$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рисунок справа). Пусть α, β, γ — плоскости, проходящие через точки A, B, C, параллельные плоскостям BCR, ACR, ABR соответственно. Поскольку $SA \parallel BCR$, точка S лежит в плоскости α. Аналогично, она лежит и в плоскостях β и γ. Пусть R' — образ точки R при гомотетии с центром в точке M и коэффициентом -2. При этой гомотетии середина отрезка BC переходит в A, поэтому плоскость BCR переходит в плоскость α. Значит, $R' \in \alpha$. Аналогично, $R' \in \beta$ и $R' \in \gamma$. Плоскости ABR, BCR, ACR имеют единственную общую точку, поэтому их образы α, β, γ при рассматриваемой гомотетии тоже имеют единственную общую точку. Таким образом, получаем, что $R' = S$.



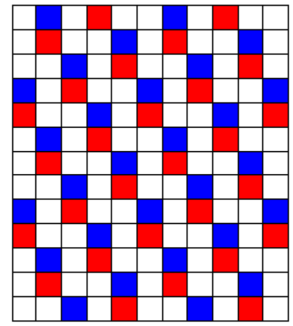
По построению точки R' расстояние от неё до плоскости ABC в два раза больше, чем расстояние от R до этой плоскости, поэтому объём пирамиды $R'ABC$ (она же $SABC$) вдвое больше объёма пирамиды $RABC$.

3 [7]. *Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 5 других?*
(Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.)



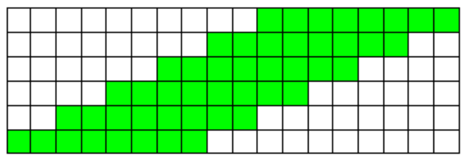
(Александр Тертерян)

Ответ: можно.

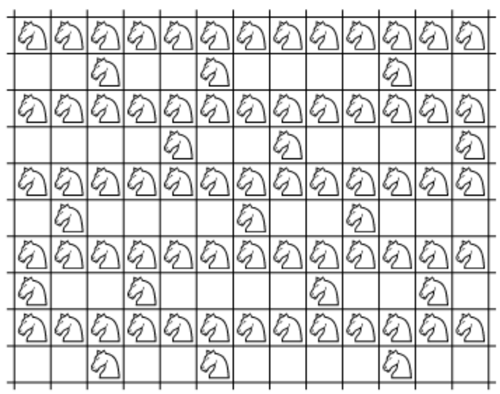


Способ 1. Выложим на плоскости красно-синие доминошки, как на рисунке справа (показан кусок бесконечного паркета), и поставим коней на все цветные клетки. Каждый конь бьёт четырёх коней на клетках своего цвета и одного на клетке другого цвета.

Способ 2. Поставим коней на зелёные клетки рисунка ниже (показан кусок бесконечного паркета).



Способ 3. Поставим коней, как показано на рисунке ниже (показан кусок бесконечного паркета).



Замечание 1. Приведённые способы расстановки коней принципиально различаются тем, что в первом примере «плотность коней» — $2/5$, во втором — нулевая, а в третьем — $5/8$. Подумайте, какие ещё значения плотности реализуются.

Замечание 2. Можно раскрасить всю плоскость в 5 цветов, как показа-но на рисунке ниже. При этом конь в каждой клетке каждого цвета будет бить четыре клетки того же цвета и по одной клетке каждого из остальных цветов. Таким образом, для построения примера к задаче достаточно выбрать какие-то два цвета и поставить коней на все клетки этих цветов. Аналогично можно построить пример, в котором каждый конь бьёт 6 или 7 других: для этого достаточно взять все клетки трёх или четырёх цветов.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

4 [8]. *В стране, валюта которой — тугрики, ходят только купюры двух целочисленных достоинств. И покупатель, и продавец имеют достаточно много и тех, и других купюр, но при каждом платеже могут использовать вместе не более k купюр (включая сдачу). Известно, что так можно сделать платёж на любую целую сумму от 1 до n тугриков. Каково наибольшее возможное n (в зависимости от k)?*

(Александр Шаповалов)

Ответ: $n = k(k+1)$.

Оценка. Пусть используются купюры достоинств P и Q. Пусть купюр в платеже ровно m. Если сдача не нужна, то есть $m+1$ вариант: от 0 до m купюр P, остальные — Q. Если есть сдача, то платят купюрами одного вида, а сдачу дают купюрами другого вида. Тогда возможен $m-1$ вариант: используется от 1 до $m-1$ купюр P, остальные — Q. Всего для m купюр есть $2m$ вариантов. Суммируя по всем возможным m, получим $2(1+2+\ldots+k) = k(k+1)$ возможных вариантов сумм.

Пример. Будем использовать купюры в k и $k+1$ тугрик. Докажем, что любая сумма от 1 до $k(k+1)$ тугриков представляется в виде $ak + b(k+1)$, где $|a| + |b| \leqslant k$.

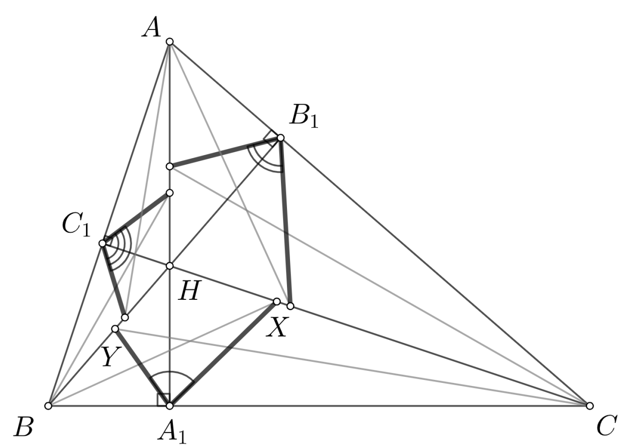
Сначала докажем, что все такие представления дают разные суммы. Пусть эта же сумма представлена иначе $ck + b(k+1)$. Поскольку и тут $|c| + |d| \leqslant k$, то $|a| + |b| + |c| + |d| \leqslant 2k$.

Из равенства $ak + b(k+1) = ck + b(k+1)$ следует, что $(a-c)k = (d-b)(k+1)$. Тогда $a-c$ кратно $k+1$, $d-b$ кратно k, и обе разности не равны 0. Значит, $k+1 \leqslant |a-c| \leqslant |a| + |c|$, $k \leqslant |d-b| \leqslant |d| + |b|$, откуда $2k+1 \leqslant |a| + |b| + |c| + |d|$. Противоречие.

Итак, все представления указанного вида дают разные суммы. Так как максимальная сумма равна $k(k+1)$, все суммы целые, и всего их $k(k+1)$, то получаются все суммы от 1 до $k(k+1)$.

5 [10]. *Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектрисы углов B и C треугольника BHC пересекают отрезки CH и BH в точках X и Y соответственно. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.*

(Алексей Доледенок)

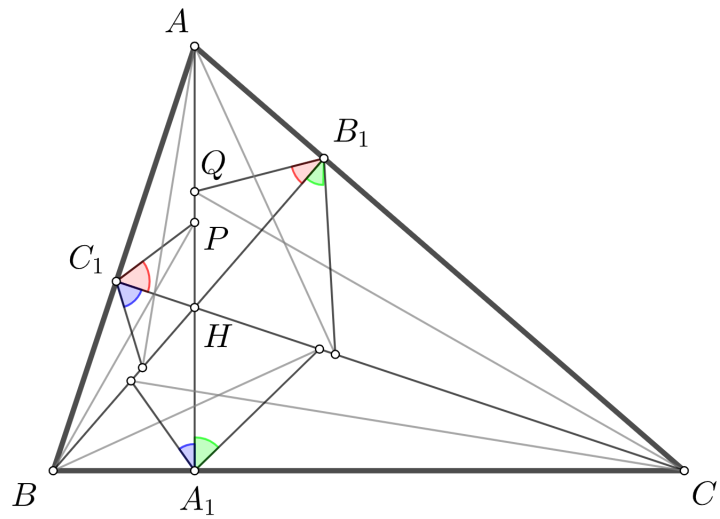


Ответ: $270°$.

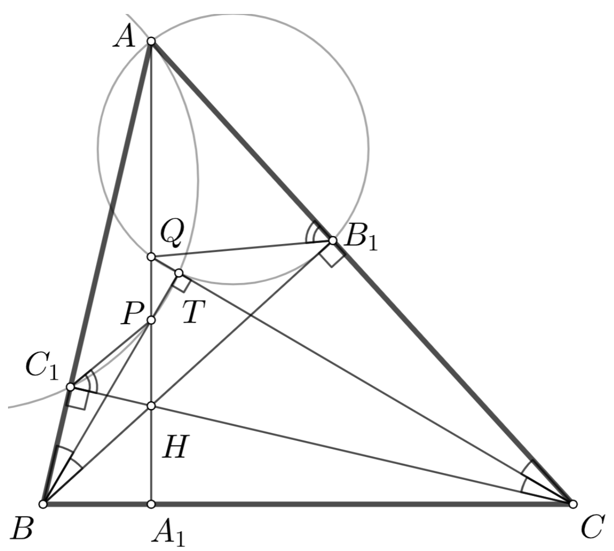
Обозначим точки пересечения биссектрис углов ABH и ACH с отрезком AH через P и Q соответственно. Докажем, что

$$\angle PC_1H = \angle AB_1Q = 90° - \angle QB_1H.$$

Из этого будет следовать решение задачи — сумма из условия разбивается на три пары углов с суммой $90°$ (см. рисунок), то есть искомая сумма будет равна $270°$.



Способ 1. Окружность, построенная на BC как на диаметре, проходит через точки B_1 и C_1, а биссектрисы вписанных углов B_1BC_1 и B_1CC_1 проходят через середину дуги B_1C_1, на которую они опираются; обозначим её через T. Таким образом, T — это точка пересечения прямых BP и CQ.



Поскольку

$$\angle BTC_1 = \angle BCC_1 = \angle BAA_1,$$

то точки A, T, P, C_1 лежат на одной окружности. Аналогично точки A, T, Q, B_1 лежат на одной окружности.

Тогда

$$\begin{aligned}\angle AC_1P + \angle AB_1Q &= (180^\circ - \angle ATP) + (180^\circ - \angle ATC) = \\ &= 360^\circ - (\angle ATP + \angle ATC) = 360^\circ - (360^\circ - \angle BTC) = \\ &= \angle BTC = 90^\circ,\end{aligned}$$

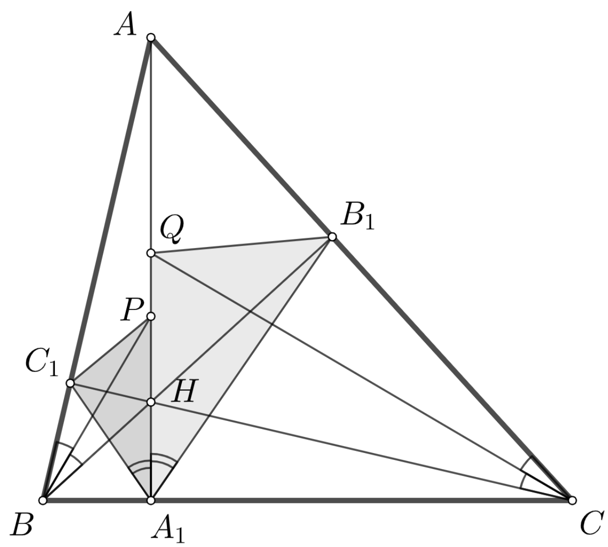
что и требовалось.

Способ 2. Так как $\angle ABH = \angle ACH$, то и $\angle ABP = \angle HCQ$, поэтому

$$\angle BPA_1 = \angle ABP + \angle BAP = \angle HCQ + \angle BCH = \angle BCQ.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники BPA_1 и QCA_1 подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{BA_1}{PA_1} = \frac{QA_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = PA_1 \cdot QA_1. \tag{1}$$



Как известно, треугольники A_1BC_1 и A_1B_1C подобны треугольнику ABC, а следовательно, подобны друг другу. Отсюда

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = B_1A_1 \cdot A_1C_1. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$PA_1 \cdot QA_1 = B_1A_1 \cdot A_1C_1 \Leftrightarrow \frac{PA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{QA_1}.$$

Воспользуемся ещё одним известным фактом: высота AA_1 — это биссектриса угла $B_1A_1C_1$. Из того, что $\angle C_1A_1P = \angle B_1A_1Q$ получаем, что треугольники PC_1A_1 и B_1QA_1 подобны по углу и отношению прилежащих сторон, откуда $\angle A_1C_1P = \angle A_1QB_1$.

Тогда

$$\angle PC_1H = \angle A_1C_1P - \angle A_1C_1C = \angle A_1QB_1 - \angle A_1AC = \angle AB_1Q,$$

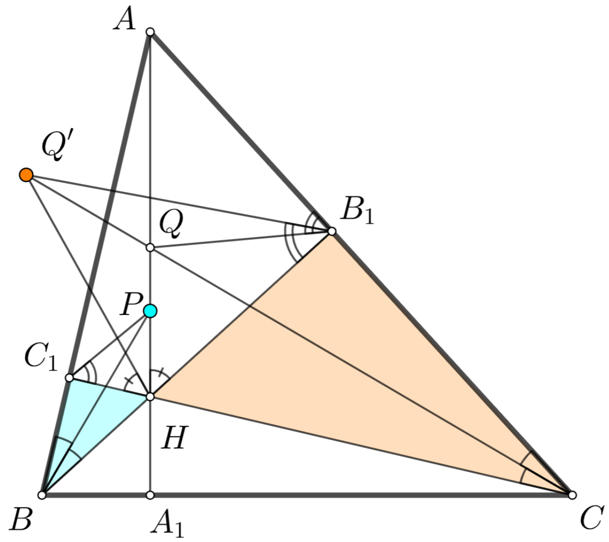
что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. Это решение можно переформулировать в терминах инверсии. Рассмотрим композицию инверсии с центром в точке A_1 радиуса $\sqrt{BA_1 \cdot A_1C}$ и симметрии относительно прямой AA_1. При этой композиции меняются местами точки B и C, A и H. Окружность, построенная на BC как на диаметре, переходит в себя, поэтому точки B_1 и C_1 меняются местами. Если точка P переходит в P', то по свойству инверсии $\angle PBH = \angle P'CA$, то есть $P' = Q$. Но тогда $\angle PC_1H = \angle QB_1A$, что и требовалось.

Способ 3. Пусть Q' — точка, изогонально сопряжённая Q относительно треугольника B_1CH. Так как

$$\angle ACQ' = \angle ACQ = \angle C_1BP \quad \text{и} \quad \angle Q'HC_1 = \angle QHB_1 = \angle PHB_1,$$

то точки P и Q' — соответствующие точки в подобных треугольниках BC_1H и CB_1H. Тогда $\angle AB_1Q = \angle HB_1Q' = \angle HC_1P$, что и требовалось доказать.

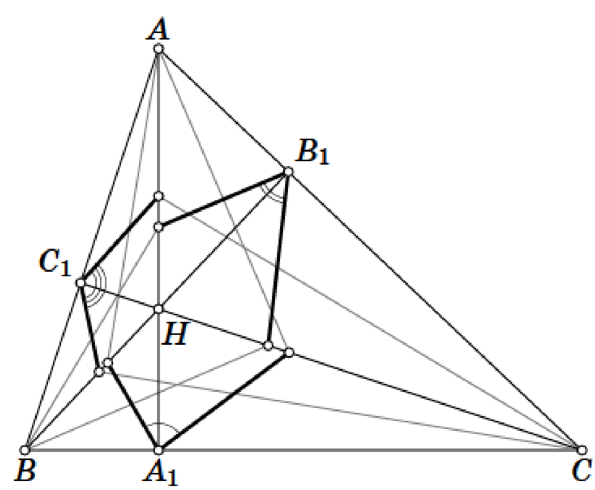


Способ 4. Введём такие обозначения для углов: $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle PC_1H = \varphi$, $\angle AB_1Q = \psi$. Через $\rho(X, \ell)$ будем обозначать расстояние от точки X до прямой ℓ. Воспользовавшись тем, что P лежит на биссектрисе угла ABB_1, и тем, что $\angle AHC_1 = \gamma$ и $\angle AHB_1 = \beta$, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{C_1P \cdot \sin\varphi}{C_1P \cdot \sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\rho(P, CC_1)}{\rho(P, AC_1)} = \frac{\rho(P, CC_1)}{\rho(P, BB_1)} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Аналогично $\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, то есть $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\psi$. Поскольку φ и ψ меньше 90°, то равенство их тангенсов равносильно их равенству, то есть $\varphi = \psi$.

Комментарий. Соединим точку A_1 с основаниями биссектрис углов BAH и CAH, то же проделаем для точек B_1 и C_1. Аналогично доказывается, что сумма полученных углов равна 270°.



6 [10]. *Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n со свойством: $f(m)$ не делится на n, но $f(p^k)$ делится на n для любого простого p и любого натурального k. Не ошибается ли барон?*

(Алексей Волостнов, Станислав Гришин)

Ответ: существует.

Пример 1. Возьмём $f(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1), m = 6, n = 32$. При нечётном x получаем тогда, что $f(x)$ делится на произведение четырёх последовательных чётных чисел, одно из которых кратно 4. Далее, $f(2) = f(4) = 0$. При $k \geqslant 3$ имеем: $f(2^k)$ делится на $2^k(2^k-4)$, что делится на 32. Но $f(6) = 7!$ не делится на 32.

Пример 2. Рассмотрим $f(x) = (x-3)(x-9)(x^{18}-1)$, $m = 6$, $n = 27$. Тогда $f(6)$ не делится на 27. В то же время, если $p = 3$, то p^k даёт остаток 0, 3 или 9 при делении на 27 и $f(p^k)$ делится на 27, а при $p \neq 3$ число $(p^k)^{18} - 1$ делится на 27 по теореме Эйлера.

Замечание. Если добавить условие взаимной простоты чисел n и m, то ответ к задаче изменится на противоположный. В самом деле, предположим, что такое m нашлось. Нетрудно видеть, что в качестве n всегда можно брать степень простого числа. Действительно, если $f(m)$ не делится на n, то оно не делится и на q^l для некоторого простого q, для которого $n = bq^l$. В то же время из равенства $f(p^k) \equiv 0 \pmod{n}$ следует аналогичное равенство и для q^l. Если существует простое число r вида $q^l y + m$, то для него выполняются сравнения $0 \equiv f(r) \equiv f(m) \pmod{q^l}$. Существование такого простого числа следует из известной в теории чисел *теоремы Дирихле* о простых числах в арифметической прогрессии. Она утверждает, что в любой арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d, где натуральные числа a и d взаимно просты, найдётся бесконечно много простых чисел. Доказательство этой теоремы выходит далеко за рамки школьной программы.

7 [12]. *Петя красит каждую клетку доски $2m \times 2n$ в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше двухцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа двухцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася?*
(Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.)

(Александр Грибалко)

Ответ: $(m-1)(n-1)+1$ доминошек.

Покажем, что как бы Петя ни раскрасил доску, Вася сможет разрезать её так, чтобы получить не более $(m-1)(n-1)+1$ двухцветных доминошек. Он мысленно делит доску на каёмку ширины 1 и на $(m-1)(n-1)$ квадратов 2×2.

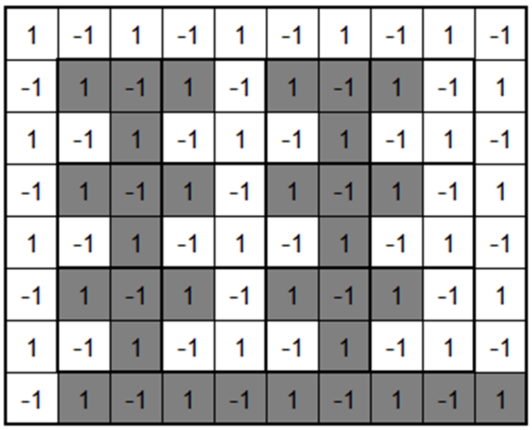
Ни один из этих квадратов не может быть окрашен в шахматном порядке, иначе чёрный и белый многоугольники пересекались бы. Поэтому Вася может разрезать каждый из квадратов на две доминошки, хотя бы одна из которых одноцветна.

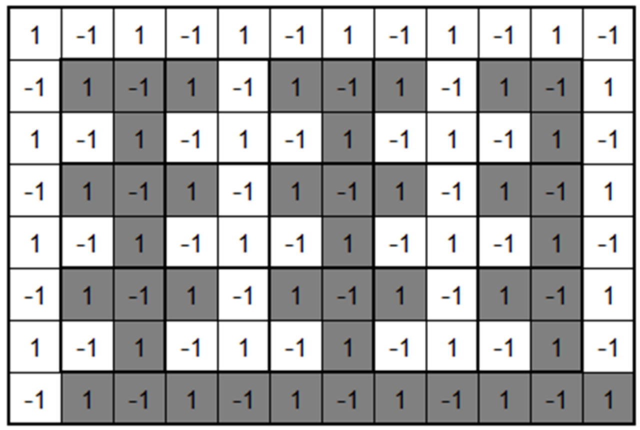
Докажем, что чёрные и белые клетки каёмки образуют связные множества. Если это не так, то рассмотрим две несоседние чёрные области на каёмке. Между ними есть путь по чёрным клеткам, в котором каждый переход делается в соседнюю по стороне клетку. Этот путь разбивает доску на две части, каждая из которых содержит белые клетки. Но тогда между этими клетками не может быть пути по белым клеткам, то есть белые клетки не образуют многоугольник.

Из доказанного утверждения следует, что если Вася будет резать каёмку на доминошки, начав от границы двух цветов, то получит максимум одну двухцветную доминошку на следующем стыке цветов. Таким образом, всего Вася получит не более $(m-1)(n-1)+1$ двухцветных доминошек.

Теперь покажем, как может Петя покрасить доску, чтобы гарантировать такое количество. Он также мысленно делит доску на те же части, а клетки нумерует числами -1 и 1 в шахматном порядке.

В каёмке Петя красит в чёрный цвет все нижние клетки, кроме самой левой. Столбцы из квадратов 2×2 он нумерует по порядку и в нечётных столбцах красит в чёрный цвет трёхклеточные уголки в каждом квадрате, а в чётных — по одной клетке, как показано на рисунке. Остальные клетки Петя красит в белый цвет.





Очевидно, что чёрные и белые клетки образуют многоугольники. Кроме того, в каждой области сумма чисел в чёрных клетках равна 1, поэтому во всём чёрном многоугольнике эта сумма равна $(m-1)(n-1)+1$. Так как сумма в каждой доминошке равна нулю, то Вася при разрезании вынужден будет создать не менее $(m-1)(n-1)+1$ двухцветных доминошек.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. *На плоскости расположены круг и правильный 100-угольник, имеющие одинаковые площади. Какое наибольшее количество вершин 100-угольника может находиться внутри круга (не на границе)?*

(С. Дориченко, Б. Френкин)

Ответ: 50.

Решение. Заметим, что 51 вершина не помещается, так как тогда среди них нашлись бы две диаметрально противоположные точки, их можно было бы поместить на диаметр круга, и весь 100-угольник поместился бы в данном круге вместе со своим описанным кругом, площадь которого больше.

Докажем, что 50 вершин поместить можно. Заметим, что диагональ, соединяющая 1-ю и 50-ю вершины — это диаметр вписанного круга 100-угольника, площадь этого круга меньше площади 100-угольника. Поэтому внутрь диаметра исходного круга 1-я и 50-я вершины поместятся. Рассмотрим тогда описанную окружность ω нашего 100-угольника. Она не может лежать целиком в исходном круге, а значит, пересекается с окружностью исходного круга в двух точках. Тогда одна из дуг окружности ω (на самом деле меньшая) поместится внутри исходного круга, то есть заведомо поместятся 50 вершин 100-угольника.

2. *Дано натуральное число n. Натуральное число m назовём* удачным, *если найдутся m последовательных натуральных чисел, сумма которых равна сумме n следующих за ними натуральных чисел. Докажите, что количество удачных чисел нечётно.*

(Б. Френкин, П. Кожевников)

Решение 1. Ясно, что $m > n$, положим $m = n + k$, где k — натуральное, и будем искать количество подходящих k, то есть таких k, для которых уравнение

$$x+(x+1)+\ldots+(x+k-1)+((x+k)+\ldots+(x+k+n-1)) = (x+k+n)+\ldots+(x+k+2n-1)$$

имеет решение в натуральных x. Преобразуем:

$$x + (x + 1) + \ldots + (x + k - 1) = n^2;$$

$$(2x + k - 1)k = 2n^2. \qquad (*)$$

Слева в уравнении $(*)$ два сомножителя разной чётности, дающие в произведении $2n^2$, при этом левый сомножитель больше правого. Наоборот, если зафиксировать нечётный делитель d числа $2n^2$, то, зная d, найдём дополнительный делитель $d' = 2n^2/d$, и далее из системы $k = \min\{d, d'\}$, $2x+k-1 = \max\{d, d'\}$ однозначно находим натуральное x (равное $(|d-d'|+1)/2$).

Итак, количество подходящих k равно количеству нечётных делителей числа $2n^2$, которое, в свою очередь, равно количеству всех делителей числа s^2, где (нечётное) s получается из n делением на наибольшую степень двойки, входящую в разложение n. Но количество делителей точного квадрата нечётно (так как все делители числа s^2, кроме s, можно разбить на пары: $t \leftrightarrow s^2/t$, и только делитель s остаётся без пары).

Решение 2. Очевидно, $m = n + k$, где k натуральное. Запишем равенство из условия в виде

$$(a + 1) + \ldots + (a + m) = (a + m + 1) + \ldots + (a + m + n).$$

Отсюда

$$a = \frac{n^2}{k} - \frac{k+1}{2}. \qquad (**)$$

Чтобы условие задачи выполнялось с данным k, необходимо и достаточно, чтобы a было целым неотрицательным.

Положим $n = s \cdot 2^r$, где s нечётное, r целое неотрицательное. Тогда a будет целым в двух случаях: (а) если оба члена равенства $(**)$ целые; (б) если оба они полуцелые. Первый случай имеет место, когда k — нечётный делитель числа n^2, то есть делитель числа s^2. Количество c таких значений k нечётно, поскольку это всевозможные делители полного квадрата. Второй случай означает, что

$$k = d \cdot 2^{2r+1},$$

где d — делитель числа s^2. Между первым и вторым множеством значений k есть биекция: каждому k из первого множества соответствует число $2n^2/k$ из второго множества, и обратно.

Пусть (f, g) — пара из указанной биекции, причём $f < g$. Тогда при $k = f$ получится неотрицательное a, а при $k = g$ отрицательное. Действительно, в силу (**) требуется проверить неравенство

$$k(k+1) \leqslant 2n^2.$$

Но $f(f+1) \leqslant fg = 2n^2$, $g(g+1) > gf = 2n^2$, что и требовалось. Поэтому подходящих значений k будет ровно c, то есть нечётное количество.

3. *Пусть A — набор из $n > 1$ различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел $a, b \in A$, где $a < b$, подсчитаем, сколько чисел в A являются делителями числа $b - a$. Какое наибольшее значение может принимать сумма полученных $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел?*

(В. Новиков)

Ответ: $C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.

Решение. Сначала докажем оценку. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — элементы набора A.

Заметим, что разность вида $a_j - a_i$ при $i < j$ может делиться на a_k лишь при $k < j$.

Выберем любые $1 \le k < j \le n$ и посмотрим, сколько из чисел вида $a_j - a_i$ (при $i < j$) может делиться на a_k. Все такие числа при $i \le k$ отличаются менее, чем на a_k, поэтому на a_k может делиться лишь одно из них. Значит, всего таких разностей может быть максимум $(j - k - 1) + 1 = j - k$. Итого, получаем оценку

$$\sum_{1 \le k < j \le n} (j - k) = \sum_{j=2}^{n} \frac{j(j-1)}{2} = \sum_{j=2}^{n} C_j^2 = C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$

Это количество достигается, например, на наборе $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$. Здесь все неравенства из оценки обращаются в равенства, а значит, и оценка достигается.

Есть и другие примеры, в том числе, в которых все числа набора попарно взаимно простые, скажем, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 7, \dots, a_{k+1} = a_1 a_2 \dots a_k + 1$.

4. *В трёхмерном координатном пространстве рассмотрим множество всех кубов с целочисленными координатами вершин. Докажите, что в этом множестве существует такое бесконечное подмножество K, что любые два разных куба из K не имеют параллельных рёбер.*

(М. Малкин, М. Мееров)

Решение 1. Рассмотрим куб с тремя направляющими векторами рёбер вида (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), где $a = -n$, $b = n+1$, $c = n(n+1)$. Здесь a, b, c подобраны с условием $ab + bc + ca = 0$ (или $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$), так что эти три вектора попарно перпендикулярны.

Выбирая $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим набор кубов без параллельных рёбер (нетрудно проверить, что никакие два соответствующих вектора не пропорциональны).

Замечание. Геометрически можно интерпретировать эту конструкцию так: делается поворот ребер-векторов стандартного единичного куба $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ на подходящий угол вокруг вектора диагонали $(1, 1, 1)$ (так, чтобы координаты новых векторов оказались рациональными) и далее гомотетия с нужным коэффициентом, превращающая рациональные координаты векторов в целые.

Решение 2. Рассмотрим куб с тремя направляющими векторами рёбер вида $(2, 2n, n^2)$, $(2n, n^2 - 2, -2n)$, $(-n^2, 2n, -2)$. Длина каждого ребра равна тогда $n^2 + 2$. Нетрудно проверить, что они взаимно перпендикулярны.

Выбирая $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим набор кубов без параллельных рёбер (нетрудно проверить, что никакие два соответствующих вектора не пропорциональны).

Решение 3. Основная идея решения состоит в следующем. Мы будем рассматривать кубы с направляющими рёбрами $(0, 0, c)$, $(0, c, 0)$, $(c, 0, 0)$, где в качестве c будем брать длины гипотенуз некоторых прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Затем будем поворачивать эти кубы сначала относительно оси Oz, а потом — относительно новой (повёрнутой) оси Ox так, чтобы они по-прежнему имели целочисленные вершины и удовлетворяли условию задачи.

Заметим сначала, что на плоскости Oxy имеется бесконечно много квадратов с целыми вершинами и целыми длинами сторон, повёрнутых относительно оси Oz на разные углы больше $0°$ и меньше $90°$ — поскольку существует бесконечно много непропорциональных пифагоровых троек. (Для пифагоровой тройки a, b, c, где $a^2 + b^2 = c^2$, рассматриваем квадрат со стороной c, построенный на векторе (a, b).)

Тогда для исходного и повёрнутого кубов будет только одно направление, в котором есть параллельные рёбра (направление Oz). Рассмотрим теперь для нового куба плоскость α, содержащую старую ось Oz и новую (повёрнутую) ось Oy. Направляющие векторы рёбер куба, лежащих в плоскости α, также задают на ней целочисленную квадратную решётку. В плоскости α тогда тоже есть бесконечно много квадратов с целыми вершинами и целыми длинами сторон, повёрнутых относительно новой оси Ox на угол больше $0°$ и меньше $90°$.

Тогда бесконечное семейство кубов строим так: каждый очередной куб первым поворотом (относительно Oz) делаем таким, чтобы его рёбра были непараллельны ни одному ребру всех предыдущих кубов, кроме рёбер, параллельных Oz, а вторым поворотом добиваемся, чтобы его рёбра были непараллельны вообще ни одному из рёбер предыдущих кубов. Это можно сделать, так как возможных поворотов бесконечное количество, как было сказано выше!

(Или так: можно доказать, что имеются необходимые повороты на сколь угодно малые углы, а тогда перед очередным поворотом можно измерить всевозможные ненулевые углы между рёбрами нового куба и рёбрами предыдущих кубов и повернуть на угол, который меньше всех этих углов. Тогда после первого поворота останется только параллельность направлению Oz, а после второго рёбра разных кубов уже не будут параллельны друг другу.)

Обозначив через A_n множество кубов, построенных на n-м шаге, видим, что каждое очередное множество содержит предыдущее множество и ещё один новый куб. Рассмотрев объединение всех множеств A_n (для $n = 1, 2, 3, \ldots$), получим искомый бесконечный набор.

Идея решения 4. Рассмотрим единичный куб с направляющими рёбрами $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$. Будем отражать его относительно таких плоскостей, проходящих через начало координат, у которых целые коэффициенты в уравнении. Будут получаться кубы с рациональными координатами, так как проекция вектора с рациональными координатами на такую плоскость — тоже вектор с рациональными координатами.

(В самом деле, если уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz=0$, то перпендикулярный ей вектор имеет координаты (a,b,c) — так как скалярное произведение его и любого вектора в нашей плоскости равно нулю. Рассмотрим вектор с рациональными координатами (p,q,r). Чтобы спроецировать его на нашу плоскость, надо прибавить к его концу (p,q,r) вектор $\alpha(a,b,c)$, подобрав коэффициент α так, чтобы конец итогового вектора $(p,q,r)+\alpha(a,b,c)$, попал в нашу плоскость. Получаем уравнение

$$a(p+\alpha a)+b(q+\alpha b)+c(r+\alpha c)=0; \quad \text{то есть} \quad \alpha=-\frac{ap+bq+cr}{a^2+b^2+c^2}.$$

Видим, что α рационально, откуда проекция тоже имеет рациональные координаты.)

С помощью гомотетии с центром в начале координат каждый такой куб можно превратить в куб с целыми координатами.

Далее, выбираем бесконечный набор этих плоскостей так, что, отразив относительно них единичный куб, мы получим искомый набор кубов. (Например, выбираем эти плоскости так, чтобы угол между любыми двумя из них был меньше 1 градуса.)

5. *По кругу стоит 99 тарелок, на них лежат булочки (на тарелке может быть любое число булочек или вовсе их не быть). Известно, что на любых 20 подряд идущих тарелках лежит суммарно хотя бы k булочек. При этом ни одну булочку ни с одной тарелки нельзя убрать так, чтобы это условие не нарушилось. Какое наибольшее суммарное число булочек может лежать на тарелках?*

(В. Ретинский, П. Кожевников)

Ответ: $9k$ булочек.

Пример. Пронумеруем тарелки по кругу и положим по k булочек на тарелки, номера которых делятся на 11. Остальные тарелки будут пустыми. Тогда для каждой непустой тарелки найдутся 20 подряд идущих тарелок, среди которых она — единственная непустая. Поэтому булочку с неё снять нельзя.

Оценка. Пусть ни одной булочки убрать нельзя. Тогда для каждой непустой тарелки A есть *цепочка* из 20 тарелок, содержащая A, в которой суммарно ровно k булочек. Рассмотрим все такие цепочки.

Докажем, что если цепочек не меньше 10, то одна из цепочек покрыта остальными. Предположим противное, возьмём тогда 10 цепочек и выделим в каждой из них тарелку, не покрытую остальными цепочками. Обозначим эти тарелки $T_1, T_2, \ldots, T_{10}$, двигаясь по часовой стрелке, так что T_i принадлежит цепочке C_i. Тогда каждая тарелка на дуге между соседними T_i и T_{i+1} принадлежит не более чем двум цепочкам — C_i и C_{i+1}. Отсюда $10\cdot 20=|C_1|+|C_2|+\ldots+|C_{10}|\leqslant 2\cdot 99-10$. Противоречие.

Если одна цепочка покрыта остальными, выбросим её. Продолжая так далее, дойдем до ситуации, когда у нас (различных) цепочек не более 9 и эти цепочки покрывают все непустые тарелки. Тогда в них не более $9k$ булочек, тем самым оценка доказана.

Вариация оценки. Пусть ни одной булочки убрать нельзя. Тогда для каждой непустой тарелки A есть *цепочка* из 20 тарелок, содержащая A, в которой всего ровно k булочек. Если такая цепочка граничит с пустой тарелкой, то можно рассмотреть новую цепочку — эту пустую тарелку добавить, а одну тарелку с противоположного края удалить, и в новой цепочке будет не более k булочек, а значит, ровно k булочек. Двигаясь так по кругу, получим, что любая тарелка (не только непустая) входит в какую-то цепочку, содержащую ровно k булочек. Рассмотрим все такие цепочки. Вместе они покрывают все 99 тарелок.

Заметим, что если какая-то тарелка принадлежит сразу трём цепочкам, то одна из этих трёх цепочек содержится в объединении двух других (тут мы используем, что цепочки «не слишком длинные» — три цепочки не могут покрыть весь круг) и такую цепочку можно выкинуть, сохранив условие «цепочки покрывают все тарелки». Действуя так, можно добиться ситуации, когда никакие три цепочки не имеют общей тарелки. Тогда перекрываются между собой только «соседние» цепочки.

Занумеруем цепочки, идя по кругу. Если цепочек хотя бы 10, то имеется 5 неперекрывающихся цепочек длины 20 (например, цепочки с нечётными номерами), что невозможно, так как всего тарелок меньше 100. Значит, цепочек не более 9, а тогда булочек не более $9k$.

6. *Дан треугольник ABC. Пусть CL — его биссектриса, W — середина дуги BCA, а P — проекция ортоцентра на медиану, проведённую из вершины C. Окружность CPW пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB, в точке Q. Докажите, что $LC = LQ$.*

(А. Заславский)

Решение 1. Известно, что точка P — пересечение медианы с дугой AHB. Пусть R — середина этой дуги, M — середина AB. Точки P'' и R', симметричные P и R относительно M, лежат на окружности ABC; отсюда $MP \cdot MC = MP' \cdot MC = MR' \cdot MW = MR \cdot MW$, то есть R лежит на окружности CPW.

Далее, поскольку $CW \perp CL$, луч CL пересекает окружность $CPRW$ в точке U, диаметрально противоположной W, откуда $UR \parallel BC$. Тогда ML — средняя линия в треугольнике $RR'U$, то есть L — середина $R'U$. Поэтому во вписанной трапеции $RUCQ$ общий серединный перпендикуляр к RU и CQ проходит через L, откуда и следует требуемое.

Решение 2. Пусть Q' — такая точка на прямой CQ, что $CQ' = CL$. Докажем, что C, P, Q', W лежат на одной окружности. Рассмотрим композицию инверсии с центром C и симметрии относительно CL, меняющую местами точки A и B. Она также меняет местами прямую AB и описанную окружность треугольника, поэтому L переходит в середину U дуги AB, W в основание K внешней биссектрисы угла C, а точка Шалтая P в точку пересечения касательных в точках A и B. Далее, прямая CQ переходит в касательную к описанной окружности в точке C, а окружность с центром L, проходящая через C в серединный перпендикуляр к CU (поскольку образы точек C и U инверсны относительно этой окружности). Следовательно, Q' переходит в точку пересечения касательных в точках C и U.

Эта точка вместе с образом точки P и точкой K лежат на одной прямой — поляре точки L относительно окружности ABC, откуда и получаем искомое утверждение.