Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска 1987

Lagrangeov zakon i njegove primjene

BORIS J. PAVKOVIĆ, Zagreb

U br. 4 MFL-a (1986/87) objavljen je članak *Branimira Galića* pod naslovom »Zakon o težištu i njegove primjene«. U ovom se članku tretira slična problematika, tj. pokazuje se kako se pomoću jednog drugog fizikalnog zakona i to *Lagrangeovog zakona o inerciji* (J. L. Lagrange, 1736—1813, francuski matematičar, fizičar i astronom) mogu rješavati izvjesni matematički zadaci.

Osnovni objekt naših razmatranja je materijalna točka. *Materijalnom točkom* zovemo uređeni par (A, m), koji se sastoji od točke A i mase $m > 0$, $m \in R$. Intuitivno treba to shvatiti kao da imamo točku i u njoj smještenu masu. Svaki konačan skup materijalnih točaka zovemo *sistemom materijalnih točaka.*

Neka je sada $\mathscr{S} = \{(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)\}$ sistem materijalnih točaka, P bilo koja točka prostora i $d_i = |A_i, P|$, $i = 1, \ldots, n$ udaljenosti točaka A_i od točke P. Zbroj

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

zovemo *momentom inercije sistema $\mathscr{S}$ s obzirom na točku P.*

Za moment inercije vrijedi ovaj **Lagrangeov zakon o inerciji:**

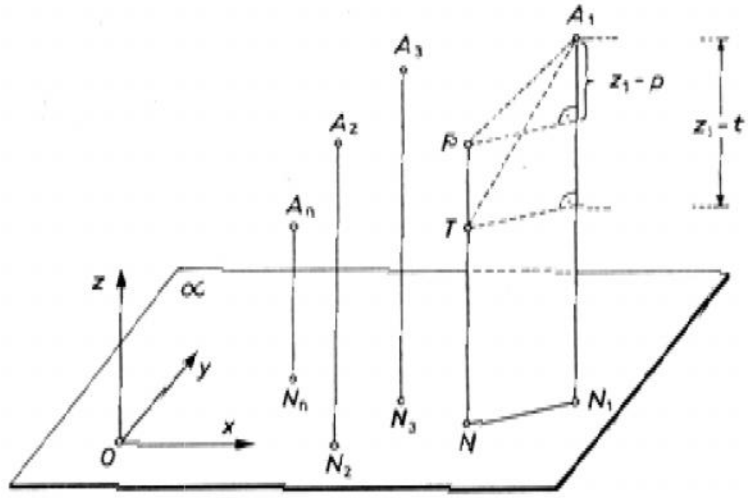
Ako je P bilo koja točka prostora, T težište sistema $\mathscr{S}$ i I_p, I_T momenti inercije sistema $\mathscr{S}$ s obzirom na točke P i T, onda vrijedi

$$I_p = I_T + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot |PT|^2. \tag{1}$$

Dokaz. Dokaz je posve elementaran. Dovoljno je znati formulu za radijvektor težišta sistema izvedenu u navedenom članku Branimira Galića.

Najprije, ako je $P \equiv T$ onda je tvrdnja isnitita na trivijalni način. Pretpostavimo stoga da je $P \not\equiv T$. Postoji beskonačno mnogo ravnina okomitih na PT i odaberimo onu od njih za koju su sve točke sistema $\mathscr{S}$ s njezine iste strane. Označimo tu ravninu sa α (v. sliku).

Označimo dalje s $N, N_1, \ldots, N_n$ nožišta okomica spuštenih iz točaka $P, A_1, \ldots, A_n$ na ravninu α, sa $p, z_1, \ldots, z_n$ udaljenosti tih točaka od α i sa t udaljenost točke T od α. Odaberimo prostorni pravokutni koordinatni sustav tako da mu se ishodište O i koordinatne osi Ox i Oy nalaze u α. Os Oz je tada okomita na α. Uz tako odabrani koordinatni sustav brojevi $p, t, z_1, \ldots, z_n$ su tada aplikate



(treće koordinate, z-koordinate) točaka $P, T, A_1, \ldots, A_n$. Neka je $\vec{r}_T$ radijvektor težišta T s obzirom na taj koordinatni sustav. Tada je

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Iz ove formule za z-koordinate navedenih točaka dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} m_i z_i = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot t. \tag{2}$$

Pretpostavimo da je sada $N \neq N_1$ (na slučaj $N = N_1$ osvrnut ćemo se malo kasnije). Promotrimo trapez NN_1A_1T. Sa slike vidimo da vrijedi

$$|TA_1|^2 = (z_1 - t)^2 + |NN_1|^2 \tag{3}$$

i

$$|PA_1|^2 = (z_1 - p)^2 + |NN_1|^2. \tag{4}$$

Odbijanjem jednakosti (3) od (4) dobivamo

$$|PA_1|^2 - |TA_1|^2 = (z_1 - p)^2 - (z_1 - t)^2 = (z_1 - p - z_1 + t)(z_1 - p + z_1 - t) =$$
$$= (t - p)(2z_1 - p - t) = (t - p)[t - p + 2(z_1 - t)] = (t - p)^2 + 2(t - p)(z_1 - t).$$

Dakle, imamo

$$|PA_1|^2 - |TA_1|^2 = |PT|^2 + 2(t - p)(z_1 - t).$$

Pomnožimo li ovu jednadžbu sa m_1, dobit ćemo

$$m_1 |PA_1|^2 - m_1 |TA_1|^2 = m_1 |PT|^2 + 2(t - p)(m_1 z_1 - m_1 t). \tag{5}$$

Lako se vidi da jednakosti (3), (4) pa onda i (5) vrijede i u slučaju $N = N_1$, pa je time ovaj slučaj apsolviran.

Analogno se dobiva

$$m_2 |PA_2|^2 - m_2 |TA_2|^2 = m_2 |PT|^2 + 2(t - p)(m_2 z_2 - m_2 t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_n |PA_n|^2 - m_n |TA_n|^2 = m_n |PT|^2 + 2(t - p)(m_n z_n - m_n t).$$

Zbrajanjem ovih jednakosti i (5) dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i |PA_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i |TA_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i |PT|^2 + 2(t - p)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i - \sum_{i=1}^{n} m_i t\right).$$

Radi (1), po definiciji momenta inercije, odavde slijedi

$$I_P = I_T + \sum_{i=1}^{n} m_i \, |P\,T|^2,$$

a to je trebalo i dokazati.

Napomena. Iz Lagrangeovog zakona [neki ga nazivaju *Steinerov teorem*] neposredno slijedi da je težište ona točka prostora s obzirom na koju sistem ima najmanji moment inercije.

Pokažimo na primjerima kako se pomoću Lagrangeovog zakona mogu rješavati neki zadaci elementarne geometrije.

Primjer 1. Oko jednakostraničnog trokuta opisana je kružnica. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti, od vrhova trokuta do točke na opisanoj kružnici, ne ovisi o njenom položaju.

Osnovna ideja rješavanja ovakvih zadataka svodi se na to da zadanoj geometrijskoj konfiguraciji pridružimo na izvjesni način jedan sistem materijalnih točaka tako da Lagrangeov zakon primijenjen na taj sistem daje upravo onaj odnos, kojeg želimo dokazati. U ovom slučaju imamo jednakostranični trokut $A_1\,A_2\,A_3$ i točku P na opisanoj kružnici. Promotrimo sistem materijalnih točaka $\{(A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 1)\}$, kojeg dobijemo tako da u točke A_1, A_2, A_3 smjestimo jedinične mase. Označimo sa O središte opisane kružnice. Težište navedenog sistema je upravo u točki O. Lagrangeov zakon daje

$$I_P = I_O + 3 \cdot |P\,O|^2.$$

Označimo udaljenosti točaka A_i od P sa d_i, $i = 1, 2, 3$. Tada je $I_P = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$, $I_O = 3r^2$, $|P\,O| = r$, gdje je r polumjer trokutu opisane kružnice. Uvrstimo li ove vrijednosti u prethodnu formulu dobivamo

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6\,r^2,$$

pa zaista zbroj kvadrata udaljenosti ne ovisi o položaju točke P, već samo o trokutu.

Primjer 2. Odredite duljine simetrala unutarnjih kutova trokuta, kojemu su zadane duljine stranica.

Neka je ABC zadani trokut, $a = |B\,C|$, $b = |A\,C|$, $c = |A\,B|$ i s_γ duljina simetrale kuta γ tog trokuta. Neka je dalje C_1 sjecište te simetrale sa stranicom AB (nacrtajte sliku). Smjestimo sada u A i B takve mase da C_1 bude težište tako dobivenog sistema materijalnih točaka. Neka je $|B\,C_1| = a_1$, $|A\,C_1| = b_1$. Prema teoremu o simetrali kuta u trokutu u A treba smjestiti masu b_1, a u B masu a_1. Dakle $\mathscr{S} = \{(A, a_1), (B, b_1)\}$. Nađimo momente inercije sistema $\mathscr{S}$ s obzirom na točke C i C_1. Dobiva se

$$I_C = a_1\,b^2 + b_1\,a^2, \; I_{C1} = a_1\,b_1^2 + b_1\,a_1^2.$$

Prema Lagrangeovom teoremu je

$$I_C = I_{C1} + (a_1 + b_1) \cdot s_\gamma^2.$$

Uvrstimo li ovamo nađene izraze za I_C i I_{C1} dobit ćemo

$$a_1\,b^2 + b_1\,a^2 = a_1\,b_1^2 + b_1\,a_1^2 + (a_1 + b_1) \cdot s_\gamma^2. \tag{6}$$

Prema teoremu o simetrali vrijedi

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{a_1 + b_1}{a + b} = \frac{c}{a + b}.$$

Odavde je

$$a_1 = \frac{a\,c}{a + b}, \; b_1 = \frac{b\,c}{a + b}.$$

Uvrstimo li ovo u (6) i uzmemo u obzir da je $a_1 + b_1 = c$, dobit ćemo

$$s_\gamma^2 = a\,b\left[1 - \frac{c^2}{(a + b)^2}\right].$$

Analogni izrazi dobivaju se za s_α i s_β.

Primjer 3. U kružnicu je upisan četverokut s međusobno okomitim dijagonalama. Dokažite da je zbroj kvadrata duljina njegovih suprotnih stranica jednak kvadratu dijametra kružnice.

Neka je $ABCD$ četverokut s okomitim dijagonalama AC i BD upisan u zadanu kružnicu. Označimo sa O središte kružnice i sa S sjecište dijagonala. Pridružimo ovom četverokutu sistem $\mathscr{S} = \{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$ i neka je T njegovo težište. Pomoću zakona o težištu može se pokazati da je težište T sistema $\mathscr{S}$ u polovištu dužine OS. Primijenimo Lagrangeov zakon na točke S i O. Dobivamo

$$I_S = I_T + 4\,|T\,S|^2, \; I_0 = I_T + 4\,|O\,T|^2.$$

Kako je $|T\,S| = |O\,T|$, to iz ovih jednakosti slijedi

$$I_S = I_0,$$

a odavde je

$$|S\,A|^2 + |S\,B|^2 + |S\,C|^2 + |S\,D|^2 = 4r^2,$$

gdje je sa r označen polumjer kružnice. Prema Pitagorinom teoremu je

$$|SA|^2 + |SB|^2 = |AB|^2, \; |SC|^2 + |SD|^2 = |CD|^2.$$

Ako to uvrstimo u prethodnu jednakost dobivamo

$$|AB|^2 + |CD|^2 = (2r)^2.$$

Analogno se tvrdnja dokazuje za drugi par suprotnih stranica.

Primjer 4. Zadane su duljine t_a, t_b, t_c težišnica trokuta i polumjer r tom trokutu opisane kružnice. Odredite udaljenost težišta trokuta od središta njemu opisane kružnice.

Neka je ABC trokut i O središte opisane kružnice. Promatramo sistem $\mathscr{S} = \{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ i neka je T njegovo težište. Prema Lagrangeovom zakonu imamo

$$I_0 = I_T + 3\,|O\,T|^2.$$

Očito je $I_0 = 3r^2$ i $I_T = \dfrac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$. Ako to uvrstimo u prethodnu formulu dobit ćemo za traženu udaljenost

$$|OT| = \sqrt{r^2 - \frac{4}{27}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)}.$$

Pokazat ćemo sada kako se Lagrangeov zakon koristi u elementarnoj algebri.

Kako su momenti inercije uvijek pozitivni to iz Lagrangeovog zakona slijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot |P\,T|^2 \leq I_P, \tag{7}$$

pri tome znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $I_T = 0$, tj. u slučaju kada se točke sistema podudaraju: $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = T$.

Birajući točke A_i i P na zgodan način i stavljajući u njih zgodno odabrane mase možemo pomoću (7) dobiti razne interesantne nejednakosti. Na taj način (7) postaje pravo izvorište za dobivanje raznih nejednakosti. Ilustrirajmo to na dva primjera.

Primjer 5. Dokažite da za realne brojeve $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

Uzmimo u ravnini točku P i poluzraku (polupravac) kojoj je početak u P. Odaberimo na toj poluzraci redom točke $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takve da je

$$|P\,A_1| = a_1, \, |P\,A_2| = a_2, \ldots, |P\,A_n| = a_n.$$

Promotrimo sistem $\mathscr{S} = \{(A_1, 1), (A_2, 1), \ldots, (A_n, 1)\}$. Tada je $\Sigma m_i = n$ i moment inercije sistema $\mathscr{S}$ s obzirom na točku P jednak je $I_P = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$. Označimo težište od $\mathscr{S}$ sa T i neka je P ishodište koordinatnog sustava. Za radijvektor težišta od $\mathscr{S}$ dobivamo

$$\vec{r}_T = \frac{\Sigma \vec{r}_i}{n}, \tag{8}$$

gdje je sa $\vec{r}_i$ označen radijvektor točke A_i, $i = 1, \ldots, n$. Ako sa $\vec{e}$ označimo jedinični vektor u smjeru vektora $\overrightarrow{PA_1}$, onda je

$$\vec{r}_i = a_i \vec{e}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Tada je $\vec{r}_T = |PT| \vec{e}$, pa uvrštavanjem u (8) dobivamo

$$|PT| \vec{e} = \frac{a_1 \vec{e} + \ldots + a_n \vec{e}}{n},$$

odnosno

$$|PT| = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Ako to i I_P uvrstimo u (7) dobit ćemo

$$n \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \leq a_1^2 + \ldots + a_n^2,$$

a odavde odmah slijedi tvrdnja. Znak jednakosti vrijedi samo ako je $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = T$ tj. ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Primjer 6. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \leq \sqrt{(1 + 2 + \ldots + n)(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)},$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi samo ako je $n = 1$.

Odaberimo u ravnini točku P i poluzraku s početkom u P kao i u prethodnom zadatku. Neka su A_i točke te poluzrake određene sa $|PA_i| = i$, $i = 1, \ldots, n$. Smjestimo u te točke mase $m_i = i$. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 1 + 2 + \ldots + n.$$

Neka je $\vec{e}$ odabran na način iz primjera 5. Tada dobivamo

$$|PT| = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n}.$$

Moment inercije I_P sistema $\mathscr{S} = \{(A_1, 1), (A_2, 2), \ldots, (A_n, n)\}$ jednak je

$$I_P = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot n^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Ako to uvrstimo u (7), dobit ćemo

$$(1 + 2 + \ldots + n) \left(\frac{1^2 + 2^2 + \ldots n^2}{1 + 2 + \ldots + n}\right)^2 \leq 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3,$$

a odavde odmah slijedi tvrdnja. Očito da znak jednakosti vrijedi samo ako se sve točke podudaraju, tj. samo za $n = 1$.

Na kraju valja napomenuti da se neki od navedenih zadataka mogu riješiti i na drugi način; mi smo ovdje htjeli pokazati kako se to radi pomoću Lagrangeovog zakona o inerciji.

Korisno je da za vježbu upotrebom tog zakona pokušate riješiti slijedeće **zadatke**:

1. Oko pravilnog tetraedra opisana je sfera. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti točke sfere od vrhova tetraedra ne ovisi o njenom položaju na sferi.

2. Oko pravilnog n-terokuta opisana je kružnica. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti točke opisane kružnice od vrhova ne ovisi o njenom položaju na kružnici.

3. U jednakostranični trokut upisana je kružnica. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti točke na toj kružnici od vrhova trokuta ne ovisi o njenom položaju na toj kružnici.

4. Dokažite ovaj *teorem Stewarta* (M. Stewart, 1717—1785, engleski geometričar): Ako je C_1 bilo koja točka na stranici AB trokuta ABC, onda vrijedi

$$|CA|^2 \cdot |BC_1| + |BC|^2 \cdot |AC_1| - |CC_1|^2 \cdot |AB| = |AC_1| \cdot |BC_1| \cdot |AB|.$$

5. Dokažite ovaj *teorem Eulera* (L. Euler 1707—1783, švicarski matematičar): Ako je $A_1A_2A_3A_4$ bilo koji četverokut (ravninski ili prostorni), a P i Q polovišta njegovih dijagonala A_1A_3 i A_2A_4, onda vrijedi

$$|A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + |A_3A_4|^2 + |A_4A_1|^2 = |A_1A_3|^2 + |A_2A_4|^2 + 4\,|PQ|^2.$$

Napomena. Ovo je poopćenje teorema o zbroju kvadrata dijagonala paralelograma.

6. Dokažite da za realne brojeve $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2,$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

7. Dokažite da za realne brojeve $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

Napomena. Ova se nejednakost zove *nejednakost Cauchy-Bunjakovskog*.