Ристо Малчески, Скопје

ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВАТА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

Нека $a,b>0$. Броевите

$$A=A(a,b)=\frac{a+b}{2},\ G=G(a,b)=\sqrt{ab},$$

$$H=H(a,b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b} \text{ и } K=K(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска, хармониска* и *квадратна средина*, соодветно за броевите a и b. Ако $m=\min\{a,b\}$ и $M=\max\{a,b\}$, тогаш се точни неравенствата $m\leq H\leq G\leq A\leq K\leq M$, т.е. неравенствата

$$m\leq\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leq M \tag{1}$$

при што знаци за равенство важат ако и само ако $a=b$. Лесно се докажуваат првото и последното неравенство во (1), а доказите на останатите неравенства може да се видат во [1].

Нека $a_i>0$, $i=1,2,...,n$. Броевите

$$K_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}},\ A_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},\ G_n=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \text{ и } H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$$

ги нарекуваме квадратна, аритметичка, геометриска и хармониска средина за броевите $a_i>0$, $i=1,2,...,n$. Во [2] е докажано дека за секои $a,b,c,d>0$ важи

$$\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leq\sqrt[4]{abcd}\leq\frac{a+b+c+d}{4}, \tag{2}$$

односно дека за секои $a,b,c>0$ важи

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}, \tag{3}$$

При што знаци за равенства важат ако и само ако $a=b=c=d$, односно $a=b=c$.

Во следните разгледувања ќе покажеме како неравенствата меѓу средините може да се употребат при решавање на геометриски задачи. Пред да преминеме на разгледување на споменатите задачи, да се потсетиме дека ако a,b,c се должини на страни на триааголник, $s=\frac{a+b+c}{2}$ е неговиот полупериметар, r и R се должините на радиусот на впишаната и опишаната кружница и P е плоштината на триаголникот, тогаш

$$P=rs, \tag{4}$$

$$P=\frac{abc}{4R}, \tag{5}$$

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{6}$$

Задача 1. Нека a,b,c се должини на страни на триааголник и s е неговиот полупериметар. Докажи дека

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le s.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометрсиката средина имаме $\frac{ab}{a+b}\le\frac{a+b}{4}$, $\frac{bc}{b+c}\le\frac{b+c}{4}$ и $\frac{ca}{c+a}\le\frac{c+a}{4}$. Ако ги собереме овие три неравенства, добиваме

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}=s.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 2. Нека a,b,c се должини на страни на триааголник и s е неговиот полупериметар. Тогаш

$$(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\le\frac{a^2+b^2+c^2}{4}, \tag{7}$$

$$(s-a)(s-b)(s-c)\le\frac{abc}{8}. \tag{8}$$

Решение. Нека $x=s-a, y=s-b, z=s-c$. Од неравенството на триаголник следува $x=s-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}>0$ и слично $y>0, z>0$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина $\frac{xy}{x+y}\le\frac{x+y}{4}$, заменувајќи за x и y добиваме $\frac{(s-a)(s-b)}{s-a+s-b}\le\frac{s-a+s-b}{4}$ и како $2s-a-b=c$ важи $(s-a)(s-b)\le\frac{c^2}{2}$. Слично се добивам

$$(s-b)(s-c)\le\frac{a^2}{4} \text{ и } (s-c)(s-a)\le\frac{b^2}{4}.$$

Сега неравенството (7) се добива ако ги собереме последните три неравенства, а неравенството (8) се добива ако ги помножиме последните три неравенства и квадрираме. Јасно, и во двата случаја знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 3 (Ојлерово неравенство). За должините радиусите r и R на впишаната и опишаната кружница во триаголникот важи $2r \le R$.

Решение. Од неравенството (8) следува $s(s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{abcs}{8}$, па затоа од формулите (4) и (6) добиваме добиваме

$$r^2 s^2 = P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{abcs}{8},$$

од каде следува $8r^2 s \le abc$. Понатаму, од формулите (5) и (6) добиваме

$$\frac{a^2b^2c^2}{16R^2} = P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{abcs}{8},$$

од каде следува $abc \le 2R^2 s$. Конечно, $8r^2 s \le abc \le 2R^2 s$, од каде добиваме $2r \le R$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 4. Нека a,b,c се должини на страните, t_a,t_b,t_c се долѓини на тежишните линии и s е полупериметарот на триаголник. Докажи дека

$$(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a) \le \frac{t_a^2+t_b^2+t_c^2}{3}.$$

Решение. Неравенството следува од неравенството (7) и познатото равенство

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{4}{3}(t_a^2+t_b^2+t_c^2). \ ■$$

Пред да преминеме на разгледување на следните неколку задачи дека за квадар (правоаголен паралелопипед) со должини на рабови a,b,c, дијагонали на ѕидовите d,d_1,d_2, просторна дијагонала D, плоштина P и волумен V точни се формулите

$$\begin{aligned} &d^2 = a^2+b^2, d_1^2 = b^2+c^2,\\ &d_2^2 = c^2+a^2, D^2 = a^2+b^2+c^2,\\ &P = 2(ab+bc+ca), V = abc. \end{aligned} \tag{9}$$

Задача 5. а) Определи ја најголемата плоштина која може да ја има квадар, ако должината на неговата просторна дијагонала е еднаква на D.

б) Определи ја најмалата должина која може да ја има просторната дијагонала на квадар, ако неговата плоштина е еднаква на P.

Решение. Должините на рабовите на квадарот да ги означиме со a,b,c. Имаме $2ab \le a^2+b^2$, $2bc \le b^2+c^2$ и $2ca \le c^2+a^2$. Сега од последните три неравенства и равенствата (9) следува

$$P=2(ab+bc+ca) \le (a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+d^2)=2(a^2+b^2+c^2)=2D^2,$$

т.е. $P \le 2D^2$, односно $\sqrt{\frac{P}{2}} \le D$. Според тоа:

а) Ако должината на просторната дијагонала на квадарот е еднаква D, тогаш неговата плоштина е помала или еднаква на $2D^2$. Таа е најкголема и е еднаква на $2D^2$ ако и само ако $a=b=c$, т.е. квадарот е коцка.

б) Ако плоштината на квадарот е еднаква на P, тогаш должината на неговата просторна дијагонала е поголема или еднаква на $\sqrt{\frac{P}{2}}$. Таа е најмала и е еднаква на $\sqrt{\frac{P}{2}}$ ако и само ако $a=b=c$, т.е. квадарот е коцка. ■

Задача 6. а) Определи ја најмалата плоштина која може да ја има квадар, ако неговиот волумен е еднаков на V.

б) Определи го најголемиот волумен кој може да го има квадар ако неговата плоштина е еднаква на P.

Решение. Нека x,y,z се мерните броеви на рабовите на квадарот и нека P и V се неговите плоштина и волумен, соодветно. Тогаш

$$P=2(xy+yz+zx) \text{ и } V=xyz.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средна следува

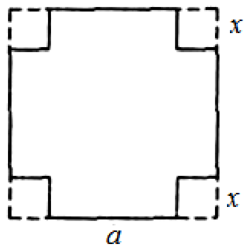
$$P=2(xy+yz+zx) \ge 2\cdot 3\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx}=6\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=6\sqrt[3]{V^2},$$

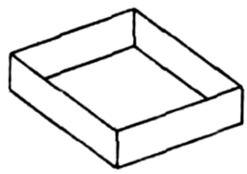
т.е. $P \ge 6\sqrt[3]{V^2}$, односно $V \le \sqrt{(\frac{P}{6})^3}$. Според тоа:

а) Ако волуменот ка квадарот е еднаков на V, тогаш неговата плоштина е поголема или еднаква на $6\sqrt[3]{V^2}$. Таа е најмала и е еднаква на $6\sqrt[3]{V^2}$ ако и само ако $a=b=c$, т.е. квадарот е коцка.

б) Ако плоштината на квадарот е еднаква на P, тогаш неговиот волумен е помал или еднаков на $\sqrt{(\frac{P}{6})^3}$. Тој е најголем и е еднаков на $\sqrt{(\frac{P}{6})^3}$ ако и само ако $a=b=c$, т.е. квадарот е коцка. ■

Задача 7. Од квадратна парче картон со должина на страна a направи отворена кутија со најголем можен волумен, така што ќе исечеш четири квадратчиња со должина на стана x (цртеж десно).





Решение. По сечењето на квадратчињата и ќе се добие кутија од видот прикажан на цртежот лево. Притоа висината на кутијата ќе биде еднаква на x, а основата ќе биде квадрат со должина на страна $a-2x$. Според тоа, за волуменот на кутијата имаме $V=x(a-2x)^2$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометрската средина следува

$$4V=4x(a-2x)^2\leq(\tfrac{4x+a-2x+a-2x}{3})^3=\tfrac{8a^3}{27},$$

т.е. $V\leq\frac{2a^3}{27}$.

Според тоа, волуменот кој може да го има кутијата ќе биде помал или еднаков на $\frac{2a^3}{27}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a-2x=4x$, т.е. ако и само ако $x=\frac{a}{6}$ и тогаш волуменот е најголем можен. ■

Задача 8. Нека a,b,c се должините на рабовите и D е должината на просторната дијагонала на квадарот. ДОкажи го неравенството

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abcD\sqrt{3}.$$

Решение. Со собирање на неравенствата $x^2+y^2\geq 2xy, y^2+z^2\geq 2yz$ и $z^2+x^2\geq 2zx$ го добиваме неравенството $2(x^2+y^2+z^2)\geq 2(xy+yz+zx)$, т.е. неравенството $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$. Оттука следува

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq 3(xy+yz+zx),$$

односно

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx).$$

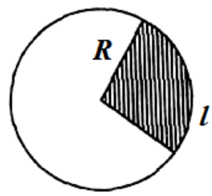
Ако во последното неравенство ставиме $x=a^2b^2, y=b^2c^2, z=c^2a^2$, последователно добиваме

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2),$$
$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2D^2,$$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abcD\sqrt{3}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$, т.е. квадарот е коцка. ■

Задача 9. Од сите кружни исечоци со даден периметар определи го кружниот исечок кој има најголема плошптина.

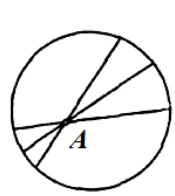
Решение. Радиусот на кружниот исечок да го означиме со R, а должината на соодветниот лак со l (цртеж десно). Тогаш периметарот на кружниот исечок е $O=2R+l$, а неговата плоштина е $P=\frac{Rl}{2}$. Според тоа,



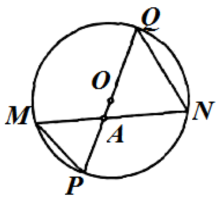
$4P=2Rl \leq (\frac{2R+l}{2})^2=(\frac{O}{2})^2=\frac{O^2}{4}$, т.е. $P \leq \frac{O^2}{16}$.

Притоа знак за равенство важи ако и само ако $2R=l=\frac{O}{2}$, т.е. кружниот исечок е добие од круг со дијаметар еднаков на $\frac{O}{2}$ и неговиот кружен лак е едн аков на $\frac{O}{2}$. ■

Задача 10. Дадена екружница и точка A во нејзината внатрешност. Определи ја најмалата од сите тетиви на кружницата кои ја содржат точката A (цртеж десно).



Решение. Со R да го означиме радиусот на кружницата, а со a растојанието од точката A до центарот на кружницата. Нека PQ е дијаметарот на кружницата кој минува низ точката A, а MN е друга тетива на кружницата која ја содржи точката A (цртеж лево).



Триаголниците AMP и AQN се слични ($\measuredangle MPA = \measuredangle ANQ$ како периферириски агли над тетивата MQ и $\measuredangle MAP = \measuredangle NAQ$ како накрсни агли). Затоа важи $x:(R-a)=(R+a):y$, т.е.

$$xy=(R-a)(R+a),$$

каде $\overline{MA}=x, \overline{NA}=y$ и $\overline{MN}=x+y$. Оттука и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}=\sqrt{(R-a)(R+a)},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$. Според тоа, MN има најмала должина кога точката A е средина на тетивата, т.е. кога тетивата е нормална на радиусот кој минува низ точката A. ■

Задачи за самостојна работа

1. а) Определи го најголемиот волумен кој може да го има квадар со должина на просторната дијагонала D.
   б) Определи ја најмалата должина која може да ја има просторната дијагонала на квадар со волумен V.
2. а) Докажи дека најголемата плоштина која може да ја има квадар е еднаква на $\frac{L^2}{24}$, каде L е збирот на сите рабови на квадарот.
   б) Докажи дека најмалиот збир на сите рабови на квадарот е еднаков на $2\sqrt{6P}$, каде P е неговата плоштина.
3. Во свера со даден радиус R впиши конус со најголем волумен.

Литература

1. Малчески, Р. (2021). Неравенства меѓу средините, https://matematickitalent.mk
2. Малчески, С. (2021). Неравенства меѓу средините и примена , https://matematickitalent.mk