XVI олимпијада

1. Дадени се три карти и на секоја од нив е напишан по еден природен број. Овие броеви p, q и r го задоволуваат условот $0 < p < q < r$. Тројца играчи A, B и C играат игра во која еден круг се состои во следното: картите се мешаат и се делат така што секој играч добива по една карта и потоа секој играч добива онолку топчиња колку што е бројот запишан на неговата карта, по што картите се враќаат, а топчињата остануваат кај играчите. Играта има N кругови, $N \geq 2$. На крајот на играта, играчот A имал вкупно 20 топчиња, $B - 10$ топчиња, а $C - 9$ топчиња.
Познато е дека во последниот круг играчот B добил r топчиња. Кој од играчите добил q топчиња во првиот круг?

Решение. Вкупниот број на поделени топчиња во играта е

$$N(p+q+r) = 20+10+9 = 39.$$

Бидејќи $N \geq 2$ и $p+q+r \geq 1+2+3 = 6$, мора да е $N = 3$ и $p+q+r = 13$. Играчот B во последниот круг добил r топчиња, а вкупно добил 10 топчиња и бидејќи $p+q+r = 13 > 10$, тој во првите два круга мора да добил по p топчиња. Тоа значи, дека C во првите два круга добил барем по q топчиња. Ако тој во еден круг добие r топчиња, тогаш вкупно би ги имал барем $r+q+p = 13$, што не е можно, бидејќи вкупно добил само 9 топчиња.

Значи, распоредот на топчињата е:

$$A: r, r, q; \quad B: p, p, r; \quad C: q, q, p.$$

Броевите p, q и r може да се одредат со следниот систем линеарни равенки:

$$\begin{aligned} q + 2r &= 20 \\ 2p + r &= 10 \\ p + 2q &= 9 \end{aligned}$$

т.е. $p = 1, q = 4$ и $r = 8$.

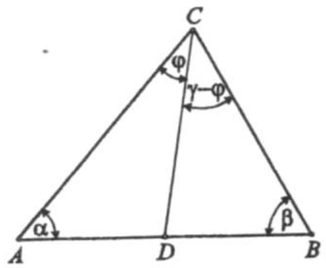
2. Даден е $\triangle ABC$ со агли α, β, γ во темињата A, B, C. Докажи дека неравенството

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \leq \sin^2\frac{\gamma}{2}$$

важи ако и само ако на страната AB постои точка D таква што должината на отсечката CD е геометриска средина на должините на отсечките AD и BD.

Решение. *Прв начин.* Нека D е точка на страната AB на $\triangle ABC$. Со примена на синусната теорема за триаголниците ADC и DBC добиваме

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\varphi} = \frac{\overline{CD}}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{\overline{BD}}{\sin(\gamma-\varphi)} = \frac{\overline{CD}}{\sin\beta}$$



каде што $\varphi = \measuredangle DCA$, (цртеж десно). Според тоа

$$\overline{AD}\cdot\overline{BD} = \overline{CD}^2\,\frac{\sin\varphi\cdot\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

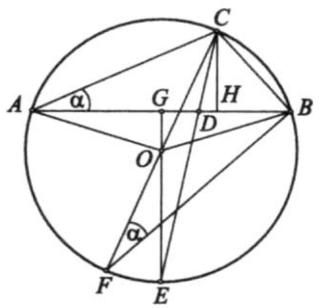
Значи, точка D која ги задоволува условите на задачата постои ако и само ако постои агол φ $(0<\varphi<\gamma)$, таков што

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \sin\varphi\cdot\sin(\gamma-\varphi).$$

Да претпоставиме дека таква точка постои. Тогаш е исполнето

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cdot\sin\beta &= \sin\varphi\cdot\sin(\gamma-\varphi)\\ &\le [\tfrac{1}{2}(\sin\varphi+\sin(\gamma-\varphi))]^2\\ &= (\sin\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\gamma-2\varphi}{2})^2 \le \sin^2\tfrac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Од друга страна, ако $\sin\alpha\cdot\sin\beta\le\sin^2\frac{\gamma}{2}$, тогаш ја разгледуваме функција $f(x)=\sin x\cdot\sin(\gamma-x)$. Таа е непрекината на интервалот $[0,\frac{\gamma}{2}]$ и важи $f(0)=0$ и $f(\frac{\gamma}{2})=\sin^2\frac{\gamma}{2}$. Бидејќи, $f(0)<\sin\alpha\cdot\sin\beta\le f(\frac{\gamma}{2})$, тогаш мора да постои $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$, таков што $f(\varphi)=\sin\varphi\cdot\sin(\gamma-\varphi)=\sin\alpha\cdot\sin\beta$.



Втор начин. Нека O е центарот и r е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, (цртеж десно). Нека D е произволна точка од страната AB и нека правата CD по втор пат ја сече опишаната кружница во точката E. Тогаш $\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\overline{CD}\cdot\overline{DE}$. Значи отсечката CD е геометриска средина на отсечките AD и BD ако и само ако $\overline{CD}=\overline{DE}$, т.е. ако и само ако точката D е средина на отсечката CE. Лесно се гледа дека таква точка постои ако и само ако должината на висината CH не е поголема од должината на отсечката GE, т.е. $\overline{CH}\le\overline{GE}$. Нека CF ењ дијаметар на опишаната кружница. Затоа $\overline{CB}=2r\sin\alpha$ и $\overline{CH}=\overline{CB}\cdot\sin\beta=2r\sin\alpha\sin\beta$. Бидејќи $\measuredangle AOE=\measuredangle EOB=\gamma$ и $\measuredangle GOB=\pi-\gamma$, следува $\overline{GE}=r-r\cos\gamma=2r\sin^2\frac{\gamma}{2}$. Од условот $\overline{CH}\le\overline{GE}$ се добива неравенството кое требаше да се докаже.

3. Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека бројот $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\cdot 2^{3k}$ не е делив со 5.

Решение. Од бинимната формула за изразот $(1+\sqrt{8})^{2n+1}$ добиваме

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{8})^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}\sqrt{8}^{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\sqrt{8}^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}8^{k}+\sqrt{8}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}8^{k}\\ &= a_n+b_n\sqrt{8},\end{aligned}$$

каде што $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Доволно е да докажеме дека ниту еден од броевите $b_1, b_2, \ldots$ не е делив со 5.

I *начин*. Ако ги помножиме равенствата

$$(1+\sqrt{8})^{2n+1}=a_n+b_n\sqrt{8} \quad \text{и} \quad (1-\sqrt{8})^{2n+1}=a_n-b_n\sqrt{8},$$

добиваме $a_n^2+7^{2n+1}=8b_n^2$. Ако некој од броевите b_n е делив со 5, тогаш бројот $a_n^2+7^{2n+1}$ ќе биде делив со 10. Последното не е можно бидејќи цифрата на единиците на бројот a_n^2 може да биде 0, 1, 4, 6 или 9, а на бројот 7^{2n+1} само 3 или 7.

II *начин*. За $n \geq 0$ имаме

$$\begin{aligned}a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{8} &= (1+\sqrt{8})^{2n+3}=(1+\sqrt{8})^2(1+\sqrt{8})^{2n+1}\\ &= (9+2\sqrt{8})(a_n+b_n\sqrt{8})\\ &= (9a_n+16b_n)+(2a_n+9b_n)\sqrt{8},\end{aligned}$$

од каде што добиваме

$$a_{n+1}=9a_n+16b_n, \quad b_{n+1}=2a_n+9b_n, \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Од $(1+\sqrt{8})^{2\cdot 0+1}=1+\sqrt{8}$, $a_o=1$ и $b_o=1$, добиваме:

$$\begin{array}{ll}
a_0 \equiv 1 \pmod 5 & b_0 \equiv 1 \pmod 5\\
a_1 \equiv 0 \pmod 5 & b_1 \equiv 1 \pmod 5\\
a_2 \equiv 1 \pmod 5 & b_2 \equiv -1 \pmod 5\\
a_3 \equiv -2 \pmod 5 & b_3 \equiv -2 \pmod 5\\
a_4 \equiv 0 \pmod 5 & b_4 \equiv -2 \pmod 5\\
a_5 \equiv -2 \pmod 5 & b_5 \equiv 2 \pmod 5\\
a_6 \equiv -1 \pmod 5 & b_6 \equiv -1 \pmod 5\\
a_7 \equiv 0 \pmod 5 & b_7 \equiv -1 \pmod 5\\
a_8 \equiv -1 \pmod 5 & b_8 \equiv 1 \pmod 5\\
a_9 \equiv 2 \pmod 5 & b_9 \equiv 2 \pmod 5\\
a_{10} \equiv 0 \pmod 5 & b_{10} \equiv 2 \pmod 5\\
a_{11} \equiv 2 \pmod 5 & b_{11} \equiv -2 \pmod 5\\
a_{12} \equiv 1 \pmod 5 & b_{12} \equiv 1 \pmod 5
\end{array}$$

Сега тврдењето на задачата следува од $a_0, a_{12} \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$ и $b_0, b_{12} \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$, што значи дека

$$b_k = \sum_{k=}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} \not\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$$

што и требаше да се докаже.

4. Разгледуваме поделби на шаховска 8×8 табла на p правоаголници кои немаат заеднички внатрешни точки, такви што секоја поделба ги задоволува условите:
а) Секој правоаголник се состои од еднаков број бели и црни полиња.
б) Ако со a_i го означиме бројот на бели полиња во $i-$тиот правоаголник, тогаш $a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_p$.
Најди ја најголемата вредност на p за која ваква поделба е можна. За вака најденото p најди ги сите можни низи броеви $a_1, a_2, a_3, ..., a_p$.

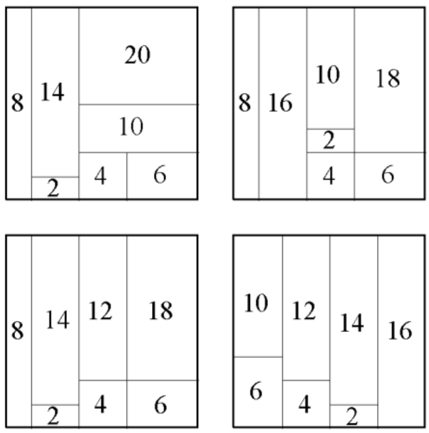
Решение. Вкупниот број на бели полиња е $a_1 + a_2 + ... + a_p = 32$.

Бидејќи сите броеви a_i се различни меѓу себе исполнето е неравенството

$$a_1 + a_2 + ... + a_p \geq 1 + 2 + 3 + ... + p = \frac{p(p+1)}{2},$$

од каде се добива $p \leq 7$. Бројот 32 може да се запише на следниве пет начини како збир од седум меѓусебно различни броеви:

$$\begin{aligned} 32 &= 1+2+3+4+5+6+11 \\ &= 1+2+3+4+5+7+10 \\ &= 1+2+3+4+5+8+9 \\ &= 1+2+3+4+6+7+9 \\ &= 1+2+3+5+6+7+8. \end{aligned}$$



На првиот од овие начини не соодветствува ниту една поделба на шаховската табла, бидејќи на неа не може да се смести правоаголник со 22 полиња. На останатите случаи соодветствуваат поделби како на горните цртежи.

5. Нека a, b, c и d се произволни позитивни реални броеви. Најди го множеството можни вредности на изразот

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}.$$

Решение. Бидејќи броевите a, b, c, d се позитивни, точни се неравенствата

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+d} < \frac{a}{a+b}$$
$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{a+b}$$
$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{b+c+d} < \frac{c}{c+d}$$
$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{a+c+d} < \frac{d}{c+d}.$$

Ако овие неравенства ги собереме, добиваме $1 < S < 2$. Земаме $a = 1$, $b = x$, $c = 1 - x$, $d = (1-x)x$, каде што $0 < x < 1$, и добиваме

$$S = f(x) = \frac{1}{1+2x-x^2} + \frac{x}{2} + \frac{1-x}{1+x-x^2} + \frac{x-x^2}{2-x^2}.$$

Функцијата $f(x)$ е непрекината за $0 < x < 1$ и притоа важи

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

Според тоа, бараното множество вредности е интервалот $(1,2)$.

6. Нека P е полином со целобројни коефициенти, различен од константа. Со $n(P)$ го означуваме бројот на различните цели броеви k за кои $[P(k)]^2 = 1$.

Докажи дека $n(P) - \deg(P) \le 2$, каде со $\deg(P)$ е означен степенот на полиномот P.

Решение. Да забележиме дека $[P(k)]^2 = 1$ ако и само ако $P(k) = 1$ или $P(k) = -1$. Ако не постои цел број k таков што $[P(k)]^2 = 1$, тогаш тврдењето очигледно важи бидејќи $n(P) = 0 \le \deg(P) < \deg(P) + 2$. Исто така тврдењето важи и ако постои цел број k за кој $P(k) = -1$, но не постои цел број k за кој $P(k) = 1$. Навистина, полиномот не може да добива иста вредност поголем број пати отколку што е неговиот степен. Истото важи и за симетричниот случај кога постои k за кој важи $P(k) = 1$, но не постои k таков што $P(k) = -1$.

Нека k_1 и k_2 се цели броеви такви што $P(k_1) = 1$ и $P(k_2) = -1$. Тогаш, бидејќи P е полином со целобројни коефициенти, добиваме

$$P(k_1) - P(k_2) = (k_1 - k_2)A$$

каде што $A \in \mathbb{Z}$, т.е. $2 = (k_1 - k_2)A$, па затоа $k_1 - k_2 \in \{1, -1, 2, -2\}$. Тоа значи дека равенката $[P(k)]^2 = 1$ има најмногу 5 различни решенија: k_2 на $P(k_2) = -1$ и $k_1 = k_2 \pm 1$, односно $k_1 = k_2 \pm 2$ на $P(k_1) = 1$.

Ако $\deg(P) \ge 3$, тогаш $n(P) \le 5 \le \deg P + 2$, т.е. $n(P) - \deg(P) \le 2$.

Ако $\deg(P) = 1$ или $\deg P = 2$, тогаш $n(p) \le 2$ односно $n(P) \le 4$, па затоа и во двата случаја важи $n(P) - \deg(P) \le 2$.