Ристо Малчески
Скопје

ГРЕШКИ ВО ЗАКЛУЧУВАЊЕТО ПРИ НЕПОТПОЛНАТА ИНДУКЦИЈА

Вообичаена шема за изведување заклучок по индукција е следнава: Нека $M=\{a_i \mid i\in I\}$ е множество, а P е својство на елементите од M. Означуваме $P(x)$, ако елементот x го има својството P, а $P(\overline{x})$ ако елементот x го нема својството P. Нека својството P е констатирано за елементите $a_i\in M, i=1,2,...,k$. Тогаш, индуктивниот заклучок се изведува според следнава индуктивна шема:

$$\frac{P(a_1),P(a_2),...,P(a_k)}{\text{Заклучок: веројатно } P(a) \text{ за секој } a\in M}. \tag{1}$$

Ако множеството M е конечно и има k елементи, тогаш исказната формула

$$(\forall x\in M)P(x)\Leftrightarrow P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge ...\wedge P(a_k) \tag{2}$$

е тавтологија, така што шемата

$$\frac{P(a_1),P(a_2),...,P(a_k)}{\text{Заклучок: } P(a) \text{ за секој } a\in M}$$

е правило за заклучување, кое се нарекува *потполна индукција.* Јасно, добиениот заклучок е сигурно точен.

Ако $|M|>k$, при што M може да биде бесконечно множество, т.е. разгледаните k случаи не ги исцрпуваат сите можни случаи, тогаш заклучокот според шемата (1) не мора да биде сигурно точен, туку е само веројатно точен. Во овој случај, изведувањето заклучок според шемата (1) се нарекува *непотполна индукција* или *емпириска индукција.* Се разбира степеното на убедливоста на добиениот заклучок со непотполан индукција зависи одројот на извршените набљудувања.

Непотполната индукција во математиката, во некои случи одиграла важна улога. Постојат формули кои се докажани откако се констатирало дека истите важат за определен број одделни случаи. Така, на пример, прво е воочено дека збирот на првите n непарни броеви е еднаков на n^2, т.е. дека

$$1=1^2,\ 1+3=2^2,\ 1+3+5=3^2,\ ...,$$

па потоа едокажано дека

$$1+3+...+(2n-1)=n^2 .$$

Мешутоа, постојат случаи кога заклучувањето со помошна непотполната индукција довело до погрешни резултати. Во натамошните разгледувања ќе наведеме неколку добро познати примери од овој вид.

Пример 1. а) За секој $n=1,2,3,...,15$ е точно тврдењето дека од n^2+n+17 се добива прост број, но не е точно тврдењето дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот n^2+n+17 е прост. Навистина, за $n=16$ се добива $n^2+n+17=17^2$, кој е сложен број.

б) Да забележиме дека дури и големите математичари изведувале погрешни заклучоци при примената на непотполнатата индукција. Така, Леонард Ојлер, еден од најголемите математичари во светската историја, врз основа на непотполна индукција заклучил дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот n^2-n+41 е прост, што не е точно. На пример, за $n=42$ имаме

$$42^2-42+41=42^2-1=(42-1)(42+1)=41\cdot 43 ,$$

и тоа е сложен број. ■

Пример 2. Славниот математетичар Вилхелм Готфирд Лајбниц, докажал дека за секој природен број n бројот n^3-n еделив со 3, бројот n^5-n еделив со 5 и бројот n^7-n еделив со 7. Врз основа на ова претпоставил дека за секој рприроден број n и за секој непарен број k бројот n^k-n еделив со k. Но, наскоро и сам забележал дека бројот $2^9-2=510$ не е делив со 9. ■

Пример 3. Големиот француски математичар Пјер Ферма, тргнувајќи од tоа дека за $n=1,2,3,4$ бројот

$$F_n=2^{2^n}+1$$

е прост, тврдел дека за секој природен број n бројот F_n е прост. Меѓутоа, приближно еден век подоцна Леонард Ојлер докажал дека

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417 ,$$

т.е. дека бројот F_5 е сложен. Покасно е констатирано дека и за $n=6,7,$ $8,9,10,11$ и некои други природни броеви бројот F_n е сложен.

Во чест на математичарот Пјер Ферма броевите F_n, $n \in \mathbb{N}$ се наречени *Ферматови броеви*. Денес се познати 37 сложени Ферматови броеви. Бројот F_{17} е најмалиот Ферматов број за кој не се знае дали е прост или сложен број. ■

Пример 4. Со непосредна проверка за ниту еден од броевите $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ бројот видот $991n^2 + 1$ не е точен квадрат на природен број. Се покажало дека дури и за многу големи вредности на бројот n бројот од видот $991n^2 + 1$ не е точен квадрат на природен број. Но, заклучокот дека последното важи за секој $n \in \mathbb{N}$ не е точен, бидејќи, на пример, за

$$n = 12055735790331359447442538767$$

бројот $991n^2 + 1$ е точен квадрат. ■

Пример 5. Рамнина која минува низ дадена точка го дели просторот на $2 = 2^1$ дела. Две рамнини кои минуваат низ дадена точка и не се совпаѓаат, го делат просторот на $4 = 2^2$ делови. Три рамнини кои минуваат низ дадена точка, а не минуваат низ иста права, го делат просторот на $8 = 2^3$ делови. Претходните три тврдења се точни, па прво бил донесен заклучок дека n рамнини кои според својата положба ги задоволуваат наведените услови, го делат просторот на 2^n делови. Но, покасно било докажано дека тоа не е точно. Имено, може да се докаже дека четири рамнини кои ги задоволуваат наведените услови го делат просторот на 14 делови, а n рамнини го делат просторот на $n(n-1) + 2$ делови. ■