Сојузен натпревар 1989

Седмо одделение

1. Третина од стоката е продадена по цена која е за 10% поголема од планираната, а половина од стоката е продадена за 15% поефтино од планираната цена. Со колку проценти над планираната цена е продаден остатокот од стоката, ако на крајот е наплатен износ кој би се добил ако вкупното количество стока е продадено по планираната цена?

   Решение. Нека x е процентот по кој преостаната стока треба да се продаде над планираната цена. Тогаш $\frac{1}{3}\cdot 1{,}1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}85+\frac{1}{6}x=1$, од каде добиваме $x=1{,}25$, што значи дека преостанатата стока се продавала по 25% повисока цена.

2. Определи ги сите трицифрени броеви, кои се запишани со различни цифри, такви што трицифрфениот број е делив со 7 и збирот на неговите цифри е делив со 7.

   Решение. Нека бараниот број е $x=\overline{abc}$. Тогаш
   $$x=100a+10b+c=7(14a+b)+(2a+3b+c),$$
   па затоа $7|(a+b+c)$ и $7|(2a+3b+c)$. Според тоа, 7 е делител на разликата $(2a+3b+c)-2(a+b+c)=b-c$. Сега, од условот дека цифрите a,b,c мора да се различни следува дека единствени броеви кои го задоволуваат условот на задачата се 518, 581, 329 и 392.

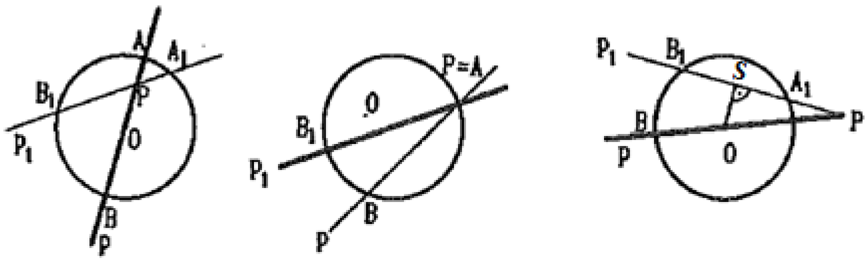
3. Во триаголникот ABC страната AB е најдолга. На страната AB земени се точки D и E такви што $AD=AC$ и $BE=BC$. Определи го $\measuredangle ACB$ ако $\measuredangle ECD=20^\circ$.

   Решение. Да означиме $\measuredangle BCD=x$ и $\measuredangle ACE=y$ (направи цртеж). Од рамнокракиот триаголник BCE добиваме $2(20^\circ+x)=180^\circ-\measuredangle EBC$, а од рамнокракиот триаголник ACD имаме $2(20^\circ+y)=180^\circ-\measuredangle CDA$. Со собирање на последните две равенства наоѓаме
   $$2(20^\circ+x+y+20^\circ)=180^\circ+(180^\circ-\measuredangle CDA-\measuredangle EBC),$$
   односно

$$2(\measuredangle ACB+20^\circ)=180^\circ+\measuredangle ACB\text{, т.е. }\measuredangle ACB=140^\circ.$$

4. Дадена е кружница k и точка P во истата рамнина. Конструирај права p која минува низ точката P и ја сече кружницата k во точки A и B такви што збирот $PA+PB$ е најголем. Образложи ја косntрукцијата во секој од трите случаи: P е на кружницата, P е во кружницата и P е надвор од кружницата.

Решение. Ќе го разгледаме одделно секој од наведените случаи.



Ако точката P е во кружницата или на кружницата, тогаш важи $PA+PB=AB$, а овој збир ќе биде најголем кога AB е дијаметар на кружницата, т.е. кога правата P минува низ нејзиниот центар.

Нека точката P е надвор од кружницата и нека p_1 е произволна права низ P која ја сече кружницата, на пример во точките A_1 и B_1. Со S да ја означиме средината на отсечката A_1B_1. Тогаш

$$PA_1+PB_1=PA_1+(PA_1+A_1S+SB_1)=2PA_1+2A_1S=2PS.$$

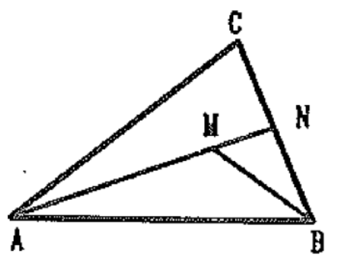
Овој збир ќе биде најголем ако $S\equiv O$, т.е. ако правата p минува низ центарот на кружницата.

5. Нека M е произволна точка во внатрешноста на даден триаголник ABC. Докажи:

а) $\measuredangle AMB>\measuredangle ACB$,

б) $AM+MB<AC+CB$.

Решение. а) Нека правата AM ја сече страната BC на триаголникот во точката N. Бидејќи $\measuredangle AMB$ е надворешен агол за триаголникот MNB, а $\measuredangle MNB$ е надворешен агол за триаголникот ANC, добиваме



$$\measuredangle AMB>\measuredangle MNB>\measuredangle ACN=\measuredangle ACB.$$

б) Во триаголникот MNB важи $MN+NB>MB$, па затоа

$$AN+NB=AM+MN+NB>AM+MB. \qquad (1)$$

Слично, во триаголникот ACN важи $AC+CN>AN$, па затоа

$$AC+CB=AC+CN+NB>AN+NB. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $AM+MB<AC+CB$, што и требаше да се докаже.

Осмо одделение

1. Четири ученици Амир, Борис, Цветко и Дарко собирале стара хартија. Заедно собрале $288\,kg$ хартија. Колку килограми собрал секој од нив, ако се знае дека Амир собрал $36\,kg$ повеќе од Борис, односно $\frac{3}{4}$ од количеството кое заедно го собрале Борис и Цветко, а Дарко собрал два пати повеќе од Цветко?

   Решение. Со a,b,c,d да ги означиме количествата хартија кои ги собрале наведените ученици. Тогаш

$$a=b+36,\ a=\tfrac{3}{4}(b+c), d=2c, a+b+c+d=288.$$

   Од $b+36=\frac{3}{4}(b+c)$ добиваме $b=3c-144$, потоа $a=3c-108$ и ако замениме во $a+b+c+d=288$ имаме

$$(3c-108)+(3c-144)+c+2c=288,$$

   од каде наоѓаме $c=60$, а потоа $b=36$, $a=72$ и $d=120$.

2. Дали е можно збирот $1+2+3+...+p$ за некој природен број да завршува со цифрите 1989?

   Решение. Цифрата на единиците на производот на два последователни природни броја може да биде: 0, 2 или 6. Сега, ако збирот

$$1+2+3+...+p=\frac{p(p+1)}{2}$$

   завршува на цифрите 1989, тогаш производот на двата последователни природни броја p и $p+1$ треба да завршува на цифрата 8, што не е можно. Значи, дадениот збир не може да завршува на цифрите 1989.

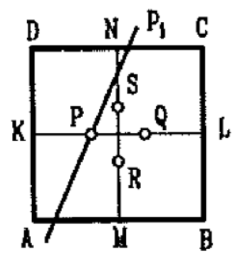
3. Збирот на цифрите на бројот X е Y, а збирот на цифрите на бројот Y е Z. Ако $X+Y+Z=60$, определи го бројот X.

   Решение. Лесно се проверува дека бројот X мора да биде двоцифрен (ако е едноцифрен, тогаш збирот $X+Y+Z$ ќе биде помал од 60, а ако е трицифрен овој збир ќе биде поголем од 60). Нека $X=10a+b$, каде a и b се цифри. Тогаш $Y=a+b$ и

$$Z=\begin{cases} a+b, & a+b\leq 9 \\ a+b-0, & a+b>9. \end{cases}$$

Во првиот случај $60=X+Y+Z=12a+3b$, т.е. $4a+b=20$, од каде добиваме $(a,b)\in\{(4,4),(5,0),(3,8)\}$. Последната од наведените можности отпаѓа, бидејќи во тој случај $a+b=3+8>9$. Во вториот случај добиваме $60=X+Y+Z=12a+3b-9$, т.е. $4a+b=23$, од каде наоѓаме $(a,b)\in\{(4,),(5,3)\}$, но последниот пар пак отпаѓа бидјќи во тој случај $a+b=5+3<9$. Значи, бараните броеви се 44, 50 и 47.

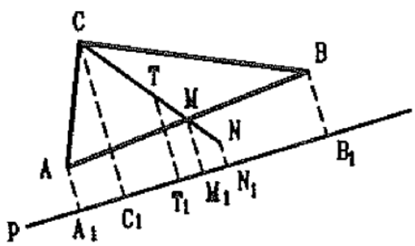
4. Даден е квадрат и 9 различни прави во неговата рамнина. Секоја од овие прави го дели квадратот на два трапези чии плоштини се однесуваат како 2:3. Докажи дека меѓу дадените прави постојат три кои минуваат низ иста точка.



Решение. Дадениот квадрат да го означиме со $ABCD$ и да разгледаме една од дадените прави p_1. Ако P_1 и P_2 се плоштините на трапезите на кои правата p_1 го дели дадениот квадрат, а m_1 и m_2 нивните средни линии, тогаш бидејќи висините на двата трапеза се еднакви од условот на задачата следуа $P_1:P_2=m_1:m_2=2:3$. Според тоа, правата p_1 минува низ една од точките P,Q,R,S кои се добиваат кога средните линии на квадратот се поделат во однос 2:3 (види цртеж). Но, во случајов имаме 4 точки и 9 прави, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку три прави минуваат низ иста точка.

5. Во рамнината на триаголникот ABC дадена е права p, која го сече триаголникот ABC. Ако A_1,B_1,C_1,T_1 се подножјата на нормалите повлечени од A,B,C,T соодветно на правата p (T е тежиште на триаголникот ABC), докажи дека

$$AA_1+BB_1+CC_1=3TT_1.$$



Решение. Нека M е средина на страната AB на дадениот триаголник и N е точка на правата CM

(различна од T) таква што $MN = TM$. Бидејќи тежиштето T ја дели средната линија во однос 2:1, следува дека $CT = TN$. Нека M и N се подножјата на нормалите од M и N на правата p. Од трапезот CC_1N_1N добиваме

$$CC_1 + NN_1 = 2TT_1,$$

од трапезот TT_1N_1N добиваме

$$TT_1 + NN_1 = 2MM_1,$$

а од трапезот AA_1B_1B добиваме

$$AA_1 + BB_1 = 2MM_1.$$

Од последните три равенства следува:

$$AA_1 + BB_1 = TT_1 + NN_1 = TT_1 + (2TT_1 - CC_1) = 3TT_1 - CC_1 ,$$

т.е.

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1.$$