Сојузен натпревар 1988

I година

1. Ако n е природен број поголем од 1, таков што

$$[\tfrac{n}{1}]+[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n}]=2+[\tfrac{n-1}{1}]+[\tfrac{n-1}{2}]+...+[\tfrac{n-1}{n-1}],$$

тогаш n е прост број. Докажи!

Решение. Бидејќи $[\frac{n}{1}]=n, [\frac{n}{n}]=1,\ [\frac{n-1}{1}]=n-1$, даденото равенство е еквивалентно на равенството

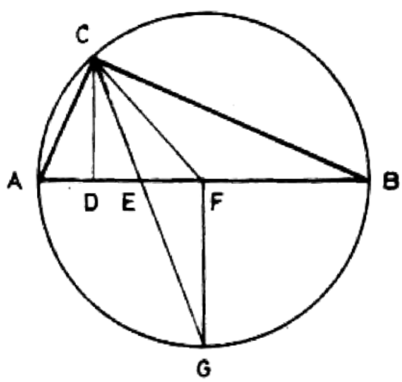
$$[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n-1}]=[\tfrac{n-1}{2}]+...+[\tfrac{n-1}{n-1}]. \qquad (1)$$

Бидејќи за секој $k\in\{2,3,...,n-1\}$ важи $[\frac{n}{k}]\geq[\frac{n-1}{k}]$, од (1) следува дека за секој $k\in\{2,3,...,n-1\}$ важи $[\frac{n}{k}]=[\frac{n-1}{k}]$. Ако n е сложен број, тогаш бројот $\frac{n}{k}$ за некој $k\in\{2,3,...,n-1\}$ ќе биде природен број, па затоа ќе важи

$$[\tfrac{n-1}{k}]=[\tfrac{n}{k}-\tfrac{1}{k}]=[\tfrac{n}{k}]-1<[\tfrac{n}{k}],$$

што е противречност. Од добиената противречност следува дека n е прост број.

2. Определи ги аглите на триаголникот ABC, ако тежишната линија, симетралата на аголот и висината од темето C го делат $\measuredangle ACB$ на четири еднакви дела.



Решение. Нека D,E,F се редоследно пресечните точки на висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето C на страната AB на триаголникот ABC и нека G е пресекот на симетралата на $\measuredangle BCA$ и опишаната кружница околу триаголникот ABC, цртеж десно. Тогаш точката G припаѓа на симетралата на страната AB. По претпоставка важи

$$\measuredangle ACD=\measuredangle DCE$$
$$=\measuredangle ECF=\measuredangle FCB.$$

Понатаму, од $CD\,||\,FG$ следува

$$\measuredangle FCG=\measuredangle DCE=\measuredangle CGF,$$

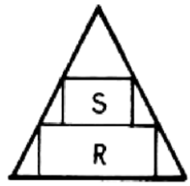
па затоа триаголникот CGF е рамнокрак и точката F припаѓа на симетралата на отсечката CG. Бидејќи F е средина на отсечката AB, заклучуваме дека F е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABC. Според тоа,

$\measuredangle BCA=90^\circ$, $\measuredangle CAB=\measuredangle DCB=67^\circ 30'$ и $\measuredangle ABC=22^\circ 30'$.

3. Во даден остроаголен триаголник T впишани се два правоаголници R и S (цртеж десно). Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\frac{P_R+P_S}{P_T},$$

каде P означува плоштина.



Решение. Со Q да ја означиме фигурата $T\setminus(R\cup S)$ која е унија на петте триаголници. Од овие триаголници може да се состават три триаголници кои се слични со триаголникот T. Со a,b,c да ги означиме висините на овие триаголници. Тогаш $a+b+c$ е висината на триаголникот T. Затоа важи

$$\frac{P_R+P_S}{P_T}=1-\frac{P_Q}{P_T}=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=2\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\leq\frac{2}{3},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. Значи, бараната максимална вредност е еднаква на $\frac{2}{3}$.

Во последното неравенство користевме дека $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$, што е еквивалентно со $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$.

4. На една меѓународна конференција присуствуваат по два претставници од 27 земји. Докажи дека учесниците на конференцијата не може да се подредат околу тркалезна маса, така што меѓу секои два учесника, кои се претставници од иста земја, седат точно 9 други учесници на конференцијата.

Решение. Нека претпоставиме дека опишаниот распоред на седење е можен. Луѓето да ги нумеирраме редоследно со броевите 1, 2, ..., 54. Нека x_k и y_k се редните броеви на земјаците, за $k=1,2,...,27$. Тогаш за секој k важи $y_k-x_k=10$ или $y_k-x_k=44$. Да означиме

$$x=\sum_{i=1}^{27}x_i,\ \ y=\sum_{i=1}^{27}y_i\ .$$

Тогаш за некои цели броеви p и q важи $y-x=10p+44q$ и

$$x+y=1+2+3+...+54=27\cdot 55\,.$$

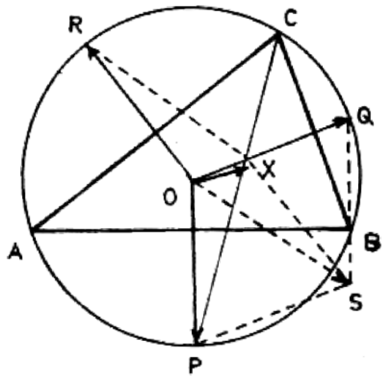
Но, за секои $x,y\in\mathbb{N}$ броевите $y-x$ и $x+y$ се со иста парнот, а додека ние добивме дека броевите $y-x$ е парен, а $x+y$ е непарен број, што е противречност.

II година

1. Нека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Со P,Q,R да ги означиме средините на лаците AB,BC,CA кои не ги содржат точките C,A,B, соодветно. Ако за точката X важи

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

докажи дека X е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC.



Решение. Правите OP, OQ, OR редоследно се симетрали на страните AB, BC, CA на триаголникот ABC. Нека точката S е определена со $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ и $\gamma=\measuredangle BCA$, цртеж десно. Тогаш аголот меѓу правите OQ и CP е еднаков на $\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$, па бидејќи $PS \parallel OQ$, важи $\measuredangle CPS=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$. Од $OR\perp CA$ и $OQ\perp BC$ следува дека $\measuredangle QOR=\pi-\gamma$, па од $SX \parallel OR$ и $PS \parallel OQ$ следува $\measuredangle XSP=\gamma$. Бидејќи $XS=OR=OQ=SP$, триаголникот XSP е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle XPS=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}=\measuredangle CPS.$$

Значи,точкаа X припаѓа на симетралата CP на $\measuredangle BCA$. Слично се докажува дека таа припаѓа и на симетралите на другите два агли на триаголникот ABC.

2. Определи за кои непарни природни броеви n функцијата $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ определена со $f(x)=x^n-2x$ е инјекција.

Решение. Ќе докажеме дека функцијата f е инјекција за секој непарен природен број n. Да претпоставиме дека за некои два рацинални броја важи $f(x)=f(y)$, каде $x=\frac{a}{b}, y=\frac{c}{d}, (a,b)=1, (c,d)=1$ и $b>0, d>0$. Тогаш

$$ad^n(a^{n-1}-2b^{n-1})=b^nc(c^{n-1}-2d^{n-1}). \qquad (1)$$

Бидејќи a и b се заемно прости, добиваме дека $a^{n-1}-2b^{n-1}$ и b се заемно прости, па од (1) следува дека $b^n \mid d^n$. Слично се докажува дека $d^n \mid b^n$, па затоа $b^n=d^n$, т.е. $b=d$. Сега, равенството (1) се сведува на

$$a^n-c^n=2b^{n-1}(a-c). \qquad (2)$$

Ако претпоставиме дека $x\neq y$, тогаш $a\neq c$, па (2) го добива видот

$$a^{n-1}+a^{n-2}c+...+c^{n-1}=2b^{n-1}. \qquad (3)$$

На левата страна на (3) имаме непарно многи собироци, па затоа броевите a и c мора да се парни. Но, тогаш и бројот b мора да е парен, што противречи на претпоставката $(a,b)=1$. Конечно, од добиената протиречност следува $a=c$, па затоа $x=y$, што значи дека функцијата f е инјекција.

3. За множеството $A\subset\mathbb{N}$ велиме дека е *добро*, ако за некој природен број n равенката $x-y=n$ има бесконечно многу решенија (x,y), каде $x\in A,\ y\in A$. Ако $\mathbb{N}=A_1\cup A_2\cup...\cup A_{1988}$, тогаш барем едно од множествата $A_1,A_2,...,A_{1988}$ е добро. Докажи!

Решение. Да петпоставиме дека ниту едно од множествата $A_1,A_2,...,A_{1988}$ не е добро. Тогаш за секој $i\in\{1,2,....,1988\}$ секоја од равенките

$$x-y=1,\ x-y=2,\ ...,\ x-y=1988$$

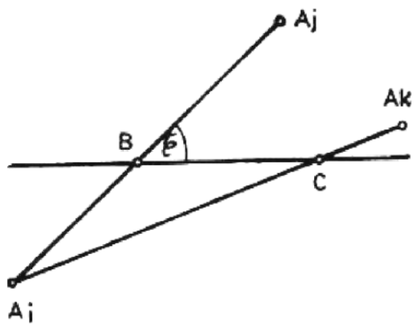
има конечно многу решенија (x,y), такви што $x,y\in A_i$. Нека y_0 е најголемиот y кој се појавува во некое од тие решенија. Меѓу 1989 броеви $y_0+1,\ y_0+2,...,$ y_0+1989 постојат два броја кои припаѓаат на исто множество A_i. Нека се тоа броевите y_0+k и y_0+l, каде $k<l$. Тогаш

$$y_0++l-(y_0++k)=l-k \text{ и } 1\le l-k\le 1988,$$

што противречи на изборот на y_0.

4. Докажи дека во внатрешноста на конвексен $2n-$аголник не постојат две различни точки низ кои минуваат по n дијагонали на тој $2n-$аголник.

Решение. Нека во внатрешноста на конвексниот многуагоаголник $A_1A_2...A_{2n}$ постојат точки B и C такви што низ секоја од нив минуваат по n негови дијагонали. Меѓу сите дијагонали кои минуваат низ B или C да ја избереме онаа која со правата BC формира најмал агол различен од нула. Овој агол да го означиме со φ. Нека тоа е дијагоналата A_iA_j, нека таа минува низ B и нека, на пример, е $\measuredangle A_jBC=\varphi$, цртеж десно. Бидејќи низ точата C минуваат n различни дијагонали на $2n-$ голникот, добиваме дека од секое теме излегува по една дијагонала која минува низ C. Нека A_iA_k е дијагонала која го содржи C. Јасно, $k\neq j$. Исто така



$$\varphi=\measuredangle A_jBC=\measuredangle BA_iC+\measuredangle A_iCB>\measuredangle A_iCB,$$

па дијагоналата A_iA_k (која го содржи C) формира со правата BC агол помал од φ, што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека точките B и C со наведените својства не постојат.

III и IV година

1. Нека $a,b,c,d \in \mathbb{N}_0,\, d \neq 0$. Функцијата $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ е определена со

$$f(x)=[\tfrac{ax+b}{cx+d}].$$

Докажи дека f е инјекција ако и само ако $c=0$ и $a \geq d$.

Решение. Нека претпоставиме дека $c=0$ и $a \geq d$. Нека x_1 и x_2 се природни броеви такви што $x_1 < x_2$. Тогаш $x_2 - x_1 \geq 1$, па затоа

$$\tfrac{ax_2+b}{d}-\tfrac{ax_1+b}{d}=\tfrac{a}{d}(x_2-x_1)\geq 1.$$

Значи $f(x_2) > f(x_1)$,т.е. f е инјекција.

За да го докажеме спротивното, ќе докажеме дека од било кој од условите

1) $c \neq 0$,

2) $c=0, a<d$,

следува дека f не е инјекција.

Во случајот 1) имаме

$$\tfrac{ax+b}{cx+d}=\tfrac{a}{c}+\tfrac{bc-ad}{c(cx+d)}.$$

Ако $\frac{a}{c}=\alpha$ е цел број, тогаш за доволно големо x во еден од интервалите $(\alpha-1,\alpha], [\alpha,\alpha+1)$ (во зависност од знакот на $bc-ad$) ќе се наоѓаат сите броеви $\frac{ax+b}{cx+d}$. За сите овие броеви x ќе важи $f(x)=\alpha-1$ (односно $f(x)=\alpha$), па затоа функцијата не е инјекција. Слично, ако α не е цел број и $[\alpha]=\beta$, сите броеви $\frac{ax+b}{cx+d}$ за доволно големо x ќе припаѓаат на интервалот $[\beta,\beta+1)$, па за овие x ќе важи $f(x)=\beta$.

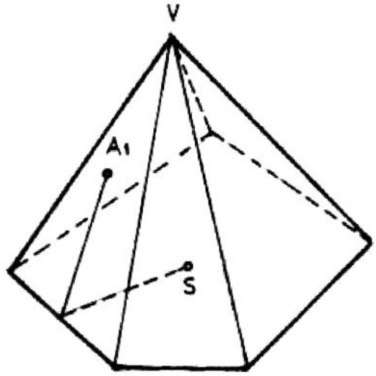
Во случајот 2) да означиме $y_n=\frac{an+b}{d}$, за $n\in\mathbb{N}_0$ и да избереме природен број k таков што $\frac{a}{d}<1-\frac{1}{k}$. Бидејќи за $n\in\mathbb{N}_0$ важи $y_{n+1}-y_n=\frac{a}{d}$, добиваме дека

$$y_k-y_0=k\tfrac{a}{d}<k-1.$$

Но, тоа значи дека за некој $i\in\{0,1,...,k-1\}$ броевите y_i и y_{i+1} припаѓаат на ист интервал од видот $[\alpha,\alpha+1)$. Тогаш $f(i)=f(i+1)$, па затоа и во овој случај функцијата f не е инјекција.

2. Во $n-$страна пирамида може да се впишпе сфера. Секој од бочните ѕидови на пирамидата го ротираме околу соодветниот раб на основата до поклопување со рамнината на основата, така што сликата на бочниот ѕид има заеднички внатрешни точки со основата. На тој начин добиваме n слики на врвот на пирамидата. Докажи дека овие n слики припаѓаат на една кружница.

Решение. Нека V е врвот на дадената $n-$ страна пирамида и нека во неа впишаната сфера ја допира основата во точката S, а бочните ѕидови ги допира во точките $A_1, A_2, ..., A_n$, цртеж десно. При опишаните ротации секоја од точките $A_1, A_2, ..., A_n$ преминува во точката S. Бидејќи



$$VA_1 = VA_2 = ... = VA_n,$$

добиваме дека при разгледуваните ротации сите слики на врвот V се еднакво оддалечени од точката S, што значи дека припаѓаат на иста кружница со центар во точката S.

3. Дадена е строго растечка низа $a_1, a_2, a_3, ...$ природни броеви таква што $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и за секои заемно прости броеви m и n важи $a_m a_n = a_{mn}$. Докажи дека за секој природен број n важи $a_n = n$.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$a_3 a_5 = a_{15} < a_{18} = a_2 a_9 = 2a_9 < 2a_{10} = 2a_2 a_5 = 4a_5,$$

па затоа $a_3 = 3$.

Сега, со индукција ќе докажеме дека за секој природен број $n > 3$ важи $a_n = n$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за секој природен број помал или еднаков на n. Бидејќи броевите $n-1$ и n се заемно прости, добиваме

$$a_{(n-1)n} = a_{n-1} a_n = (n-1)n.$$

Бидејќи низата (a_n) строго монотоно расте, оттука добиваме дека $a_k = k$ за секој $n < k \leq (n-1)n$, па затоа и за $k = n+1$, со што тврдењето е докажано.

4. Во една држава има повеќе од 7 градови. Докажи дека не постои мрежа од едносмерни патишта со следниве својства:

а) Меѓу секои два града постои точно еден директен пат.

б) За секои два града A и B постои точно еден град во кој директно може да се стигне и од A и од B.

в) За секои два града A и B постои точно еден град од кој директно може да се стигне и во A и во B.

Решение. Нека претпоставиме дека постои мрежа од едносмерни патишта меѓу градовите $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n > 7$), такви што се исполнети условите а), б) и в). Со $A_i A_j$ да го означиме патот со почеток A_i и крај A_j, а множеството од сите патишта да го означиме со P. За секој $k \in \{1, 2, ..., n\}$ нека

$$B_k = \{A_i \mid A_k A_i \in P\}, \ C_k = \{A_j \mid A_j A_k \in P\}.$$

Ако за некој i важи $A_i \in B_k$, тогаш од условот в) следува дека постои точно еден град A_j таков што важи $A_jA_i \in P$ и $A_jA_k \in P$, па за тој град A_j важи $A_j \in C_k$. Според тоа, $|B_k| \le |C_k|$. На сличен начин, користејќи го условот б), се докажува дека $|C_k| \le |B_k|$. Според тоа, за секој $k \in \{1,2,...,n\}$ важи $|C_k| = |B_k|$. Од условот а) следува дека $n = 1 + |C_k| + |B_k| = 1 + 2|B_k|$, т.е. n е непарен број, и за секој $k \in \{1,2,...,n\}$ важи $|C_k| = |B_k| = r$.

Сега, нека

$$P_k = \{(i,j) \mid i < j,\ A_kA_i \in P,\ A_kA_j \in P\}.$$

Од условот в) следува дека за секој пар $(i,j), i<j$, постои точно еден број $k \in \{1,2,...,n\}$, таков што важи $(i,j) \in P_k$. Според тоа, множествата $P_1, P_2, ..., P_{2r+1}$ се заемно дисјунктни и нивната унија има ист број елементи како и множеството P. Бидејќи $|B_k| = r$, т.е. бидејќи од секој град A_k може директно да се стигне во r други градови, добиваме дека $|P_k| = \binom{r}{2}$. Понатаму, $|P| = \binom{2r+1}{2}$, па следува

$$\binom{2r+1}{2} = |P| = \sum_{i=1}^{2r+1} |P_i| = (2r+1)\binom{r}{2}.$$

Од последната равека следува $r = 3$, т.е. $n = 7$, што противречи на претпоставката.

Заблешка. За држава со 7 градови може да се конструира мрежа патишта кои ги задоволуваат условите на задачата.