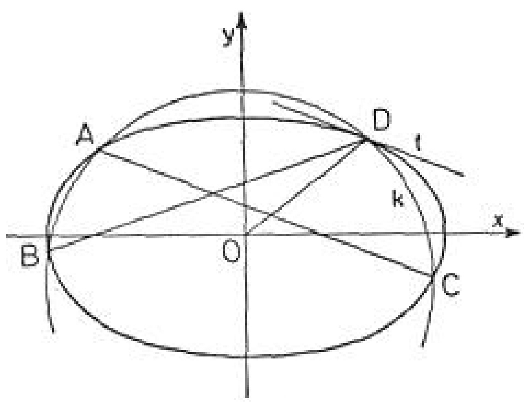
O zakrivljenosti čunjosjeka

STJEPAN ŠKARICA, Zagreb

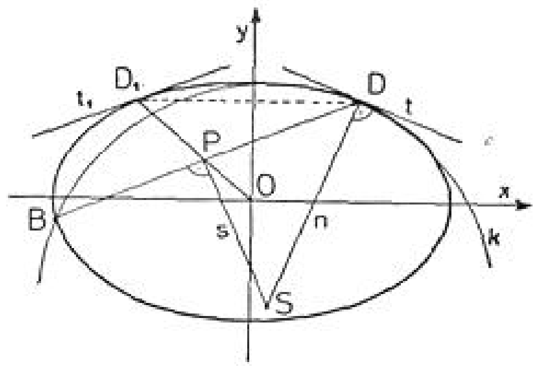
1. Kružnica je u svakoj svojoj tački jednako zakrivljena. Kao mjera njezine zakrivljenosti uzima se recipročna vrijednost njezinog polumjera ρ, tj. $\frac{1}{\rho}$, jer što je polumjer manji, zakrivljenost je veća.

2. Kod drugih krivulja, npr. kod čunjosjeka, zakrivljenost se mijenja od tačke do tačke. Stoga govorimo o zakrivljenosti krivulje u zadanoj tački, a izjednačujemo je sa zakrivljenošću one kružnice, koja s krivuljom u toj tački ima *dotik* najmanje *2. reda*, tj. ima u njoj s krivuljom zajednički najmanje tri beskonačno blize tačke. S tri od tih tačaka *kružnica zakrivljenosti* je jednoznačno određena. Kad je broj tih tačaka *tri*, kružnica zakrivljenosti siječe krivulju i ima s njom zajedničku jednostruku tangentu; kad je broj zajedničkih beskonačno bližih tačaka *četiri*, kružnica zakrivljenosti ima s krivuljom *dotik 3. reda*, tj. ima s njom zajednički *dvostruku tangentu*: kad je broj onih tačaka *pet*, tj. kod *dotika 4. reda*, uz zajedničku dvostruku tangentu kružnica i krivulja se i sijeku, itd.

3. Da konstruiramo kružnicu zakrivljenosti K u zadanoj tački $D(x_1, y_1)$ elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, povucimo jednu od tetiva elipse koje su usporedne s tangentom elipse t u tački D, na pr. AC (sl. 1.)! Kružnica k, određena tačkama A, C, D ne može dirati elipsu



Sl. 1.



Sl. 2.

u tački D ako ta nije tjeme, jer dijametar OD koji je konjugiran tetivi AC pa je raspolavlja, nije na njoj okomit. Iz onoga što slijedi, razabrat ćemo da ta kružnica u općem slučaju ne dotiče elipsu ni u tački A ni u tački C, nego je siječe u četvrtoj tački B.

Neka je jednadžba kružnice $k \equiv x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$! Pramen čunjosjeka koji prolaze tačkama A, B, C, D ima jednadžbu $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + \lambda(x^2 + y^2 + lx + my + n) = 0$. Za određeno λ taj će čunjosjek *degenerirati* u pravce AC i BD. Ako su im jednadžbe: $AC \equiv Px + Qy + R = 0$, $BD \equiv P_1x + Q_1y + R_1 = 0$, onda je jednadžba sustava tih dvaju pravaca: $(Px + Qy + R)(P_1x + Q_1y + R_1) = 0$. Ta je jednadžba za spomenuto λ istovetna s gornjom, a kako u toj nema člana sa xy, mora biti $PQ_1 + P_1Q = 0$, ili $\frac{P}{Q} = -\frac{P_1}{Q_1}$, a to znači da pravci AC i BD sa svakom osi elipse zatvaraju istokračan trokut ili kraće da su *antiparalelni* s obzirom na te osi. Ako sad tetivu AC pomičemo paralelno, tetiva BD će ostati čvrsta, a kada AC pokrije tangentu t u tački D, kružnica k će preći u kružnicu zakrivljenosti K u tački D elipse.

4. Kružnicu K možemo sad lako konstruirati. U tački $D(x_1, y_1)$ konstruiramo tangentu t i normalu n, a u tački $D_1(-x_1, y_1)$ tangentu t_1. Tačkom D povučemo pravac usporedan s t_1; tome pravcu pripada tetiva BD, koju u tački P raspolavlja njoj konjugirani dijametar OD_1. Simetrala s tetive BD siječe normalu n u središtu S kružnice K.

Posve jednako se konstruira kružnica K u tački hiperbole ili parabole, ako ta tačka nije tjeme.

5. Odredimo koordinate x_0 i y_0 središta S i polumjer $SD = \rho$ kružnice K (sl. 2.)! Jednadžba tangente t jest $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0$, a tetive DB $y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$ pa jednadžba kružnice K ima oblik

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + \lambda\,(b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2)\,(b^2x_1x - a^2y_1y - b^2x_1^2 + a^2y_1^2) = 0.$$

U toj jednadžbi moraju koeficijenti od x^2 i y^2 biti jednaki, tj. $b^2 + \lambda b^4 x_1^2 = a^2 - \lambda a^4 y_1^2$; odatle je $\lambda = \frac{e^2}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}$ pa jednadžba kružnice K prelazi u

$$x^2 + y^2 - \frac{2e^2x_1^3}{a^4}x + \frac{2e^2y_1^3}{b^4}y + x_1^2 + y_1^2 - \frac{2(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)}{a^2b^2} = 0.$$

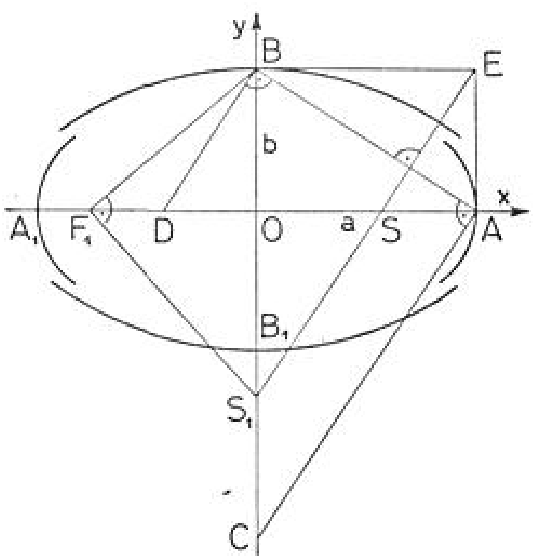
Odatle nalazimo da su koordinate središta S kružnice K:

$$x_0 = \frac{e^2x_1^3}{a^4},\quad y_0 = -\frac{e^2y_1^3}{b^4},\quad \text{a}\quad \overline{SD}^2 = \rho^2 = \left(x_1 - \frac{e^2x_1^3}{a^4}\right)^2 + \left(y_1 + \frac{e^2y_1^3}{b^4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{a^8b^8}\left\{b^4x_1^2\,[a^4b^2 - b^2e^2x_1^2]^2 + a^4y_1^2\,[a^2b^4 + a^2e^2y_1^2]^2\right\} = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^3}{a^8b^8},\quad \rho = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

jer su izrazi u uglastim zagradama jednaki, a također je

$$a^4b^2 - b^2e^2x_1^2 = a^4b^2 - b^2(a^2 - b^2)\,x_1^2 = a^2(b^2x_1^2 + a^2y_1^2) - a^2b^2x_1^2 + b^4x_1^2 = b^4x_1^2 + a^4y_1^2.$$



Sl. 3.

6. U tjemenu A ima kružnica K središte $S\left(\frac{e^2}{a}, 0\right)$, $\rho = \frac{b^2}{a}$, u tjemenu B središte $S_1\left(0, -\frac{e^2}{b}\right)$, dok je polumjer $\rho_B = \frac{a^2}{b}$. U sl. 3. okomica na AB u tački B siječe os x u tački D pa je po poučku o visini pravokutnoga trokuta $OD = \frac{b^2}{a} = \rho_A$, dok okomica na AB u tački A siječe os y u tački C, pa je $OC = \frac{a^2}{b} = \rho_B$. Načinimo li nad poluosima pravokutnik $BOAE$ i povučemo okomicu iz tačke E na AB, sjeći će ta osi x i y u tačkama S i S_1, tj. u središtima kružnica zakrivljenosti u tjemenima A i B, jer je

$$SA = OD,\; S_1B = OC.$$

I okomica na BF_1 u fokusu F_1 prolazi središtem S_1.

7. Za hiperbolu je središte kružnice K u tački $D_1(x_1, y_1)$ tačka $S\left(\frac{e^2x_1^3}{a^4}, -\frac{e^2y_1^3}{b^4}\right)$, $\rho = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$, a u desnom i lijevom tjemenu na realnoj osi $S\left(\pm\frac{e^2}{a}, 0\right)$, $\rho = \frac{b^2}{a}$.

Kod parabole kružnica zakrivljenosti K u tački $D_1(x_1, y_1)$ ima središte

$$S\left(p + 3x_1,\; -\frac{y_1^3}{p^2}\right),\quad \text{a polumjer}\quad \rho = \frac{(p^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2};$$

za tjeme je $S(p, 0)$, a $\rho = p$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист ДМФА на Хрватска во 1960 годин