Платон Димић (Београд)

ЈЕДНА ЗАНИМЉИВА ПЛАНИМЕТРИЈСКА ТЕОРЕМА И НЕКЕ ЊЕНЕ ПОСЛЕДИЦЕ

Теорема 1. Површине два троугла који имају један заједнички угао односе се једна према другој као производи дужина њихових страница које тај угао захватају.

Доказ. Нека су дати троуглови ABC и DEC (сл. 1), чији је заједнички угао C. Кад се повуче дуж BD, онда је $P_{ABC} : P_{DBC} = AF : DG$ (AF и $DG \perp BC$) и $P_{DBC} : P_{DEC} = BH : EI$ (BH и $EI \perp AC$), зато што троуглови ABC и DBC имају заједничку основицу BC, а троуглови DBC и DEC имају заједничку основицу CD.

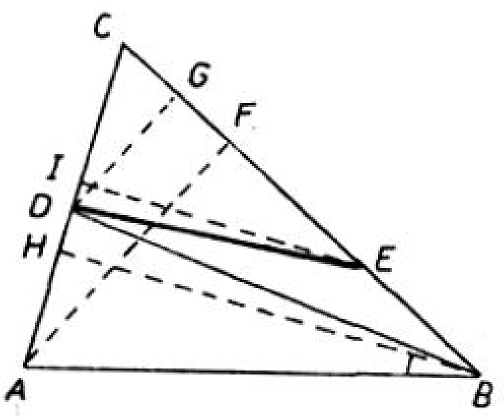
Како је $AF : DG = AC : CD$ и $BH : EI = BC : CE$, то је $P_{ABC} : P_{DBC} = AC : CD$ и $P_{DBC} : P_{DEC} = BC : CE$, па се множењем леве стране са левом страном и десне стране са десном страном ових једнакости добија:

$$P_{ABC} : P_{DEC} = (AC \cdot BC) : (CD \cdot CE).$$

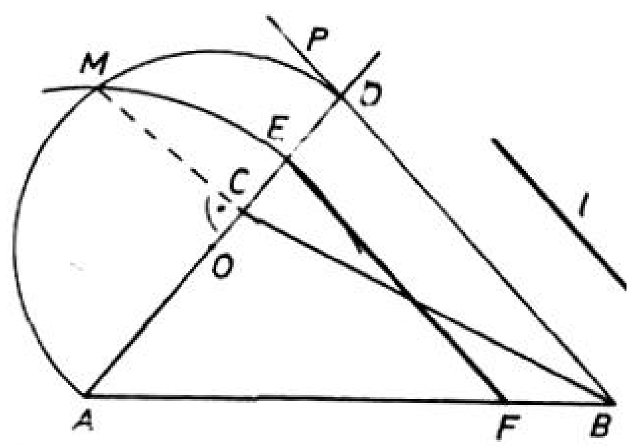
Тако, на пример, ако је $AC=5$, $CD=2$, $BC=6$ и $CE=4$, онда је $P_{ABC} : P_{DEC} = (5 \cdot 6) : (2 \cdot 4)$, тј. $P_{ABC} : P_{DEC} = 30 : 8$.

Последица. Два троугла који имају један заједнички угао имају једнаке површине ако су једнаки производи дужина оних страница сваког од њих које захватају тај угао.

Знајући ово, можемо решити, на пример следећа два конструктивна задатка, чија решења имају и извесне практичне примене.



Сл 1.



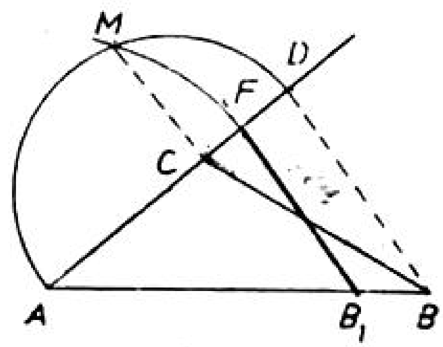
Сл. 2

З а д а т а к 1. Троугао ABC претворити у други који ће имати са њим заједнички угао A, с тим да она страница тог другог троугла, која лежи спрам угла A, буде паралелна са неком датом правом.

Анализа. Нека је дати троугао ABC (сл. 2) и нека је дата права l. Конструишимо праву $BP \| l$ и продужимо страницу AC до њеног пресека D са правом BP. Претпоставимо сад да је AFE тражени троугао, тако да је $EF \| BD$. У том случају је $AB : AF = AD : AE$. Да би било $P_{ABC} = P_{AFE}$, мора бити (с обзиром на теорему 1) $AB \cdot AC = AF \cdot AE$ или $AB : AF = AE : AC$. Дакле: $AD : AE = AE : AC$, што значи да је AE средња геометријска пропорционала за AD и AC.

Конструкција. За дужи AD и AC нађе се средња геометријска пропорционала AM (онако као што је то приказано на сл. 2) и конструише се $EF \| DB$. Тада је AFE тражени троугао.

Пример 1. Користећи се решењем задатка 1, претворити дати произвољни троугао ABC у правоугли троугао, чији је један оштар угао A.



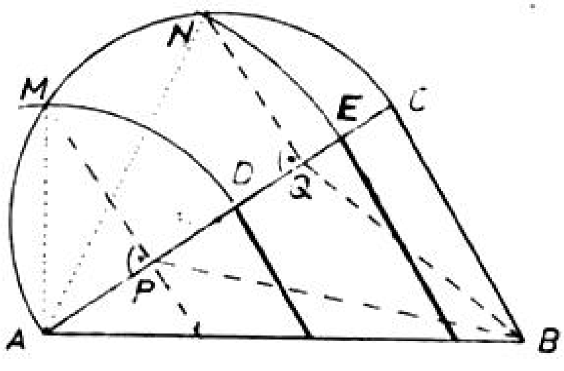
Сл. 3

Решење. Нека је дати троугао ABC и нека га треба претворити у правоугли троугао чији је један оштар угао A. Тада треба најпре конструисати нормалу BD на праву AC и над AD конструисати половину кружнице са центром у O. Конструишимо затим дуж CM нормалну на AC и тачку E тако да је $AE = AM$. Ако после тога конструишемо дуж $EB_1 \| BD$, троугао AB_1E представљаће тражени правоугли труогао (сл. 3).

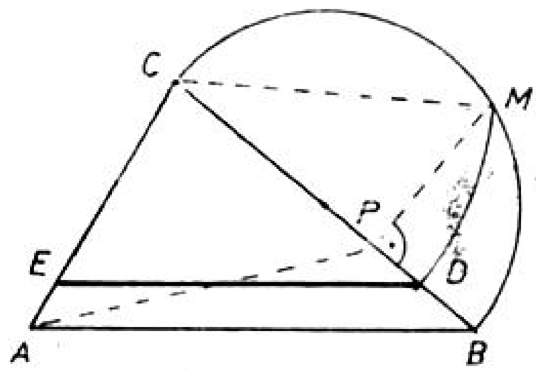
Задатак 2. *Троугао ABC поделити правим које су паралелне са страницом BC на делове чије се површине односе међусобно као $m : n : p$.*

Анализа. Нека је дати троугао ABC (сл. 4). Кад се AC подели тачкама P и Q по размери $m : n : p$, онда троуглови ABP, PBQ и QBC имају тражену величину. Ако се затим троуглови ABP и ABQ, задржавајући им угао A, претворе (с обзиром на решење претходног задатка), у троуглове AFD и AGE чије су странице FD и GE паралелне са BC, тада ће се површине делова AFD, $DFGE$ и $GBCE$ међусобно односити као $m : n : p$. Према томе FD и GE су тражене деоне линије.

Конструкција. Следује непосредно из наведене анализе.



Сл. 4



Сл. 5

Пример 2. Користећи се решењем задатка 2, поделити троугао ABC једном дужи, паралелном са страницом AB, у односу $2:1$, тако да теме C остане у већем делу датог троугла.

Решење. Нека је дати троугао ABC (сл. 5). Према постављеном задатку треба поделити троугао ABC на два дела једном дужи DE која је паралелна са основицом AB, тако да троугао DCE представља две трећине троугла ABC. Ради тога треба страницу BC поделити тачком P тако да буде $CP=2\,BP$, па из P конструисати $PM\perp BC$. Напослетку, из тачке C треба описати кружни лук MD и конструисати $DE\|AB$. Троугао EDC представљаће две трећине троугла ABC.

Задаци

1. Произвољни троугао претворити у једнакостранични троугао.
2. Троугао ABC преполовити правом која стоји нормално на страници AB.
3. Дати троугао преполовити правом повученом кроз дату тачку на једној његовој страници.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија