Алекса Малчески
Машински факултет - Скопје

СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ ОД ТРИ ПРОМЕНЛИВИ III

Проблемот на разложување на множители е познат проблем во развојот на математиката, т.е. алгебрата.Во случај на полиноми од една променлива тој е комплетно решен, и познати се потребни и доволни услови кога даден полином може да се разложи на линеарни множители. Теорија со која се дадени потребни и доволни услови за да полином од произволен степен од повеќе од една променлива може да се разложи на множители (линеарни од своите променливи), од достапната литература на авторот не му е позната . Во наредниот дел ќе разгледаме како може да се искористат методите развиени во претходните две статии за разложување на некои симетрични полиноми на множители. Се разбира дека и во овој случај, како и за произволен полином од три реално независни променливи не постои изградена теорија која ќе даде потребни и доволни услови за негово разложување на линеарни множители, а со тоа и на множители.

Да забележиме дека развиената техника на трансформирање на симетрични полиноми од три променливи преку елементарните симетрични полиноми σ_1, σ_2 и σ_3 секако дека може да се искористи за докажување на идентитети кои се симетрични како и за докажување на симетрични неравенства од три променливи. Во наредниот дел ќе ги искористиме погодностите од претходните два дела за решавање на споменатите проблеми.

9. Разложување на множители

Преминот на елементарни симетрични полиноми σ_1, σ_2 и σ_3 понекогаш е корисен, не само за решавање на алгбарски равенки, туку и за решавање на други алгебарски проблеми. Во овој дел ние ќе ја разгледуваме задачата за разложување на полином на множители.

Нека $f(x, y, z)$ е симетричен полином од три променливи. За да го разложиме овој полином на множители, можеме да го изразиме преку симетричните елементарни полиноми σ_1, σ_2 и σ_3, а потоа добиениот полином од σ_1, σ_2 и σ_3 да го разложиме на множители. Секако дека тоа е можно само во некои парцијални случаи.

Ако тоа е можно, тогаш заменувајќи ги вредностите

$$\sigma_1 = x + y + z \text{ , } \sigma_2 = xy + yz + zx \text{ и } \sigma_3 = xyz \text{ ,}$$

ќе добиеме разложување на почетниот полином $f(x, y, z)$ на множители.

Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. Полиномот $x^3+y^3+z^3-3xyz$,да се разложи на множители.

Решение.Согласно фомулите за степени суми s_k , имаме $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$, па според тоа

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= s_3-3\sigma_3=(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-3\sigma_3 \\ &= \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2) \\ &= (x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)] \\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \end{aligned}$$

Пример 2.Да се разложи на множители полиномот

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4$$

Решение. Користејќи ги формулите за пресметување на степени суми s_k и за пресметување на орбити од облик $O(x^k y^k)$, добиваме

$$\begin{aligned} 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4 &= 2O(x^2y^2)-s_4 \\ &= 2(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3) \\ &= -\sigma_1^4+4\sigma_1^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3 \\ &= \sigma_1(4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3) \end{aligned}.$$

Според тоа, полиномот се дели со $\sigma_1=x+y+z$. Бидејќи полиномот има само парни степени на променливите x,y,z , тогаш тој при замена на x со $-x$, или на y со $-y$ или на z со $-z$ не се менува. Заради тоа тој не само што се дели со $x+y+z$, туку тој се дели со $-x+y+z$, $x-y+z$ и со $x+y-z$. Оттука добиваме

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)P(x,y,z) \qquad (*)$$

каде P е некој полином. Споредувајќи ги степените од лево и десно на последното равенство, гледаме дека P е полином од нулти степен, т.е. P е број. За да го најдеме тој број, ќе го искористиме методот на вредности на полиномот. Бидејќи (*) е идентитет, за произволни вредности на променливите x,y и z равенството е точно. Според тоа, ако замениме $x=y=z=1$, имаме $3=3P$, од каде што добиваме $P=1$. На тој начин

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

Понекогаш, пред да се изрази симетричниот полином x,y и z преку елементарните симетрични полиноми σ_1,σ_2 и σ_3, потребно е да се ослободиме, во некои изрази кои се дел од даден израз, од загради со сведување на слични членови и изведување на други идентични трансформации. Во такви случаи, не ретко, многу е корисно до ослободување од загради да се упрости дадениот израз со парцијално воведување на симетричните полиноми σ_1,σ_2 и σ_3. Со други зборови, корисно е во делови од дадениот израз да се воведат симетричните полиноми σ_1, σ_2 и σ_3 а во други делови од изразот да се зачуваат почетните променливи x, y и z . Ќе разгледаме еден пример.

Пример 3. Да се разложи на множители полиномот

$$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Решение. Зададениот полином ќе го трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned}
a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)= \\
&= a(\sigma_1-2a)^2+b(\sigma_1-2b)^2+c(\sigma_1-2c)^2+(\sigma_1-2a)(\sigma_1-2b)(\sigma_1-2c) \\
&= \sigma_1^2(a+b+c)-4\sigma_1(a^2+b^2+c^2)+4(a^3+b^3+c^3)+\sigma_1^3- \\
&\quad -2\sigma_1^2(a+b+c)+4\sigma_1(ab+bc+ca)-8abc= \\
&= \sigma_1^3-4\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+4(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)+\sigma_1^3-2\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-8\sigma_3 \\
&= 4\sigma_3=4abc
\end{aligned}$$

Начинот на разложување од последната задача е корисен само во случај кога симетричниот полином може да се разложи на симетрични множители. Поопшто прашање за разложување на симетричните полиноми на множители(во општ случај и несиметрични) ќе биде разгледан во натамошниот тек на изложувањата.

Задачи

Да се разложат на множители следните полиноми:

1. $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$.

2. $2(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2-3abc$.

3. $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$.

4. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+2abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ac)$.

5. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$.

6. $(a+b+c)^5-(-a+b+c)^5-(a-b+c)^5-(a+b-c)^5$.

7. $(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2-(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$.

Упрости ги изразите:

8. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

9. $\dfrac{bc-a^2+ca-b^2+ab-c^2}{a(bc-a^2)+b(ca-b^2)+c(ab-c^2)}$.

10. Докажи дека за произволен природен број n полиномот

$$(x+y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-(x+z)^{2n}-(x+y)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}$$

се дели со полиномот $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(x+z)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$.

11. Докажи дека полиномот

$$a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+c^4(a^2+b^2-c^2)^2,$$

е делив со полиномот $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$.

12. Докажи дека, ако a,b и c се цели броеви и $a+b+c$ е број делив со 6, тогаш и бројот $a^3+b^3+c^3$ е делив со 6.

10. Докажување идентитети

Во цела низа од задачи кои се среќаваат во елементарна алебра, т.е во учебниците за редовното образование, со успех може да се применуваат елементарните симетрични полиноми. Во многу задачи дадено равенство кое е симетрично во однос на своите променливи може да се трансформира во равенство од елементарните симетрични полиноми. Се докажува она равенство од двете равенства равенствата за кое ќе се процени кое од нив може полесно да се докаже, т.е. да се провери неговата точност. Во таа смисла ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. Докажи го равенството

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=(x+y)(y+z)(z+x).$$

Решение. Употребувајќи ги симетричните полиноми σ_1,σ_2 и σ_3, гледаме дека левата страна на равенството може да се запише во облик $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$. Ако во десната страна се ослободиме од заградите, добиваме

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z)(z+x)&=x^2y+x^2z+z^2x+z^2y+y^2z+y^2x+2xyz\\&=O(x^2y)+2\sigma_3=(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)+2\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3\end{aligned}.$$

(да забележиме дека во претпоследното равенство е употребено $O(x^2y)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_2$).

Пример 2. Докажи дека, ако $x+y+z=0$, тогаш

$$x^4+y^4+z^4=2(xy+xz+yz)^2.$$

Решение. За степената сума $s_4=x^4+y^4+z^4$ имаме

$$x^4+y^4+z^4=s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3.$$

Бидејќи $\sigma_1=x+y+z=0$,изразот од десната страна на последното равенство, го добива обликот $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3=2\sigma_2^2$, од каде што добиваме

$$x^4+y^4+z^4=2\sigma_2^2=2(xy+yz+zx)^2,$$

што и требаше да се докаже.

Пример 3. Ако $x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$, тогаш $xyz=0$. Докажи!

Решение. Условите на задачата ги запишуваме во облик

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 1 \end{cases}.$$

Од овој систем на равенки добиваме дека $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = 0$. Равенството $\sigma_3 = 0$ означува дека $xyz = 0$.

Пример 4. Докажи дека, ако x, y, z, u, v и w се броеви за кои

$$\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & + & z & = & u & + & v & + & w \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & u^2 & + & v^2 & + & w^2, \\ x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & u^3 & + & v^3 & + & w^3 \end{array} \qquad (*)$$

тогаш за произволен природен број n точно е равенството

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n .$$

Решение. Елементарните симетрични полиноми од променливите x, y, z ќе ги означиме со $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ а елементарните симетрични полиноми од променливите u, v, w ќе ги означиме со τ_1, τ_2 и τ_3. Тогаш од точноста на равенствата (*), имаме

$$\sigma_1 = \tau_1, \; \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \tau_1^2 - 2\tau_2, \; \sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \tau_1^2 - 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3 .$$

Според тоа, $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_2$ и $\sigma_3 = \tau_3$. Но тогаш за даден полином $\varphi(t_1, t_2, t_3)$ имаме:

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) .$$

Според основната теорема за симетрични полиноми, ако $f(x, y, z)$ е произволен симетричен полином, тогаш

$$f(x, y, z) = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ и } f(u, v, w) = F(\tau_1, \tau_2, \tau_3) ,$$

од каде добиваме

$$x^n + y^n + z^n = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = F(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = u^n + v^n + w^n ,$$

т.е.

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n$$

Во примерот 2 од овој дел, требаше да се пресмета $s_4 = x^4 + y^4 + z^4$, при услов да е $\sigma_1 = x + y + z = 0$. Во редица на други примери кои се појавуваат во различни збирки како специјализирани, така и збирки од редованата настава се бара да се пресмета израз за степени суми преку σ_2 и σ_3 при услов $\sigma_1 = 0$. Тие изрази се добиваат кога во основната таблица за степени суми $s_k, k \in \mathbb{N}$, која беше формирана во претходните делови, изразени преку σ_1, σ_2 и σ_3 се замени $\sigma_1 = 0$. Во тој случај, таа таблица го добива обликот

Формули за степени суми $s_k = x^k + y^k + z^k$ изразени преку σ_2 и σ_3, кога е исполнет условот $\sigma_1 = 0$
$s_1 = 0$; $s_2 = -2\sigma_2$; $s_3 = 3\sigma_3$; $s_4 = 2\sigma_2^2$; $s_5 = -5\sigma_2\sigma_3$, $s_6 = 3\sigma_3^2 - 2\sigma_2^3$, $s_7 = 7\sigma_2^2\sigma_3$, $s_8 = 2\sigma_2^4 - 8\sigma_2\sigma_3^2$, $s_9 = 3\sigma_3^3 - 9\sigma_2^3\sigma_3$, $s_{10} = -2\sigma_2^5 + 15\sigma_2^2\sigma_3^2$ ...

Од овие формули, со помош на равенствата за пресметување на орбити од облик $O(x^k y^l)$, не е тешко да се добијат за нив формули во кои тие ќе бидат изразени преку σ_2 и σ_3 во кои $\sigma_1 = 0$. На пример

$$O(x^5y^2) = O(x^5)O(x^2) - O(x^7) = s_5s_2 - s_7 = (-5\sigma_2\sigma_3)(-2\sigma_2) - 7\sigma_2^2\sigma_3 = 3\sigma_2^2\sigma_3$$

(при $\sigma_1 = 0$).

Во наредните задачи ќе разгледаме некои примени на тие формули.

Пример 5. Да се докаже дека, ако $x + y + z = 0$ и $xy + xz + yz = 0$,тогаш точно е равенството $3(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) = (x^3 + y^3 + z^3)^2$.

Решение. Од таблицата за формули на орбити од облик $O(x^k y^l)$ изразени преку σ_1, σ_2 и σ_3, при услов $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$, добиваме

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = O(x^3y^3) = 3\sigma_3^2 .$$

Од друга страна, согласно формулите на претходната таблица

$$x^3 + y^3 + z^3 = s_3 = 3\sigma_3 .$$

Од последните две равенства, ја добиваме точноста на даденото почетно равенство.

Пример 6. Докажи го идентитетот

$$\frac{(a+b)^7 - a^7 - b^7}{(a+b)^3 - a^3 - b^3} = \frac{7}{6}[(a+b)^4 + a^4 + b^4] .$$

Решение. За потребите на доказот бројот $-a-b$ ќе го означиме со c, т.е. $c = -a-b$. Тогаш $a+b+c=0$ и може да се применат формулите од претходната таблица. Левата страна на докажуваниот идентитет е

$$\frac{(a+b)^7 - a^7 - b^7}{(a+b)^3 - a^3 - b^3} = \frac{(-c)^7 - a^7 - b^7}{(-c)^3 - a^3 - b^3} = \frac{c^7 + a^7 + b^7}{c^3 + a^3 + b^3} = \frac{s_7}{s_3} = \frac{7\sigma_2^2\sigma_3}{3\sigma_3} = \frac{7}{3}\sigma_2^2 ,$$

а десната го добива обликот

$$\frac{7}{6}[(a+b)^4 + a^4 + b^4] = \frac{7}{6}[(-c)^4 + a^4 + b^4] = \frac{7}{6}(c^4 + a^4 + b^4) = \frac{7}{6}s_4 = \frac{7}{6}2\sigma_2^2 = \frac{7}{3}\sigma_2^2 .$$

Според тоа, даденото равенство е идентитет.

Овој начин на докажување на идентитети не ретко се користи, при што основната идеја се состои во следното: ако двете страни на докажуваното равенство се изразуваат преку разликите $a-b$, $b-c$ и $c-a$, тогаш корисно е да се воведат смени: $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$. При тоа добиваме:

$$x+y+z=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0,$$

и заради тоа, може да се применува таблицата на формули од овој дел. Истиот метод може да се применува при разложување на множители на полиноми, кои се изразуваат преку $a-b, b-c, c-a$.

Ќе разгледаме два примери.

Пример 7. Да се докаже идентитетот

$$(a-b)^6+(b-c)^6+(c-a)^6-9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=$$
$$=2(a-b)^3(a-c)^3+2(b-c)^3(b-a)^3+2(c-a)^3(c-b)^3.$$

Решение. Со воведување на смените $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$, докажуваниот идентитет го добива обликот

$$x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2=-2x^3z^3-2x^3y^3-2y^3z^3,$$

или

$$s_6-9\sigma_3^2=-2O(x^3y^3). \qquad (*)$$

Бидејќи $\sigma_1=x+y+z=0$, можеме да ги примениме формулите кои се дадени во таблицата од овој дел, т.е. добиваме

$$s_6=3\sigma_3^2-2\sigma_3^2, \qquad O(x^3y^3)=\sigma_2^3+3\sigma_3^2.$$

Со непосредна смена добиваме дека равенството (*) е точно.

Пример 8. Разложи го на множители полиномот $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

Решение.Воведувајќи смени $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$, добиваме:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=x^3+y^3+z^3=s_3=3\sigma_3=3xyz=3(a-b)(b-c)(c-a),$$

(Овде ја искористивме формулата $s_3=3\sigma_3$, кој е дадена во таблицата од овој дел).

Задачи

Докажи ги следните идентитети:

13. $(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3=24abc$;

14. $a(-a+b+c)^2+b(a-b+c)^2+c(a+b-c)^2+(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=4abc$

15. $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c)$;

16. $$(a+b+c)^4+(-a+b+c)^4+(a-b+c)^4+(a+b-c)^4=$$
$$=4(a^4+b^4+c^4)+24(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

17. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=(b+c)(c+a)(a+b)$;

18. $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(a+b)(a+c)(b+c)=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

19. $(-a+b+c)^3+(a-b+c)^3+(a+b-c)^3-3(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$
$=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

20. $(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2+2a^2b^2c^2-a^4(b+c)^2-b^4(a+c)^2-c^4(a+b)^2=$
$=2(ab+bc+ca)^3$

21. $(x+y+z)^5-(-x+y+z)^5-(x-y+z)^5-(x+y-z)^5=80xyz(x^2+y^2+z^2)$.

22. $(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2$.

Докажи дека, ако $a+b+c=0$, тогаш точни се следните равенства:

23. $a^3+b^3+c^3=3abc$,

24. $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

25. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0$.

26. $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

27. $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$;

28. $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{2}$.

29. $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2$

30. Докажи ги равенствата

$(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2$; $(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

со користење на методите што се искористени во примерот 6.

Провери ја точноста на следните равенства

31. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)=0$.

32. $25[(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7][(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3]=$
$=21[(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5]^2$

33. $(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4=2[(y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2+(x-y)^2(y-z)^2]$

34. Докажи дека, ако $s=\frac{a+b+c}{2}$, тогаш точно е равенството

$a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+c(s-a)(s-b)+2(s-a)(s-b)(s-c)=abc$.

35. Пресметај го збирот $a^4+b^4+c^4$, ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$.

36. Докажи дека, ако $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, тогаш за произволен непарен број е точно равенството

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^n=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}=\frac{1}{(a+b+c)^n}\,.$$

37. Докажи дека за $n=6k\pm1$, полиномот $(x+y)^n-x^n-y^n$ се дели со x^2+xy+y^2 а при $n=6k+1$ се дели со $(x^2+xy+y^2)^2$.

38. Докажи дека е точно равенството

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=27a^2(x^3+y^3+z^3-3xyz)\,,$$

ако

$$u=x+y+z+a(y+z-2x)\,,$$

$$v=x+y+z+a(x+z-2y) \text{ и}$$

$$w=x+y+z+a(x+y-2z)\,.$$

39. Докажи дека, ако $a+b+c+d=0$, тогаш точно е равенството

$$ad(a+d)^2+bc(b+c)^2+ab(a+b)^2+cd(a-b)^2+ac(a+c)^2+bd(a-c)^2+4abcd=0\,.$$

Развиената техника може да се користи и за решавање на други алгебарски проблеми, како што се рационализација или докажување на неравенства.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија