

Регионален натпревар 1982

I година

1. Да се разложи на прости множители изразот

$$T = (ab + bc + ca)(a + b + c) - abc.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} T &= a^2b + a^2c + abc + ab^2 + abc + b^2c + abc + ac^2 + bc^2 - abc \\ &= (a^2b + a^2c) + (abc + ab^2) + (b^2c + bc^2) + (abc + ac^2) \\ &= a^2(b + c) + ab(b + c) + bc(b + c) + ac(b + c) \\ &= (b + c)(a^2 + ab + bc + ac) \\ &= (b + c)[a(a + b) + c(a + b)] \\ &= (a + b)(b + c)(c + a) \end{aligned}$$

2. Во 8 kg смеса има 65 % алкохол и 35 % вода. Колку вода треба да се додаде за да има во разредената смеса 45 % вода?

Решение. Бидејќи 1% од смешата е 80 gr, во смешата има 2800 грама вода и 5200 грама алкохол. Нека x е количеството вода, во грамови, што треба да се додаде. Тогаш $2800 + x$ треба да е 45% од $8000 + x$, т.е. $2800 + x = 0,45(8000 + x)$, од каде што се добива $x = 1454, (54)$.

Значи, за да се добие смеса со 45 % вода треба да се додадат 1454,54 грама вода.

3. Да се најде најмалиот природен број кој поделен со 2 дава остаток 1, поделен со 3 дава остаток 2, поделен со 4 дава остаток 3 и поделен со 5 дава остаток 4.

Решение. Нека бараниот број е x ; тогаш имаме

$$x = 2x_1 + 1 = 3x_2 + 2 = 4x_3 + 3 = 5x_4 + 4.$$

За бројот $x + 1$ ќе имаме

$$x + 1 = 2(x_1 + 1) = 3(x_2 + 1) = 4(x_3 + 1) = 5(x_4 + 1),$$

што значи дека $x + 1$ е делив со 2, 3, 4 и 5. Значи, бројот $x + 1$ е најмалиот заеднички содржател на броевите 2, 3, 4 и 5, т.е. $x + 1 = 60$, од каде добиваме $x = 59$.

4. Ако еден остроаголен триаголник со страни a, b, c ротира околу секоја од своите страни и се добиваат три тела. Да се најде односот на волумените на така добиените тела.

Решение. Да го најдеме волуменот V_c на телото кога триаголникот ABC ротира околу страната AB (види цртеж). Добиеното тело е составено од два слепени конуса со ист радиус h_c и висини c_1 и c_2 соодветно. За волуменот V_c ќе имаме:

$$V_c = \frac{1}{3}h_c^2\pi c_1 + \frac{1}{3}h_c^2\pi c_2 = \frac{1}{3}h_c^2\pi(c_1 + c_2) = \frac{1}{3}h_c^2\pi c,$$

каде што $c = \overline{AB} = c_1 + c_2$.

Слично, за волумените V_a и V_b на другите две тела ќе добиеме:

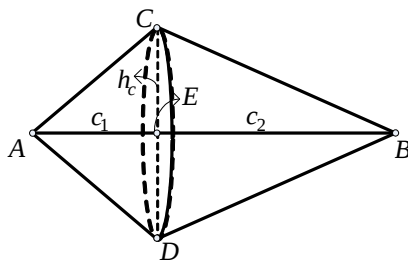
$$V_a = \frac{1}{3} h_a^2 \pi a, \quad V_b = \frac{1}{3} h_b^2 \pi b,$$

па

$$V_a : V_b : V_c = h_a^2 a : h_b^2 b : h_c^2 c.$$

Но, $ah_a = bh_b = ch_c = 2P$ (P -плоштина на триаголникот ABC), па затоа

$$V_a : V_b : V_c = h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$



II година

1. Во еден трицифрен број средната цифра е трипати помала од збирот на другите две, а збирот на последните две цифри е двапати помал од првата цифра. Ако си ги заменат местата цифрите на десетките и единиците, се добива број за 18 помал од дадениот. Кој е тој број?

Решение. Со x, y и z да ги означиме цифрите на единиците, десетките и стотките, соодветно на бараниот трицифрен број. Според условите на задачата

$$\begin{cases} 3y = x + z \\ x = 2(y + z) \\ 100x + 10y + z = 100x + 10z + y + 18 \end{cases}$$

Од каде што добиваме $x=8, y=3$ и $z=1$. Значи, бараниот број е 831.

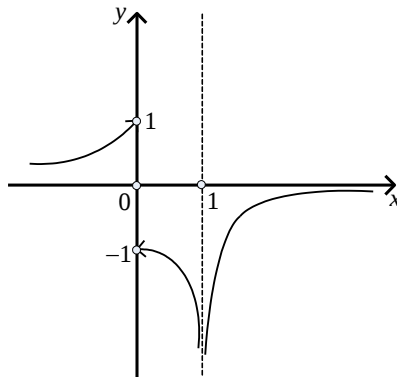
2. Да се скицира графикот на функцијата: $y = -\frac{|x|}{|x-1|x}$.

Решение. Функцијата не е дефинирана за $x=0$ и $x=1$. Ако $x>0$ и $x-1>0$, т.е. $x \in (1, +\infty)$ и ако $x<0$ и $x-1<0$, т.е. $x \in (-\infty, 0)$, тогаш функцијата може да се напише во обликот

$$y = -\frac{1}{x-1}.$$

Ако пак $x \in (0, 1)$, тогаш функцијата може да се запише во обликот $y = \frac{1}{x-1}$.

Скица на графикот на функцијата е дадена на цртежот десно.



3. Нека x_1 и x_2 се корените на равенката

$$p^2 x^2 + p^3 x + 1 = 0.$$

Да се определи p , така што изразот $x_1^4 + x_2^4$ да има најмала вредност.

Решение. За изразот $x_1^4 + x_2^4$ користејќи ги Виетовите правила, имаме

$$\begin{aligned}x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 \\&= [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2x_1^2 x_2^2 \\&= (p^2 - \frac{2}{p^2})^2 - \frac{2}{p^4} = (p^4 + \frac{2}{p^4}) - 4\end{aligned}$$

Значи, изразот $x_1^4 + x_2^4$ има најмала вредност ако и само ако изразот $p^4 + \frac{2}{p^4}$ има најмала вредност. За овој израз, пак, имаме

$$p^4 + \frac{2}{p^4} \geq 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{2}{p^4}} = 2\sqrt{2},$$

од каде што следува дека изразот $p^4 + \frac{2}{p^4}$ прима најмала вредност за $p = \pm\sqrt[8]{2}$.

4. На страната AD од паралелограмот $ABCD$ земена е точка E , така што $3 \cdot \overline{AE} = \overline{AD}$.

Да се најдат односите $\overline{AP} : \overline{PC}$ и $\overline{BP} : \overline{PE}$, каде што $P = AC \cap BE$.

Решение. Векторите $\overline{AP}$ и $\overline{AC}$ се колинеарни, па постои реален број x , така што $\overline{AP} = x\overline{AC}$. Исто така, постои реален број y , така што

$$\overline{PE} = y\overline{BE}.$$

Од цртежот се гледа дека

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}, \quad \overline{BE} = -\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD},$$

па следува

$$\overline{AP} = x(\overline{AB} + \overline{AD}), \quad \overline{PE} = y(-\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD}).$$

Бидејќи $\overline{AP} + \overline{PE} + \overline{EA} = \vec{0}$, ќе имаме

$$x(\overline{AB} + \overline{AD}) + y(-\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD}) - \frac{1}{3}\overline{AD} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (x - y)\overline{AB} + (x + \frac{y}{3} - \frac{1}{3})\overline{AD} = \vec{0}$$

Векторите $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ не се колинеарни, па следува дека

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + \frac{y}{3} = \frac{1}{3} \end{cases},$$

од каде што добиваме $x = y = \frac{1}{4}$. Според тоа, имаме

$$\overline{AP} = \frac{1}{4}\overline{AC}, \quad \overline{PE} = \frac{1}{4}\overline{BE},$$

а од тоа следува дека

$$\overline{AP} : \overline{PC} = 1 : 3, \quad \overline{BP} : \overline{PE} = 3 : 1.$$

III година

1. Да се докаже дека за секој природен број m полиномот

$$f(x) = (x-2)^{2m} + (x-1)^m - 1$$

е делив со полиномот $p(x) = (x-1)(x-2)$, а потоа да се најде количникот.

Решение. Бидејќи $f(1) = (1-2)^{2m} + (1-1)^m - 1 = 0$ следува дека полиномот $f(x)$ е делив со $x-1$; исто така, од $f(2) = (2-2)^{2m} + (2-1)^m - 1 = 0$ следува дека полиномот $f(x)$ е делив со $x-2$. Значи, $f(x)$ е делив со $p(x)$.

Да го најдеме количникот $\frac{f(x)}{p(x)}$. Имаме:

$$\frac{f(x)}{p(x)} = \frac{1}{x-1} \left[(x-2)^{2m-1} + \frac{(x-1)^{m-1}}{x-2} \right].$$

Бидејќи

$$\frac{(x-1)^{m-1}}{x-2} = \frac{(x-1)^{m-1}}{(x-1)-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (x-1)^k,$$

ќе имаме

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{p(x)} &= \frac{1}{x-1} \left[(x-2)^{2m-1} + \sum_{k=0}^{m-1} (x-1)^k \right] \\ &= \frac{(x-2)^{2m-1}+1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \sum_{k=1}^{m-1} (x-1)^k \\ &= \frac{(x-2)^{2m-1}+1}{(x-2)+1} + \sum_{k=0}^{m-2} (x-1)^k \\ &= \sum_{s=0}^{2m-2} (-1)^s (x-2)^s + \sum_{k=0}^{m-2} (x-1)^k \end{aligned}$$

2. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2y-x} \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases}$$

Решение. Имаме:

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} = 3^{x-2y} \\ \log_2(x^2 - y^2) = \log_2 16 \end{cases},$$
$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2y-x \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases},$$
$$\begin{cases} 3x = 5y \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases},$$

од каде што добиваме $x = \pm 5$, $y = \pm 3$.

3. Да се пресмета $\sin^3 x + \cos^3 x$ ако $\sin x + \cos x = a$.

Решение. Изразот $\sin^3 x + \cos^3 x$ ќе го запишеме во обликот:

$$\begin{aligned}\sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x \\ &= a^3 - 3(\sin x + \cos x) \sin x \cos x \\ &= a^3 - 3a \sin x \cos x\end{aligned}$$

Квадрирајќи го равенството $\sin x + \cos x = a$, добиваме

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x &= a^2; \\ 1 + 2\sin x \cos x &= a^2; \\ \sin x \cos x &= \frac{a^2 - 1}{2}.\end{aligned}$$

На крајот имаме

$$\sin^3 x + \cos^3 x = a^3 - 3a \cdot \frac{a^2 - 1}{2} = \frac{a}{2}(3 - a^2).$$

4. Околу кружница со радиус r опишан е трапез $ABCD$. Ако M, N, P и Q се допирните точки на страните AB, BC, CD и DA соодветно, тогаш

$$\overline{AM} \cdot \overline{BN} \cdot \overline{CP} \cdot \overline{DQ} = r^4.$$

Докажи!

Решение. Да ставиме

$$\overline{AM} = \overline{AQ} = x, \quad \overline{BM} = \overline{BN} = y, \quad \overline{CN} = \overline{CP} = z, \quad \overline{DP} = \overline{DQ} = t$$

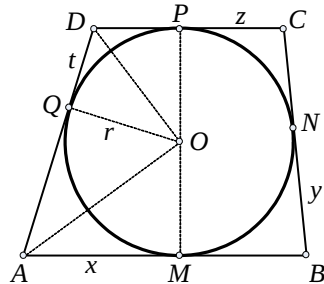
(види цртеж). Имаме:

$$\angle AOM = \angle QOA \text{ и } \angle QOD = \angle DOP$$

од каде што следува дека

$$\angle AOD = \angle AOQ + \angle QOD = 90^\circ.$$

Значи, триаголникот AOD е правоаголен и $\overline{QO} = r$ е негова висина, спушена од темето O на правиот агол, па затоа $r^2 = xt$. Слично добиваме $r^2 = yz$, т.е. $xyzt = r^4$, што и требаше да се докаже.



IV година

1. Од непарните природни броеви ги формираме множествата

$$A_1 = \{1\}, \quad A_2 = \{3, 5\}, \quad A_3 = \{7, 9, 11\}, \quad A_4 = \{13, 15, 17, 19\}, \dots$$

Да се пресмета збирот на броевите на множеството A_n .

Решение. Да го најдеме првиот број во множеството A_n . Множествата $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ се попарно дисјунктни, па бројот на елементите во нивната унија е

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Значи, последниот број во множеството A_{n-1} е $n(n-1)-1$. Според тоа, првиот број во множеството A_n ќе биде $n(n-1)+1$, а последниот $n(n+1)-1$.

Броевите во множеството A_n формираат аритметичка прогресија со прв член $a_1 = n(n-1)+1$, со последен член $a_n = n(n+1)-1$ и разлика $d = 2$. Според тоа, нивниот збир ќе биде:

$$S_n = \frac{n}{2}(n(n-1)+1+(n(n+1)-1)) = n^3.$$

2. Точката $T(1,2)$ е тежиште на триаголникот ABC ; точката $D(3,4)$ е средина на страната BC , а точката $S(\frac{14}{9}, \frac{10}{9})$ е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC . Да се најдат темињата на триаголникот ABC .

Решение. Тежиштето T ја дели тежишната линија AD во однос $1:2$, па за $A(a_1, a_2)$ ќе имаме

$$1 = \frac{a_1+2 \cdot 3}{3}, \quad 2 = \frac{a_2+2 \cdot 4}{3},$$

од каде што добиваме $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, т.е. $A(-3, -2)$.

Нека $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$. Точката $D(3,4)$ е средина на BC , па ќе имаме

$$b_1 + c_1 = 6, \quad b_2 + c_2 = 8. \quad (1)$$

Точката S е центар на опишаната кружница, па радиусот r на кружницата ќе биде

$$r^2 = \overline{SA}^2 = (-3 - \frac{14}{9})^2 + (-2 - \frac{10}{9})^2 = \frac{2465}{81}.$$

Од $\overline{SB}^2 = r^2$ и $\overline{SC}^2 = r^2$, добиваме

$$(9b_1 - 14)^2 + (9b_2 - 10)^2 = 2465 \quad (2)$$

$$(9c_1 - 14)^2 + (9c_2 - 10)^2 = 2465 \quad (3)$$

Од (1), (2) и (3) добиваме

$$b_1 = 7, b_2 = 2, c_1 = -1, c_2 = 6 \text{ или } b_1 = -1, b_2 = 6, c_1 = 7, c_2 = 2.$$

Значи, $B(7, 2), C(-1, 6)$ или $B(-1, 6), C(7, 2)$.

3. Отсечките OA , OB и OC се заемно нормални и нивните должини се a , b и c соодветно. Да се докаже дека растојанието од точката O до рамнината ABC е

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Решение. Земајќи го триаголникот OAB за основа на пирамидата, за волуменот на пирамидата ќе имаме

$$V = \frac{abc}{3}.$$

Земајќи го пак триаголникот ABC за основа, ќе имаме

$$\frac{abc}{6} = \frac{P_{ABC} \cdot H}{3},$$

т.е.

$$H = \frac{abc}{2P_{ABC}}. \quad (1)$$

За плоштината P_{ABC} , според Хероновата формула, ќе имаме (x , y и z се страни-те на триаголникот ABC):

$$\begin{aligned}
 16P_{ABC}^2 &= 16s(s-x)(s-y)(s-z) \\
 &= 16 \frac{x+y+z}{2} \frac{y+z-x}{2} \frac{x+z-y}{2} \frac{x+y-z}{2} \\
 &= (x^2 + y^2 + 2xy - z^2)(z^2 - x^2 - y^2 + 2xy)
 \end{aligned}$$

Но, $x^2 = a^2 + b^2$, $y^2 = b^2 + c^2$, $z^2 = c^2 + a^2$, па:

$$\begin{aligned}
 16P_{ABC}^2 &= (2b^2 + 2xy)(2xy - 2b^2) = 4(b^4 - x^2y^2) \\
 &= 4[b^4 - (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)] = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)
 \end{aligned}$$

Значи,

$$P_{ABC}^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Заменувајќи во (1), добиваме:

$$H^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{-1},$$

од каде следува тврдењето на задачата.

4. Производот на бројот 21 со некој четицифрен број x е куб на некој цел број y . Да се најде бројот x .

Решение. Од условот на задачата имаме $21x = y^3$, од каде што следува дека 21 е делител на y , т.е. $y = 21z$. Заменувајќи во $21x = y^3$, добиваме $x = 441z^3$. Бројот x е четирицифрен, па z може да биде или 1 или 2, зашто за $z \geq 3$ имаме $x \geq 441 \cdot 27 = 11907$. За $z = 1$ имаме $x = 441$, а за $z = 2$ имаме $x = 3528$. Значи, $x = 3528$, и притоа $21x = 168^3$.