Даниел Велинов
Скопје

РЕШАВАЊЕ НА ПРОБЛЕМИ СО СТРАТЕГИЈА: НЕ ИГРАЈ ПО ПРАВИЛАТА

Овде ќе разгледаме многу моќна алатка за решавање на проблеми кои се поврзани со наоѓање или анализирање на дадени постапки. Во наредните неколку примери, ние ќе го промениме проблемот многу малку на тоја начин што решавањето на новиот проблем ни го дава резултатот кој треба да го добиеме, но новиот проблем кој го решаваме е поедноставен од првичниот. Со други зборови, ние ја упростуваме постапката за докажување или анализирање, а притоа главниот проблем останува непроменет. Понекогаш овој метод може да биде неразбирлив и да е потребно малку повеќе време за да учениците се научат да го применуваат.

Пример 1. Има n мравки на стап со должина 1, при секоја е завртена или на лево или на десно. Кога $t=0$ секоја мравка започнува дас е движи со брзина од 1 единица во секунда во насока на која е завртена. Ако мравката стигне до крајот на стапот, таа паѓа и не се појавува повторно. Кога две мравки кои се движат во спротивен правец ќе се судрат, тие се вртат во спротвина насока и продолжуваат да се движат со истата брзина, но во спротивна насока. Докажи дека сите мравки ќе паднат од стапот за најмногу една секунда.

Решение. Овде најважно е да забележиме дека овој проблем можеме да го замениме со следниов проблем, а притоа да не направиме суштинска промена на проблемот: кога две мравки кои се движат во спротивна насока се сретнат, тие едноствно поминуваат една преку друга и продолжуваат да се движат со иста брзина. Наместо мравките да се одбиваат една од друга, овде мравките се поминуваат една со друга, што всушност овде идентитетие на мравки се менуваат, што за решавање на проблемот е сосема неважно. Сега тврдењето е сосема очигледно, секоја од мравките не зависи од останатите мравки, па секоја од нив ќе падне од стапот со должина една единица за најмногу една секунда.

Пример 2. (Russia, 1993) Природните броеви од 1 до n се запишани на права во некој редослед. Следната операција се прави со правата: Ако првиот број е k тогаш првите k броеви се запишуваат во обратен редослед. Докажи дека посел конечен број на вакви операции, првиот број на правата ќе биде 1.

Решение. Почетниот случај $n=1$ е тривијален. Да претпоставиме дека твдрењето е точно за $(n-1)$. Да забележиме дека ако n се појавува на првата позиција во некоја ситуација, тогаш во следниот чекор n ќе биде на последната позиција и ќе остане таму потоа. Тогаш ние можеме да го игнорираме n па проблемот е готов со принципот на математичка индукција. Да претпоставиме дека n никогаш не се појавува на првата позиција. Нека j е број кој е на последната позиција. Ако ги замениме j и n, тоа нема да влијае на проблемот, бидејќи j никогаш нема да се појави на првата позиција (бидејќи претпоставивме дека n никогаш нема да се појави на првата позиција). Сега n е на последната позиција и како што имавме во претходниот случај, кога n беше на првата позиција, заклучокот следува од принципот на математичка индукција.

Пример 3. (IMO shortlist, 2011) Нека m е природен број и нека разгледаме квадратна шема која се состои од $m \times m$ единични полиња. Во средините на некои од овие единични полиња има мравка. Кога $t = 0$, секоја мравка почнува да се движи со брзина 1 паралелно на некој од рабовите ов квадратната шема. Кога две мравки се движат во спротивен правец и се судрат, тогаш и двете вртат $90°$ во правец на стрелките на часовникот и продолжуваат да се движат со брзина 1. Кога повеќе од ве мравки ќе се сретнат, или кога две мравки ќе се сретнат, а се движеле во правец нормален еден на друг, мравките продолжуваат по истите патеки по кои се движеле пред да се сретнат. Кога некој мравка ќе дојде до некој од краевите на квадратната шема, мравката паѓа и не се појавува повторно. Разгледувајќи ги сите можни стартни позиции, определи го последниот момент кога последната мравка ќе падне од квадратната шема или докажи дека таков момент не мора да постои.

Решение. Со прверка со мали вредности за m, можеме да видиме дека одговорот е $\frac{3m}{2} - 1$. Јасно ова може да се постигне ако на почетокот се две мравки, една поставена на долното лево поле која се движи нагоре и друга мравка поставена во горното десно поле која се движи надолу. Сега ќе докажеме дека тоа е максимумот. Нека U, D, L и R се насоките нагоре, надолу, лево и десно соодветно.

Чекор 1. Користиме модифицирана варијанта на Пример 1. Имајќи го во предвид решението на Пример 1, може да ги смениме правилата така да мравката патува во два правци или се движи нагоре и десно или се движи надолу или лево. Па, ако мравка патува на десно и се сретне со мравка која патува на лево, тогаш ти сега се движат нагоре или надолу соодветно (дури и во почетниот проблем тие би требало да се движат надолу и нагоре соодветно). Ова не влијае на проблемот. Сега имајќи ја предвид нивната почетна насока, секоја мравка може да се класифицира во некоја од следниве два типа: UR или DL. Мравките UR се движат преку целото време само нагоре и на десно, додека мравките DL се движат само надолу и на лево преку целото време. Да забележиме дека ние може да ги игнорираме судирите помеѓу две мравки од ист тип. Од сега натаму, под судири ќе подразбираме судири помеѓу две мравки од различни типови.

Чекор 2. Избираме координатен систем така да ќошевите на квадратната шема се $(0,0)$, $(m,0)$, (m,m), $(0,m)$. Во време t, ќе нема мравки од тип UR во областа

$$\{(x,y): x+y<t+1\}$$

и ќе нема мравки од тип DL во областа

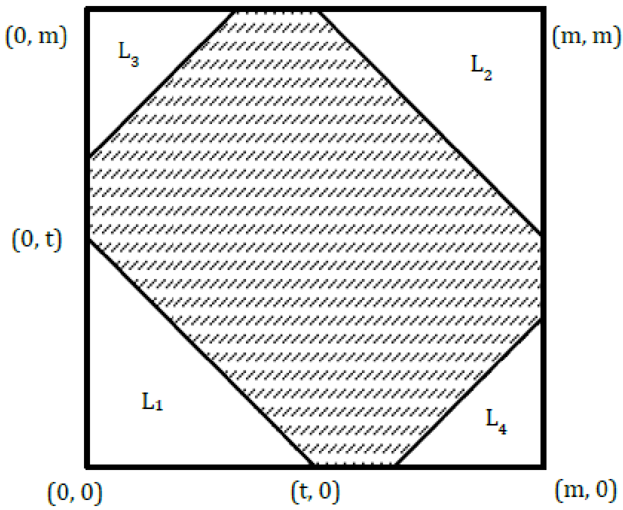
$$\{(x,y): x+y>2m-t-1\}.$$

Па, ако се случи судир во (x,y) во време t, тогаш имаме

$$t+1\le x+y\le 2m-t-1.$$

Чекор 3. На сличен начин можеме да ги смениме правилата на почетниот проблем (нормално без суштински да го промениме) со претпоставување дека секоја мравка може само да се движи U и L или само да се движи D и R, па секоја мравка е од тип UL или DR. Користејќи ја истата логика како во чекор 2, добиваме граница $|x-y|\le m-t-1$ за секој судир во време t и областа определена со равенките

$$t+1\le x+y\le 2m-t-1 \text{ и } |x-y|\le m-t-1.$$



Чекор 4. Го довршуваме доказот за мравки од тип UR (од причини на симетрија крајните ограничувања ќе важат и за мравките од тип DL). Нека разгледаме некоја мравка од тип UR и нека претпоставиме дека нејзиниот последен судир е во (x,y) во време t. Собирајќи ги ограничувањата $x+y\ge t+1$ и $x-y\ge -(m-t-)$, добиваме $x\ge t+1-\frac{m}{2}$. Слично, $y\ge t+1-\frac{m}{2}$. Бидејќи ова е последниот судир, мравката сега ќе продолжи да се движи право кон крајот на квадратната шема и ќе падне од неа. За ова да се случи потребни се најмногу $m-\min\{x,y\}$ единици време. Вкупното време додека мравката е на квадратната шема е најмногу

$$t+mm-\min\{x,y\}\le t+m-\{t+1-\tfrac{m}{2}\}=\tfrac{3m}{2}-1$$

единици време.

Забелешка. Нека да го погледнеме сега целото решени и да анализираме како главните идеи толку добро се испреплетени и тоа како параметарот t исчезна во последниот чекор. Основната идеја на горното решение беше да се добијат што помали ограничувања на местото на мравка после нејзиниот последен судир, бидејќи после тој судир мравката патува само право по квадратната шема (не го менува својот правец). Интуицијата која стои зад тоа да се ослободиме од параметарот t, колку повеќе мравката се движи наоколу после нејзиниот последен судир, толку поблиску би требало да биде до крајот на квадратната шема, па толку помалку време ќе и биде потребно да падне од квадратната шема. Но, за да сето ова вака едноставно функционира, моравме да го смениме првичниот проблем, односно да не играме по правилата на задачата, а притоа да не направиме суштинска промена на проблемот.

Користена литература

1. Andreescu, T. and Feng, Z., A Path to Combinatorics for Undergraduates. Birkhäuser, Basel, 2004;
2. Andreescu, T. and Feng, Z., 102 Combinatorial Problems. Birkhäuser, Boston, 2003;
3. Anderson, I., A First Course in Combinatorial Mathematics, 2nd edition. Oxford University Press, London, 1989;
4. J. Bang-Jensen, G. Gutin, A. Yeo, When the greedy algorithm fails, Discrete Optimization 1 (2004), 121-127;
5. Pablo Soberón, Problem-solving methods in Combinatorics, Springer Basel, 2013;
6. Pérez Seguí, M. L., Combinatoria, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2000;
7. Pranav A. Sriram, Olympiad Combinatorics, 2014;
8. Stanley, R. P., Enumerative Combinatorics, 2nd edition, Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 2011;
9. Riordan, J., Introduction to Combinatorial Analysis. Dover, Mineola, 2002.