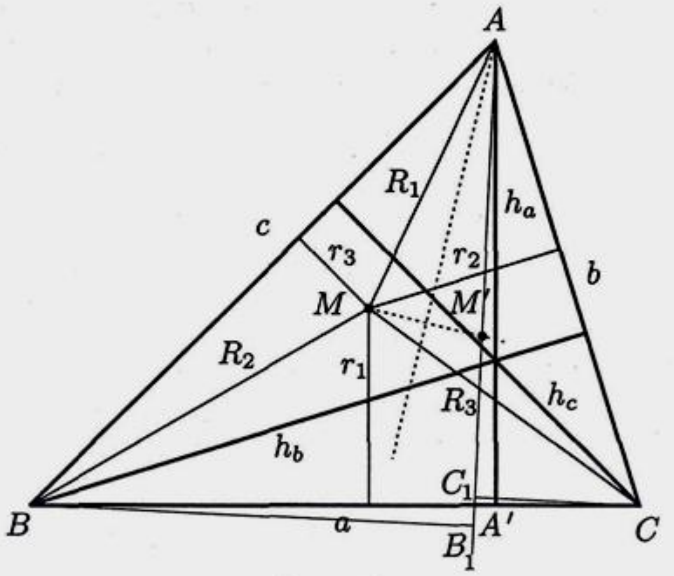
# Неке неједнакости у вези с троуглом

**др Шефкет Арсланагић, Сарајево**

Нека је $M$ произвољна тачка у троуглу $ABC$ чије су дужине страница $a$, $b$ и $c$, $P$ његова површина, а $R$ и $r$ полупречници описане и уписане кружнице тог троугла. Даље, нека су $R_1$, $R_2$ и $R_3$ одстојања тачке $M$ од врхова $A$, $B$ и $C$, а $r_1, r_2$ и $r_3$ одстојања тачке $M$ од страница $BC, CA$ и $AB$ троугла $ABC$. У овом чланку ћемо доказати следећих седам неједнакости:

$$aR_1 + bR_2 + cR_3 \geqslant 4P, \qquad (A)$$
$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2(r_1 + r_2 + r_3), \qquad (B)$$
$$R_1r_1 + R_2r_2 + R_3r_3 \geqslant 2(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1), \qquad (C)$$
$$(R_1 + R_2 + R_3)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) \geqslant 18, \qquad (D)$$
$$R_1R_2R_3 \geqslant (r_1 + r_2)(r_2 + r_3)(r_3 + r_1), \qquad (E)$$
$$R_1R_2R_3 \geqslant r_1r_2r_3, \qquad (F)$$
$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \geqslant 4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1). \qquad (G)$$

*Докази.*




Слика 1.

$(A)$ С обзиром да је тачка $M$ у троуглу $ABC$, имамо:

$$P = \frac{ar_1}{2} + \frac{br_2}{2} + \frac{cr_3}{2} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$$

односно $ar_1 + br_2 + cr_3 = ah_a = bh_b = ch_c$, и према томе:

$$a(h_a - r_1) = br_2 + cr_3, \quad b(h_b - r_2) = cr_3 + ar_1, \quad c(h_c - r_3) = ar_1 + br_2.$$

Из ових једнакости и из неједнакости (слика 1):

$$h_a \leqslant R_1 + r_1, \quad h_b \leqslant R_2 + r_2, \quad h_c \leqslant R_3 + r_3,$$

тј.

$$h_a - r_1 \leqslant R_1, \quad h_b - r_2 \leqslant R_2, \quad h_c - r_3 \leqslant R_3,$$

следи да је

$$(1) \qquad aR_1 \geqslant br_2 + cr_3, \quad bR_2 \geqslant cr_3 + ar_1, \quad cR_3 \geqslant ar_1 + br_2.$$

Сабирањем одговарајућих страна ових трију неједнакости, добијамо да је

$$aR_1 + bR_2 + cR_3 \geqslant 2(ar_1 + br_2 + cr_3),$$

односно због $P = \frac{ar_1}{2} + \frac{br_2}{2} + \frac{cr_3}{2}$:

$$aR_1 + bR_2 + cR_3 \geqslant 4P,$$

што је и требало доказати. Знак једнакости важиће само у случају када је $h_a = R_1 + r_1$, $h_b = R_2 + r_2, h_c = R_3 + r_3$, тј. у случају када је тачка $M$ ортоцентар троугла $ABC$.

($B$) Ако обележимо са $M'$ тачку симетричну тачки $M$ у односу на симетралу угла $\sphericalangle BAC = \alpha$, одстојање тачке $M'$ од правих $AB$ и $AC$ биће једнако је дужима $r_2$ и $r_3$. С обзиром да је тачка $M$ у троуглу $ABC$, тачка $M$ је у углу $BAC$, па је и тачка $M'$ у углу $BAC$. Стога права $AM'$ сече страницу $BC$ у некој тачки $A'$. Ако затим обележимо са $B_1$ и $C_1$ подножја нормала из тачака $B$ и $C$ на правој $AM'$, биће (слика 1) $\overline{BC} = \overline{BA'} + \overline{A'C} \geqslant \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$. Множењем обеју страна ове неједнакости са $R_1$, налазимо да је због $\overline{AM'} = R_1$:

$$\overline{BC} \cdot R_1 \geqslant \overline{BB_1} \cdot R_1 + \overline{CC_1} \cdot R_1 = 2P_{\triangle M'AB} + 2P_{\triangle M'AC}, \text{ тј. } aR_1 \geqslant cr_2 + br_3.$$

Из ове и аналогних неједнакости следи да је

$$R_1 \geqslant \frac{c}{a}r_2 + \frac{b}{a}r_3, \quad R_2 \geqslant \frac{a}{b}r_3 + \frac{c}{b}r_1, \quad R_3 \geqslant \frac{b}{c}r_1 + \frac{c}{a}r_2.$$

Сабирањем одговарајућих страна ових трију неједнакости налазимо да је

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) r_1 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) r_2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) r_3,$$

а одавде, због познате неједнакости $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geqslant 2$ за два позитивна броја $u$ и $v$, добијамо

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2(r_1 + r_2 + r_3),$$

што је требало доказати. Знак једнакости важи ако је троугао $ABC$ једнакостраничан, а тачка $M$ је његов центар (тежиште).

**Напомена 1.** Неједнакост ($B$) је у математици позната као Ердеш-Морделова неједнакост. Њу је поставио мађарски математичар Ердеш 1935. године у америчком часопису American Mathematical Monthly, а исте године је енглески математичар Мордел дао њен доказ, додуше доста сложен. У [1] се налазе четири разна доказа ове теореме.

($C$) У доказу неједнакости ($A$) добили смо неједнакости (1) из којих следи:

$$(*) \qquad R_1r_1 \geqslant \frac{b}{a}r_1r_2 + \frac{c}{a}r_1r_3, \quad R_2r_2 \geqslant \frac{c}{b}r_2r_3 + \frac{a}{b}r_1r_2, \quad R_3r_3 \geqslant \frac{a}{c}r_1r_3 + \frac{b}{c}r_2r_3.$$

Сабирањем одговарајућих страна ових неједнакости, налазимо да је

$$R_1r_1 + R_2r_2 + R_3r_3 \geqslant \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) r_1r_2 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) r_2r_3 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) r_1r_3,$$

а одавде, због већ коришћене неједнакости, и да је:

$$R_1r_1 + R_2r_2 + R_3r_3 \geqslant 2(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1),$$

што је требало доказати.

Знак једнакости ће важити само у случају када је троугао $ABC$ једнакостраничан, а тачка $M$ је његов центар (тежиште).

$(D)$ Користећи неједнакост између аритметичке и хармонијске средине три позитивна броја имамо:

$$r_1 + r_2 + r_3 \geqslant \frac{9}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}.$$

Сада из неједнакости $(B)$ и горње неједнакости добијамо:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2(r_1 + r_2 + r_3) \geqslant \frac{18}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}},$$

односно

$$(R_1 + R_2 + R_3)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) \geqslant 18,$$

што је требало доказати. Знак једнакости важи само у случају када је троугао $ABC$ једнакостраничан, а тачка $M$ је његов центар (тежиште).

$(E)$ Приликом доказивања неједнакости $(A)$ и $(B)$ имали смо да је $aR_1 \geqslant br_2 + cr_3$ и $aR_1 \geqslant br_3 + cr_2$. Сабирањем одговарајућих страна ових неједнакости, налазимо да је

$$2aR_1 \geqslant br_2 + cr_3 + br_3 + cr_2 = (b + c)(r_2 + r_3).$$

Истим поступком добијамо и неједнакости:

$$2bR_2 \geqslant (c + a)(r_3 + r_1) \text{ и } 2cR_3 \geqslant (a + b)(r_1 + r_2).$$

Множењем одговарајућих страна последњих трију неједнакости, налазимо да је:

$$8abcR_1R_2R_3 \geqslant (b + c)(c + a)(a + b)(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)(r_1 + r_2).$$

Међутим како је на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине два позитивна броја:

$$b + c \geqslant 2\sqrt{bc}, \quad c + a \geqslant 2\sqrt{ca}, \quad a + b \geqslant 2\sqrt{ab},$$

биће тим пре

$$8abcR_1R_2R_3 \geqslant 8\sqrt{bc}\sqrt{ca}\sqrt{ab}(r_2+r_3)(r_3+r_1)(r_1+r_2),$$

односно

$$abcR_1R_2R_3 \geqslant \sqrt{a^2b^2c^2}(r_2+r_3)(r_3+r_1)(r_1+r_2),$$

тј.

$$R_1R_2R_3 \geqslant (r_2+r_3)(r_3+r_1)(r_1+r_2),$$

што је требало доказати. Знак једнакости важи само у случају када је троугао $ABC$ једнакостраничан, а тачка $M$ је његов центар (тежиште).

**Напомена 2.** Доказује се да важи боља (јача) неједнакост од неједнакости $(E)$, а која гласи:

$$R_1R_2R_3 \geqslant \frac{R}{2r}(r_2+r_3)(r_3+r_1)(r_1+r_2),$$

јер је $\dfrac{R}{2r} \geqslant 1$, односно $R \geqslant 2r$ (позната Ојлерова неједнакост).

$(F)$ Приликом доказивања неједнакости $(A)$ доказали смо да важе неједнакости $(1)$, па множећи одговарајуће стране ових неједнакости, налазимо да је:

$$abcR_1R_2R_3 \geqslant (br_2+cr_3)(cr_3+ar_1)(ar_1+br_2).$$

Међутим, из неједнакости између аритметичке и геометријске средине позитивних бројева имамо

$$br_2+cr_3 \geqslant 2\sqrt{br_2cr_3},\ cr_3+ar_1 \geqslant 2\sqrt{cr_3ar_1},\ ar_1+br_2 \geqslant 2\sqrt{ar_1br_2},$$

а одавде након множења одговарајућих страна ових неједнакости, следи:

$$(br_2+cr_3)(cr_3+ar_1)(ar_1+br_2) \geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2r_1^2r_2^2r_3^2},$$

тј.

$$(br_2+cr_3)(cr_3+ar_1)(ar_1+br_2) \geqslant 8abcr_1r_2r_3.$$

Сада добијамо да је $abcR_1R_2R_3 \geqslant abcr_1r_2r_3$, односно $R_1R_2R_3 \geqslant 8r_1r_2r_3$, што је требало доказати. Знак једнакости важи само у случају када је троугао $ABC$ једнакостраничан, а тачка $M$ је његов центар (тежиште).

**Напомена 3.** Доказује се да важи боља (јача) неједнакост од неједнакости $(F)$, а која гласи:

$$R_1R_2R_3 \geqslant \frac{4R}{r}r_1r_2r_3$$

јер је $\dfrac{4R}{r} \geqslant 8$, односно $R \geqslant 2r$ (позната Ојлерова неједнакост).

$(G)$ Најпре ћемо доказати следећу неједнакост:

$$R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1 \geqslant 2(R_1r_2+R_2r_3+R_3r_1). \tag{2}$$

Ево доказа неједнакости (2). Ако обележимо са $A'$, $B'$, $C'$ тачке полуправих $MA$, $MB$, $MC$ такве да је

$$\overline{MA'} = \frac{1}{\overline{MA}}, \quad \overline{MB'} = \frac{1}{\overline{MB}}, \quad \overline{MC'} = \frac{1}{\overline{MC}},$$

биће те три тачке неколинеарне, а тачка $M$ у троуглу $ABC$. Ако затим обележимо са $R_1'$, $R_2'$, $R_3'$ одстојања тачке $M$ од тачака $A'$, $B'$, $C'$ и са $r_1'$, $r_2'$, $r_3'$ одстојање тачке $M'$ од правих $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, тада је према неједнакости $(B)$ (Ердеш-Морделовој неједнакости):

$$R_1' + R_2' + R_3' \geqslant 2(r_1' + r_2' + r_3'). \tag{3}$$

При томе је

$$R_1' = \frac{R_2R_3}{R_1R_2R_3}, \quad R_2' = \frac{R_3R_1}{R_1R_2R_3}, \quad R_3' = \frac{R_3R_1}{R_1R_2R_3}.$$

С обзиром да су троуглови $\triangle BMC$, $\triangle CMA$ и $\triangle AMB$ слични с троугловима $\triangle C'MB'$, $\triangle A'MC'$ и $\triangle B'MA'$ биће и

$$r_1' = \frac{R_1r_1}{R_1R_2R_3}, \quad r_2' = \frac{R_2r_2}{R_1R_2R_3}, \quad r_3' = \frac{R_3r_3}{R_1R_2R_3}.$$

Уврштавајући горње једнакости у неједнакост (3) добијамо неједнакост (2). Знак једнакости важи само у случају када је троугао $A'B'C'$ једнакостраничан, а тачка $M$ његов центар (тежиште), тј. када је троугао $ABC$ једнакостраничан, а тачка $M$ његов центар (тежиште). Сада из неједнакости $(C)$ и (2) следи непосредно и неједнакост $(G)$, са једнакошћу само у случају када је троугао $ABC$ једнакостраничан, а тачка $M$ његов центар (тежиште).

**Напомена 4.** Доказује се да важи боља (јача) неједнакост од неједнакости $(G)$, а која гласи:

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \geqslant \frac{4R}{r}(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1).$$

## Литература


[1] Арсланагиц, С., *Математика за надарене*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Bottema, O. and others, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[3] Kazarinoff, N.D., *Geometric Inequalities*, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, Yale University, Washington, 1961.

[4] Лопандић, Д., *Збирка задатака из основа геометрије*, Природно-математички факултет, Београд, 1971.

[5] Палман, Д., *Трокут и кружница*, Element, Zagreb, 1994.

[6] Sharygin, I.F., *Проблемс ин Плане Геометрй*, Mir Publishers, Moscow, 1988.

Извињавамо се читаоцима Тангенте и аутору чланка „*Неке неједнакости у вези са троуглом*“, др Шефкету Арсланагићу, због грешака које су начињене у прошлом броју.

На страни 8 у последњем реду треба да стоји неједнакост:

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \geqslant 2\left(R_1r_1 + R_2r_2 + R_3r_3\right). \tag{2}$$

На страни 9 у **напомени 4** треба да стоји неједнакост

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \geqslant \frac{2R}{r}\left(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1\right)$$

и коментар: јер је $\frac{2R}{r} \geqslant 4$, односно $R \geqslant 2r$ према познатој Ојлеровој неједнакости.

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година**