ЈЕДАН ЗАДАТАК О РАСПОРЕДУ ТАЧАКА

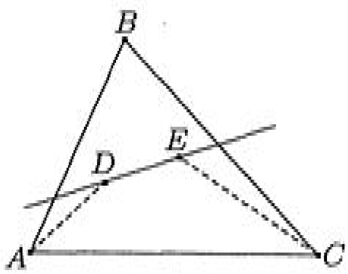
***Синиша Гавриловић*, Шабац**

Ердеш и Секереш су 1935. решавали следећи проблем о распореду тачака:

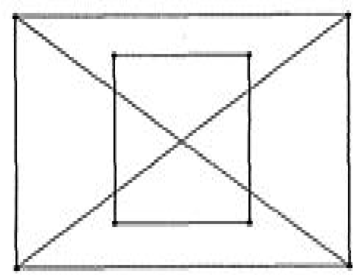
За сваки природан број n, $n \geqslant 3$, одредити најмањи природан број $N(n)$ такав да за било којих $N(n)$ тачака у равни, међу којима не постоје три колинеарне, постоји n тачака које су темена конвексног n-тоугла.

Проблем је иницирала Естер Клајн, која је закључила да било какав распоред 5 тачака садржи 4 тачке које представљају темена конвексног четвороугла. Упркос његовом елементарном карактеру и покушају многих математичара, проблем Ердеша и Секереша је решен само за n једнако 3, 4 и 5.

Јасно је, да за $N(n) \geqslant 3$, можемо наћи троугао са теменима у трима од датих $N(n)$ тачака. Да ли увек за $N(n) > 3$ можемо наћи конвексни четвороугао са теменима у тим тачкама? Ако је $N(n) = 4$, а тачке су темена неконексног четвороугла, то није могуће. Ако је пак $N(n) \geqslant 5$, онда је при сваком распореду тачака могуће наћи конвексни четвороугао. Заиста, ако је конвексни омотач нашег скупа k-тоугао, где је $k > 3$, у било ком поретку свака четири темена тог k-тоугла су темена траженог четвороугла. Ако је $k = 3$, конвексни омотач је троугао ABC. Нађимо тада две тачке D и E које припадају унутрашњости тог троугла (слика 1). Права $p(D, E)$ не пролази кроз темена троугла ABC. Зато се два темена тог троугла (рецимо A и C) налазе са исте стране праве $p(D, E)$. Дакле, $ACED$ је конвексан четвороугао. Према томе, довољно је да $N(n)$ буде веће од 4.



Слика 1.



Слика 2.

Какво треба да буде $N(n)$ да би било могуће издвојити конвексан петоугао? Одговор на ово питање је наш циљ. Приметимо да $N(n)$ мора бити веће од 8, што се види са слике 2. Зато, ако докажемо да скуп тачака од којих никоје три нису колинеарне и никојих пет од њих нису темена конвексног петоугла садржи највише 8 тачака, онда ће проблем у потпуности бити решен. Нека је $\mathscr{N}$ такав скуп тачака. Означимо са $\mathscr{K}$ скуп темена његовог конвексног омотача, са $\mathscr{L}$ скуп темена конвексног омотача скупа $\mathscr{N} \setminus \mathscr{K}$ (то је скуп који се добија уклањањем из $\mathscr{N}$ његовог подскупа $\mathscr{K}$), а са $\mathscr{M}$ скуп $(\mathscr{N} \setminus \mathscr{K}) \setminus \mathscr{L}$.

Размотримо следеће могућности:

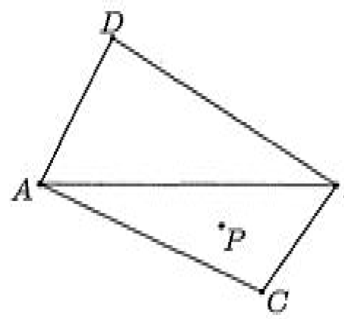
(1) скуп $\mathscr{M}$ је празан;

(2) скуп $\mathscr{M}$ садржи само једну тачку;

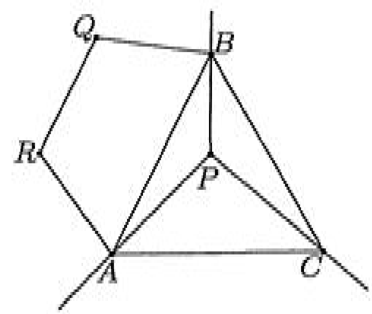
(3) скуп $\mathscr{M}$ садржи не мање од две тачке.

(1) Скуп $\mathscr{M}$ је празан. Тада $\mathscr{N}$ садржи само темена многоуглова $\mathscr{K}$ или $\mathscr{L}$, тј. највише 8 тачака, јер су многоуглови $\mathscr{K}$ и $\mathscr{L}$ или троуглови или четвороуглови.

(2) Скуп $\mathscr{M}$ садржи само једну тачку. Означимо ту тачку са P. Ако је $\mathscr{L}$ четвороугао, конструисањем једне његове дијагонале делимо га на два троугла. Тачка P лежи у унутрашњости једног од њих (слика 3). Означимо темена тог троугла словима A, B, C. Ако је пак $\mathscr{L}$ троугао, означимо његова темена са A, B, C. Тачка P лежи у унутрашњости тог троугла. У сваком случају, међу теменима многоугла $\mathscr{L}$ наћи ћемо три темена A, B, C таква да P буде унутар $\triangle ABC$. Конструишимо кроз P праве $p(P, A), p(P, B), p(P, C)$. Оне деле раван на три угла: $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$, $\sphericalangle CPA$. Лако је видети да сваки од тих углова садржи највише једно теме многоугла $\mathscr{K}$. Заиста, ако на пример $\sphericalangle APB$ садржи два темена многоугла $\mathscr{K}$, онда значи да садржи неку страницу QR многоугла $\mathscr{K}$. Тада су тачке A, P, B, Q, R темена конвексног петоугла (слика 4), што је немогуће.



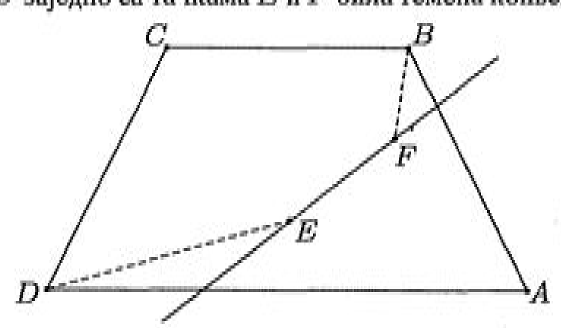
Слика 3.



Слика 4.

Зато $\mathscr{K}$ има највише три темена, по једно у сваком од посматраних углова. Пошто $\mathscr{L}$ има највише четири темена, а $\mathscr{M}$ по претпоставци има само једну тачку P, скуп $\mathscr{N}$ садржи највише 8 тачака.

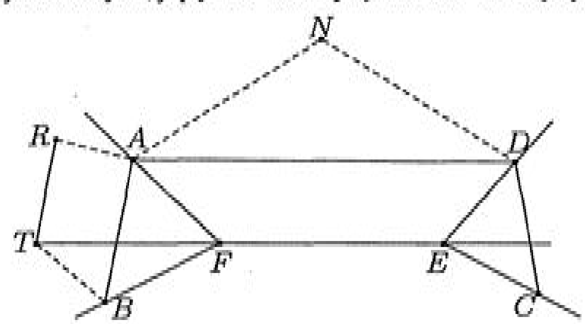
(3) Скуп $\mathscr{M}$ садржи не мање од две тачке. Означимо са E и F било које две тачке скупа $\mathscr{M}$. Претпоставимо најпре да је $\mathscr{L}$ четвороугао. Права $p(E, F)$ не пролази кроз темена многоугла $\mathscr{L}$ и сече две његове странице. Ако би $p(E, F)$ секла две суседне странице четвороугла $\mathscr{L}$, на пример странице AB и AD (слика 5), тада би три преостала три темена B, C, D четвороугла $\mathscr{L}$ заједно са тачкама E и F била темена конвексног петоугла.



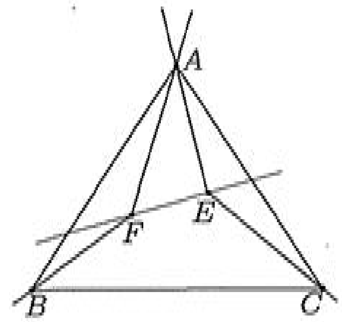
Слика 5.

Према томе, $p(E, F)$ сече две наспрамне странице четвороугла $\mathscr{L}$. Нека, на пример, полуправа $pp(E, F)$ сече страницу AB, а полуправа $pp(F, E)$ сече страницу CD (слика 6). Конструишимо полуправе $pp(F, A)$, $pp(F, B)$, $pp(E, C)$ и $pp(E, D)$. Заједно са дужи EF

оне деле раван на четири дела. Ако би у унутрашњости $\sphericalangle AFB$ (један од та четири дела) лежала два темена многоугла $\mathscr{K}$, а то значи и нека страница TR многоугла $\mathscr{K}$, онда би тачке A, F, B, T, R биле темена конвексног петоугла (слика 6). Дакле, у унутрашњости $\sphericalangle AFB$ лежи највише једно теме многоугла $\mathscr{K}$. Исто тако, у унутрашњости $\sphericalangle CED$ лежи највише једно теме многоугла $\mathscr{K}$. У преостала два дела уопште не могу лежати темена многоугла $\mathscr{K}$, јер би то теме заједно са A, F, E, D, односно са B, F, E, C образовало конвексан петоугао (слика 6). Дакле, $\mathscr{K}$ има највише два темена (по једно у унутрашњости $\sphericalangle AFB$ и $\sphericalangle CED$), што је немогуће, јер је $\mathscr{K}$ или троугао или четвороугао.



Слика 6.



Слика 7.

Претпоставимо, на крају, да је $\mathscr{L}$ троугао. Са једне стране праве $p(E,F)$ налази се једно теме тог троугла. Нека, на пример, полуправа $pp(E,F)$ сече страницу AB, а полуправа $pp(F,E)$ страницу AC (слика 7).

Аналогно претходном закључујемо да се у $\sphericalangle AEC$ и $\sphericalangle AFB$ налази по једно теме троугла $\mathscr{K}$, као и да део равни ограничен полуправама $pp(E,C)$, $pp(F,B)$ и дужи EF не садржи ни једно теме многоугла $\mathscr{K}$. K.

Према томе, претпоставка да $\mathscr{M}$ садржи не мање од две тачке нас доводи до контрадикције. Ако је пак скуп $\mathscr{M}$ празан или једночлан, тада скуп $\mathscr{N}$ има највише 8 тачака. Тиме је доказ завршен.

* * *

Аутор овом приликом жели да се захвали проф. др Ратку Тошићу на несебичној помоћи приликом избора теме и реализације овог чланка.

Литература

[1] Р. Тошић, *Конвексне геометријске фигуре*, Триангле, **4**, (2001), 16–26, УМ БиХ, Сарајево.

[2] О. Бодрожа-Пантић, *Комбинаторна геометрија*, скрипта са предавања, ПМФ, Нови Сад, 1998.

[3] В.В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, часть **1**, Наука, Москва, 1991.

[4] В.В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, часть **2**, Наука, Москва, 1991.

[5] В.Г. Бољтански, И.Ц. Гохберг, *Теореме и задаци комбинаторне геометрије*, Наука, Москва, 1965.

[6] Г.А. Тонојан, Часопис Квант, **11**, (1975), 26–28, УМ ССР, Москва.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2011/12 година