Платон Димић (Београд)

ПАСКАЛОВ ТРОУГАО

При решавању математичких проблема више пута је потребно знати колико износе не само други и трећи степен бинома $a+b$, него и неки од виших степена овог бинома.

То се може постићи путем једноставног множења, овако:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

(1) $$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

. . . .

Међутим, овај начин добијања резултата, кад су у питању виши степени бинома, веома је заобилазан, па се због тога ишло за тим да се нађе неко правило према којем би се полином степена $(a+b)^n$, $n\in N$ могао увек добити непосредно. При томе је, кад су у питању формуле (1), уочено следеће.

1. Како је нулти степен сваког броја који није нула — по договору — један, а први степен сваког броја сам тај број, то се формуле (1) могу допунити и, тако допуњене, написати овако:

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=1\,ab^0+1\,a^0b$$

(2) $$(a+b)^2=1\,a^2b^0+2\,a^1b^1+a^0b^2$$

$$(a+b)^3=1\,a^3b^0+3\,a^2b^1+3\,a^1b^2+a^0b^3$$

$$(a+b)^4=1\,a^4b^0+4\,a^3b^1+6\,a^2b^2+4\,a^1b^3+1\,a^0b^4$$

. . . .

2. На десним странама ових формула налазе се полиноми чији су чланови облика ka^pb^q, тј. производи једног коефицијента и извесних степена сабирака a и b, а њихов број је увек за један већи од изложиоца датог степена бинома.

3. Што се тиче коефицијента монома на десним странама формула (2) они, написани једни испод других, дају за $n=0,1,2,3$ и 4 следећу таблицу:

(3)
$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

С обзиром на ово, у погледу коефицијената примећује се следеће.

а) Коефицијенти првог и последњег сабирка су 1 (па се због тога обично и не пишу).

б) Коефицијенти осталих сабирака добијају се, редом ,сабирањем по два коефицијента из претходног реда написане талбице, и то увек оног који у претходном реду стоји изнад коефицијента који се тражи и оног који му претходи.

4. Код монома који се јављају на десним странама формула (2) изложиоци броја a постепено опадају, почињући од изложиоца бинома n па до 0, а изложиоци броја b постепено расту од 0 па до n, тако да је њихов збир у сваком сабирку једнак изложиоцу бинома n.

Према томе, ако би се према уоченим правилностима хтело да се напише полином за $(a+b)$, требало би таблицу (3) продужити још за један ред, тачније додати јој за $n=5$ ред

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

па би се онда могла написати формула

$$(a+b)^5=1a^5 b^0+5a^4 b^1+10 a^3 b^2+10 a^2 b^3+5 a^1 b^4+1a^0 b^5$$

или одмах, коначно

$$(a+b)^5=a^5+5a^4 b+10a^3 b^2+10a^3 b^2+5a^2 b^3+5ab^4+b^5.$$

Али то што уочена правилност важи у неколико случајева, још није доказ да она важи уопште; па чак и кад би се утврдило да она важи и за још много више случајева, не би то био доказ да она важи увек, тј. и кад је у степену $(a+b)^n$ изложилац n било који број. Зато се на овом питању морамо посебно задржати, тим пре што су читаоци овог листа ученици основне школе.

Да би се доказала уочена правилност за свако n, треба пре свега знати како се множе степени једнаких основа, тј. да је

$$a^p \cdot a^p=a^{p+q}$$

за било које целе бројеве p и q и $a \neq 0$. Тако је, на пример

$$a^{n-3} \cdot a = a^{n-2}, \text{ јer јe } a=a^1 \text{ i } (n-3)+1=n-2;$$

$$b^{n-1} \cdot b = b^n, \text{ јer јe } b=b^1 \text{ i } (n-1)+1=n.$$

Затим претпоставимо да је бар за неко n утврђено да важи формула

$$(a+b)^n = k_0 a^n b^0 + k_1 a^{n-1} b^1 + k_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + k_{n-2} a^2 b^{n-2} + \\ + k_{n-1} a^1 b^{n-1} + k_n a^0 b^n,$$

где су $k_0, k_1, k_2, \ldots k_{n-2}, k_{n-1}, k_n$ извсени коефицијенти, (што смо, у ствари, већ и утврдили, путем множења, кад је $n=$ $=0, 1, 2, 3$ и 4).

Тада је

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = (k_0 a^n b^0 + k_1 a^{n-1} b^1 + k_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + \\ + k_{n-2} a^2 b^{n-2} + k_{n-1} a^1 b^{n-1} + k_n a^0 b^n)(a+b) = k_0 a^{n+1} b^0 + k_1 a^n b^1 + \\ + k_2 a^{n-1} b^2 + \cdots + k_{n-2} a^3 b^{n-2} + k_{n-1} a^2 b^{n-1} + k_n a^1 b^n + k_0 a^n b^1 + \\ + k_2 a^{n-1} b^2 + k_2 a^{n-2} b^3 + \cdots + k_{n-2} a^2 b^{n-1} + k_{n-1} a^1 b^n + k_n a^0 b^{n+1}$$

Када се десна страна последње једнакости сведе, добија се

$$(a+b)^{n+1} = k_0 a^{n+1} b^0 + (k_1 + k_0) a^n b^1 + (k_2 + k_1) a^{n-1} b^2 + \cdots + \\ + (k_{n-1} + k_{n-2}) a^2 b^{n-1} + (k_n + k_{n-1}) a^1 b^n + k_n a^0 b^{n+1}$$

односно једноставније написано

$$(a+b)^{n+1} = k_0 a^{n+1} + (k_1 + k_0) a^n b + (k_2 + k_1) a^{n-1} b^2 + \cdots + \\ + (k_{n-1} + k_{n-2}) a^2 b^{n-1} + (k_n + k_{n-1}) ab^n + k_n b^{n+1}$$

Али шта се примећује код ове формуле? Примећује се да она иста законитост која се могла пуочити при формирању полинома степена $(a+b)^2$ на основу полинома степена $(a+b)^1$, односно при формирању полинома степена $(a+b)^3$ на основу полинома степена $(a+b)^2$, итд., важи уопште, и онда кад се формира полином било ког степена бинома $a+b$ на основу полинома степена који је од њега за 1 мањи; да су, наиме, и у овом случају коефицијенти првог и последњег сабирка у добијеној формули једнаки првом, односно последњем коефицијенту сабирка у претходној формули; да су коефицијенти осталих чланова збирови коефицијената од по два одговарајућа члана претходног полинома, итд. . А то значи да и онда када је у питању било који степен бинома $a+b$, његов полином наснастаје из полинома претходног степена као и кад су у питању степени за које смо већ утврдили извесну правилност, те да зато можемо и нађену таблицу (6) произвољно продужити.

Таблица (6), с обзиром да има облик троугла, зове се Паскалов троугао, према имену чувеног француског математичара (Blaise Pascal) који је рођен 1623. г. а умро 1662. г. и који је први начинио ову таблицу.

Задаци

1. Израчунајте полиноме следећих степена: а) $(2x+y)^3$; б) $(m-n^3)^4$. в) $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3b}{4a}\right)^3$; г) $\left(n-\frac{1}{n}\right)^6$;

2. Одредите непосредно колико износи: а) пети члан полинома степена $(2x+y^2)^5$; б) осми члан полинома степена $(3a-2)^7$.

3. Користећи се биномном формулом израчунајте колико износи: а) $1{,}03^5$; б) $0{,}998^4$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија