МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 39

Ристо Малчески
Самоил Малчески
Марија Попоска

ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД VI – IX ОДДЕЛЕНИЕ

Скопје, 2023

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка од 223 тесктуални задачи, повеќето од кои се задавани на математички натпревари во основното образование и тоа на белоруските, босанско-херцеговачките, италијанските, македонските, московските, новозеландските, српските, хрватските, холандските, украинските и швајцарските натпревари. Задачите се на ниво на задачите кои се задаваат на регионалните и националните натпревари за учениците од шесто до деветто оделение во деветгодишното основно образование, односно на петто до осмо одделение во осумгодишното основно образование, па затоа оваа мала збирка задачи првенствено може да послужи за подготовка на учениците токму за ваквиот вид напревари. Ваквата содржина на збирката е предродредена од фактот дека на националните олимпијади и на меѓународните математички натпревари скоро и да не се задаваат класични текстуални задачи, кои се во голема мера присутни на математичките натпревари од понизок ранг. Самата збирка не содржи теориски резултати, бидејќи за таа намена се доволни статиите и книгите кои се наведени во литературата на крајот од оваа книга.

Задачите во оваа збирка се поделени во осум глави и тоа:

1. Воведни задачи
2. Броеви и цифри
3. Времето е важно
4. Задачи со мерни броеви
5. Задачи со движење
6. Пресметуваме пари и купуваме
7. Задачи со работа
8. Дополнителни задачи

Повеќето од задачите се детално решени, а само мал број задачи се со кратки решенија, кои се доволни за да се следи идејата на решението. Затоа, на читателот му препорачуваме сите решенија детално да ги испише. Освен тоа, сакаме да напоменеме дека и покрај вложениот напор

задачите не се идеално подредени според тежината на истите, бидејќи за ваков вид задачи тоа практично и не е можно целосно да се направи.

Сметаме дека читателот треба прво самостојно да се обиде да ја реши секоја задача, а потоа да провери дали неговото решение се совпаѓа со понуденото решение, или пак ако не успеал сам да ја реши задачата, да го проучи понуденото решение. Имено, дел од подготовките за натпреварите треба да се одвива токму на самостојно откривање на решенијата на задачите кои претходно биле задавани на различни натпревари, почнувајќи од регионално ниво, па се до Јуниорската балканска математичка олимпијада, која покрај Европскиот математички куп (јуниори), Турнирот на градови (основна и напредна варијанта за 8 и 9 одделение) и Иранската геометриска олимпијада (елементарно ниво), кои моментално се показател за нивото кое треба да го достигнат учениците на возраст до 15,5 години.

Во оваа пригода сакаме да му се заблагодараме на рецензентот д-р Методи Главче чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надеваме дека оваа мала збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците како регионалните така и за државните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што рековме, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидеме благодарнни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторите
септември, 2023 г.

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Едно село има седум куќи. Во секоја куќа има по седум мачки. На секоја мачка има по седум глувци, а за секој глушец има по седум зрна пченица. Секое зрно дава седум мерици жито. Колку во ова село вкупно има куќи, мачки, глувци, зрна пченица и колку мерици жито може да се добијат?

2. Матео треба да направи четири теста. На првите три теста тој просечно освоил по 88 поени. Колку поени треба да освои на четвртиот тест, за да на сите четири теста просечно освои 100 поени.

3. Една фудбалска екипа одиграла 13 натпревари и освоила 29 бодови. Притоа бројот на нерешените натпревари кои ги одиграла бил еднаков на бројот на поразите. Во колку натпревари победила оваа екипа? (Во фудбалот за победа се добиваат 3 бода, за пораз не се добиваат бодови, а при нерешен резултат секоја екипа добива по 1 бод.)

4. Пред да го скрие вошебното стапче Хари Потер им заповедал на своите 36 ученици да ги затворат очите. Тогаш сите момчиња и една четвртина од девојчињата го затвориле десното око, а сите девојчиња и една четвртина од момчињата го затвориле левото око. Колку ученици виделе каде Хари Потер го скрил волшебното стапче?

5. Во една паралелка учат помалку од 30 ученици и $\frac{5}{8}$ од нив се момчиња. Ако $\frac{2}{3}$ од учениците сакаат да пливаат, колку девојчиња има во паралелката.

6. Предниот запчаник на еден велосипед има 21 запци, а задниот има 12 запци. Колку пати ќе се заврти задниот запчаник, додека предниот запчаник се заврти 16 пати?

7. Огнен правел два теста. На вториот тест тој добил 90 поени и резултатот од вториот тест бил 20% подобар од резултатот од првиот тест.

Колку поени Огнен повеќе освоил на вториот тест?

8. Бојан и Борко купиле бомбони и си ги поделиле во однос $5:1$. Борко изел една бонбона, а Бојан изел 13 бомбони и им останале еднаков број бомбони. Колку бомбони купиле Бојан и Борки?

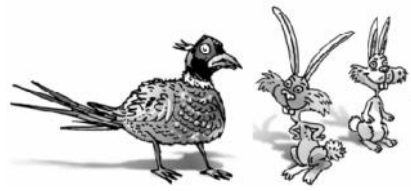
9. Матео во две кошници има 90 јаболки. Тој од едната кошница зел $\frac{1}{4}$ од јаболките и ги преместил во другата кошница, по што во двете кошници имал еднаков број јаболки. По колку јаболки имало на почетокот во секоја кошница?

10. Во една кутија чоколади секоја чоколада е или само со бадем, или само со брусница, или само со кикиритки или само со лешник. Притоа $\frac{1}{5}$ од вкупниот број чоколади се само со бадем, 30% се само со брусница и 20% се само со кикиритки. Колку чоколади има во кутијата, ако девет од чоколадите во кутијата се само со лешник?

11. Пабло добил кутија со бомбони. Првиот ден изел четвртина од бомбоните, а вториот ден изел четвртина од остатокот. Колку бомбони имало на почетокот во кутијата, ако на крајот на вториот ден останале 9 бомбони?

12. Три вида жетони: бели, црни и црвени, се наредени во една низа. Прво биле ставени белите жетони во една низа, потоа меѓу секои два бели жетони е ставен по еден црн жетон, На крајот меѓу секои два жетони во низата е ставен по еден црвен жетон. Определи го бројот на белите жетони, ако во низата биле ставени вкупно 397 жетони.

13. Во дворот на дедо Марко има зајаци и фазани, кои заедно имаат 35 глави и 94 нозе. Колку фазани и колку зајаци има во дворот на дедо Марко.



14. На тестот по Природни науки поставени се 35 прашања. За секое прашање се понудени четири одговори, од кои само еден е точен. Одговорите треба да се заокружат. За секој точен одговор се добива

по 5 поени, за неточен одговор се одземаат 2 поени, а за неодговорено прашање се одзема 1 поен. Ана, Марија, Марко, Иво и Петар тврдат дека освоиле 153, 167, 149, 169 и 173 поени соодветно. Кој од нив ја зборува вистината?

15. Третина од лалињата и ги дадов на Шана, петтина на Вишна, шестина доби Соња, а четвртина Дана. Преостанатите шест цветови и ги дадов на мајками. Колку вкупно лалиња имав?

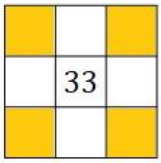
16. Ана отпила $\frac{1}{6}$ од филџан полн со црно кафе и го дополнила со млеко. Потоа отпила $\frac{1}{3}$ од филџанот и го дополнила со млеко. Сега отпила $\frac{1}{2}$ од филџанот и го дополнила со млеко, по што го испила целиот филџан. Што испила повеќе Ана, млеко или кафе?

17. Двајца браќа наследиле куќа и стан. Вредноста на куќата е четири пати поголема од вредноста на станот, а браќата сакаат наследството да го поделат на еднакви делови. Ако на едниот од нив му припадне целиот стан, во кој однос треба да ја поделат куќата?

2. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Определи ја разликата на најмалиот непарен четирицифрен број чиј збир на цифри е 4 и најголемиот парен трицифрен број чиј производ на цифри е 16.

2. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десно е запишан по еден од броевите 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 и 99. Збировите на трите броја в о полињата во секој ред, односно во секоја колона се меѓусебно еднакви. Во централното поле е запишан бројот 33. Колку е збирот на броевите во четирите обоени полиња?



3. Збирот на десет последователни броја е 315. Определи го најмалиот и најголемиот од овие броеви.

4. Збирот на 1259 последователни цели броеви е еднаков на 1259. Определи го најголемиот собирок.

5. Ана ги запишала сите броеви деливи со 2 од 2 до 2022, еден по друг без растојание меѓу броевите. Која цифра се наоѓа на 2021-вото место?

6. Ако некој број се подели со друг број, се добива количник 2 и остаток 5. Ако збирот на тие броеви се подели со нивната разлика, се добива количник 2 и остаток 7. Определи го збирот на овие броеви.

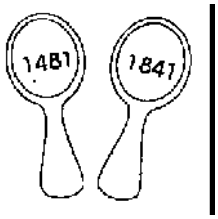
7. Дадени се четири природни броеви. Со пресметување на сите можни ненегативни разлики на дадените броеви добиваме 0, 2, 3 и 5. Определи ги овие броеви ако е познато дека збирот на двата поголеми броја е три пати поголем од збирот на двата помали броја.

8. Филип запишал неколку различни природни броеви чиј збир е еднаков на 100, при што користел само две различни цифри. Колку броеви најмногу можел да запише Филип?

9. Определи ги сите двоцифрени броеви, кои собрани со бројот 36 се запишуваат со истите цифри, но во обратен редослед?

10. Андреј замислил четирицифрен број. Горјан на тој број му ја избришал цифрата на единиците и кога трицифрениот број, кој го добил, го помножил со избришаната цифра го добил бројот 2020. Кој број го замислил Андреј?

11. Да го рзгледаме бројот 1481. Бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е 1841. За два такви броја, ако се различни, ќе велиме дека се огледални. Збирот на два огледални броја е 176. Кои се тие броеви?



12. Определи ги двоцифрените огледални броеви чија разлика е еднаква на збирот на нивните цифри.

13. Определи го најмалиот број запишан со различни цифри, кој е за 396 поголем од својот огледален број.

14. Збирот на двоцифрен и трицифрен број е 177. Збирот на нивните огледални броеви е 483. Кои се тие броеви?

15. Збирот на двоцифрен и четирицифрен број е 2750. Збирот на нивните огледални броеви е 8888. Кои се тие броеви?

16. Збирот на трицифрен и четирицифрен број е 1576. Збирот на нивните огледални броеви е 4375. Кои се тие броеви?

17. Определи ги два огледални броја чиј производ е 65125.

18. Кој четирицифрен број помножен со 4 го дава својот огледален број.

19. Галена требало на својот комјутер да отчука трицифрен број. При чукањето пред тој број по грешка ја отчукала цифрата 6 и така добила 31 пати поголем број. Кој трицифрен број требало да го отчука Галена?

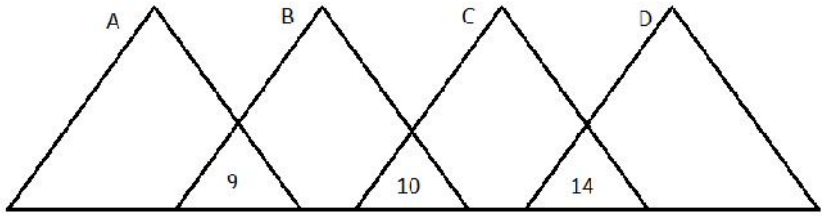
20. При собирање на два броја Илија згрешил, така што на крајот на едниот број ја допишал цифрата 6 и добил збир 6645, наместо 2004. Кои се тие броеви?

21. Ако на еден трицифрен број му избришеме една цифра, добиваме двоцифрен број кој е шест пати помал од почетниот трицифрен број. Определи ги броевите со ова својство.

22. На таблата е запишан трицифрен број. Од него се добиени три двоцифрени броја, така што прво е пречкртана првата цифра, потоа од почетниот број е пречкртана втората цифра и на крајот од почетниот број е пречкртана третата цифра. Збирот на така добиените броеви е еднаков на 293. Определи го почетниот трицифрен број.

23. Определи го најмалиот повеќецифрен број кој започнува со цифрата 1 и е таков што ако цифрата 1 ја преместиме по цифрата на единиците, добиваме број кој е трипати поголем од почетниот број.

24. На секој од триаголниците A, B, C, D му е приружен по еден природен број од 1 до 9. Придружените броеви се меѓусебно различни. Збировите на броевите доделени на одделните триаголници се запишани во нивните пресеци. Определи ги броевите A, B, C, D.



25. Филип замислил пет броја и ги пресметал збирот на секои два од овие броеви. Така вкупно добил 10 збира, меѓу кои најмалите се 32, 36 и 37, а најголемите се 48 и 51. Определи го најголемиот број кој го замислил Филип.

26. Бројот a е за 10% поголем од бројот $b = \underbrace{77...77}_{m}0$, но збирот на цифрите на a е за 20% помал од збирот на цифрите на b. Определи го m.

27. Определи ги сите трицифрени броеви кои се 5 пати поголеми од производот на своите цифри.

28. Од сите трицифрени броеви определи го бројот кој поделен со збирот на своите цифри дава најголем можен природен број.

29. Збирот на неколку последователни природни броеви е трицифрен број кој е запишан со исти цифри. Колку природни броеви се собрани?

30. Цифрата на единиците на еден шестцифрен број е 7. Ако таа цифра ја преместиме на прво место, ќе добиеме шестцифрен број, кој е пет пати поголем од дадениот. Кој е тој број?

31. Определи ги сите седумцифрени броеви кои стануваат 46 пати помали кога ќе им се избрише првата цифра од лево.

32. Збирот на шеснаесет последователни броеви меѓу кои е и бројот n, е петнаесет пати поголем од бројот n. Определи за кои броеви n е ова можно.

33. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што
$$4 \cdot \overline{abcd} + 30 = \overline{dcba}.$$

34. Кој број треба да се одземе од броителот и од именителот на дропката $\frac{1}{2012}$ за да се добие дропката $\frac{1}{2013}$?

35. Дадени се дропките $\frac{43}{337}$ и $\frac{6}{47}$. Кој број треба да се одземе и од броителот и од именителот на помалата дропка за да се добие дропка која е еднаква на поголемата дропка?

36. Збирот на два броја и нивниот збир е $\frac{40}{21}$. Определи ги собирците ако апсолутната вреност на едниот собирок е четири пати поголема од апсолутната вредност на другиот собирок.

37. Броителите на три позитивни дропки се однесуваат како $1:2:8$, а именителите како $1:3:11$. Збирот на трите дропки е $\frac{79}{88}$. Определи ги

овие дропки.

38. Разликата на два рационални броја е $-371{,}52$. Ако на намаленикот му се помести децималната запирка за едно место лево се добива намалителот. Определи ги овие броеви.

39. Три броја се однесуваат како $1{,}5 : 0{,}625 : \frac{7}{12}$. Определи ги овие броеви ако првиот број е за 21 поголем од збирот на другите два броја.

40. Ако на некој трицифрен природен број запишан со различни цифри му го додадеме бројот запишан со истите цифри во обратен редослед и намален за 50%, ќе добиеме нов трицифрен природен број. Кој трицифрен број треба да го избереме така што по извршените пресметувања ќе добиеме најголем можен трицифрен природен број?

41. Двоцифрените броеви од 10 до 99 се запишани во некој редослед $\overline{a_1b_1}, \overline{a_2b_2}, ..., \overline{a_{90}b_{90}}$. Определи го бројот $\overline{a_1b_1a_2b_2}$ ако важи
$$\overline{a_1b_1a_2b_2} = \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + ... + \overline{a_{90}b_{90}}\ . \qquad (1)$$

42. Ана замислила пет природни броја (кои не мора да се различни), а потоа ги пресметала сите можни збирови на четири од тие пет броја, по што ги добила броевите 29, 33 и 42. Кои броеви ги замислила Ана?

43. Страниците на една книга се нумерирани со броевите од 1 до 100. Од книгата се скинати неколку листови и притоа се покажало дека збирот на броевите со кои тие страни се нумерирани е еднаков на 4949. Колку листови се скинати?

44. Бројот n е трицифрен и n^3 завршува на 777. Определи го бројот n.

45. Филип замислил еден реален број. Производот на неговиот квадрат и квадратот на неговата трикратна вредност е еднаков на 36. Збирот на замисленият број и неговата апсолутна вредност е еднаков на 0. Кој број го замислил Филип?

46. Определи ги сите природни броеви n за кои е можно некои броеви од

множеството $\{1,2,3,...,n\}$ да се зголемат за 1, а сите останати да се намалат за 1, така што производот на броевите не се менува.

3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

1. Стоногалката Цаци има точно сто нозе, 50 леви и 50 десни. Секое утро таа обува 50 пара чевли и така што прво ги обува сите леви, а потоа сите десни. За обување на секој лев чевел и треба 1 секунда. Но, тогаш се уморува па за десните чевли и треба повеќе време. За првиот десен чевел и треба една секунда, за вториот три, за третиот пет и така до последниот десен чевел, секој пат две секунди повеќе отколку претходно. Но, навечер, кога ги собува чевлите, вкупно и треба три пати помалку време отколку за обување. Колку секунди и требаат на стоногалката Цаци за собување на чевлите?

2. Матео поставил точно време на својот часовник на пладне. Еден час потоа часовникот на Матео покажал $12\,h\,57\,\text{min}\,36\,s$. Часовникот на Матео продолжил да задоцнува на истиот начин. Колку е часот во моментот кога часовникот ќе покаже $19\,h\,30\,\text{min}$?

3. На прашањето колку е часот таткото му одговорил на синот: Четвртината од изминатото време и половина од преостанатото време на овој ден го даваат точното време. Колку бил часот?

4. Андреј го прашал Горјан: „Колку е часот сега?“, а Горјан одговорил: „Од 3 часот попладне до пред 50 минути, помина четири пати повеќе време отколку што е времето од сега до 6 часот попладне.“ Колку часот е сега?

5. Андреј и Горјан секое утро трчаат до базенот, пливаат и трчаат обратно до дома. Тие излегуваат во 8:00 и трчаат по една иста патека. Горјан трча три пати побрзо од Андреј и плива два пати подолго од Андреј. Едно утро Андреј стигнал до базенот и забележал, дека ја заборавил крпата за бришење. Тој веднаш потрчал кон дома, ја зел крпата и дотрчал до базенот во моментот кога Горјан излегувал од базенот. Ако вообичаено Андреј се враќа од базенот во 10 часот, во колку часот се враќа Горјан?

6. Се симнувам со ескалатор (подвижни скали). Ако изодам 26 скалила надолу, ќе се симнам за 30 секунди, а ако изодам 34 скалила надолу, ќе се симнам за 18 секунди. Колку скалила има ескалаторот и за колку секунди ќе се симнам ако стојам на едно исто скалило?

7. Татковото детство траело шестина од неговиот живот, а се оженил осмина од својот живот по детството и одма отишол во војска. Кога поминала уште дванаесеттина од неговиот живот таткото се вратил од војска и 5 години по враќањето од војската добил син. Синот кој проживеал половина од татковите години умрел 4 години пред таткото. Колку години живеел таткото и колку години имал кога му се родил синот?

8. Таткото денес има 5 години помалку од збирот на годините на мајката и синот. По 7 години синот ќе има една третина од годините на мајката и сите тројца заедно ќе имаат 108 години. Колку години има секој од нив денес?

9. Пред 30 години бројот на годините на Иван, Ламбе и Рампо се однесувале како $1:2:5$. Денес годините на Иван и Ламбе се однесуваат како $6:7$. Колку години има Рампо во моментот?

10. Мартин е постар од своите три сестри Ана, Ивана и Елена по 8, 10 и 13 години, соодветно. По една година, збирот на годините на сестрите на Мартин ќе биде за 39 поголем од годините на Мартин. Колку години има Мартин денес?

11. Просечната возраст на членовите на едно семејство е 22 години. Ако просечната возраст на таткото и мајката е 46 години, а на децата е 6 години, колку деца има ова семејство?

12. Бројот на годините на еден човек во 1959 година бил еднаков на збирот на цифрите на годината во која е роден. Во која година е роден овој човек?

13. Бројот на годините на Михаил во 1989 година бил еднаков на збирот на цифрите на годината во која е роден. Во која година е роден Михаил?

14. Ана, нејзината мајка и баба славаат роденден на 12. јули. Денес на 12. јули 2021, збирот на нивните години изнесува 127. Кога Ана имала 4 години, бабата била два пати постара од мајката. Пред две години, мајката била три пати постара од Ана. Која година е родена мајката на Ана? Колку години ќе има Ана кога таа и мајката заедно ќе имаат еднаков број години како и бабата? Која година тоа ќе се случи?

15. Која година е родена тетката на Марко која во 1999 година наполнила онолку години колку што е двократниот збир на цифрите од годината во која наполнила дваесет години?

16. Марко бил роден меѓу 1300 и 1400 година, а Дарко меѓу 1400 и 1500 година. И двајцата биле родени на 6-ти април, во години кои што се точни квадрати на природни броеви. Двајцата живееле по 110 години. Во која година, додека биле живи, нивните години на 7-ми април биле точни квадрати на природни броеви.

17. Во едно друштво, во кое и е Горјан, некои пијат чај, а некои пијат какао. Горјан забележал, дека просечната возраст на тие што пијат какао е 16 години, а просечната возраст на тие што пијат чај е 7 години. Горјан го заменил својот напиток и така просечната возраст како на тие што пијат чај, така и на тие што пијат какао се зголемила за 1 година. Колку луѓе има во ова друштво?

4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

1. Определи ја најмалата ширина на еден еден пат за да по него може паралелно да се движат три возила, ако секое од овие визила има ширина $2,75\,m$, страничното растојание меѓу возилата биде најмалку $0,75\,m$ и оддалеченоста на возилата од страните на патот е најмалку $0,5\,m$.

2. За време на престојот во земјата на чудата Алиса четири пати ја менувала висината. Таа по ред: испила голтка од шипето на кое пишувало „Напиј се!“ и пораснала за 25%, каснала залак од питата на која пишували „Изеди ме!“ и се намалила за 10%, испила голтка од шишето на кое пишувало „Напиј се!“ и пораснала за 10%, каснала залак од питата на која пишувало „Изеди ме!“ и се намалила за 20%. Дали Алиса потоа била повисока или пониска отколку на почетокот?

3. Лента има должина $\frac{2}{3}$ метри. Како од неа може без да се користи метро може да се исече дел долг половина метар?

4. Андреј тргнал од местото A во местото B, а Бојан тргнал од местото B во местото A. Откако Андреј поминал третина од вкупната должина на патот и уште $107\,km$, а Бојан поминал шестина од вкупната должина на патот и уште $161\,km$, нивната меѓусебна оддалеченост била $113\,km$. Колку е долг патот од A до B, ако Андреј и Бојан се уште не се разминале?

5. Турист поминал определен пат за два дена. Во текот на првиот ден поминал 40% од патот, а во текот на вториот ден поминал $12\,km$ повеќе пат отолку првиот ден. Колку километри поминал туристот во текот на двата дена?

6. Секоја од трите сестри Јана, Цана и Милена за себе купила материјал за шиење фустан. Јана купила третина повеќе од Цана, а Милена за 1,6 метри помалку од Јана. Ако Јана и даде четвртина од својот материјал

на Милена, а Цана третина од својот материјал на Милена, тогаш Милена ќе има материјал колу Јана и Цана заедно. Колку материјал за шиење фустан купила секоја од трите сестри?

7. Утрово во едно одделение просечната височина на сите дваесет и два ученика беше $163,5\,cm$. Денес на пладне во одделението се запиша уште еден ученик со што просечната се зголеми за $0,3\,cm$, а попладнево една ученичка се отпиша од одделението со што просечната височина повторно се зголеми, но сега за $0,4\,cm$. Колку сантиметри е висока ученичката која се отпиша од одделението?

8. Во два сада има 80 литри вода. Ако од првиот сад во вториот сад се претури $\frac{1}{8}$ од вкупното количество вода, тогаш во вториот сад ќе има 4 пати повеќе вода отколку во првиот сад. Колку вода имало во секој сад пред прелевањето?

9. Во три цистерни се наоѓаат 780 литри млеко. Кога од првата цистерна ќе се одлее четвртина, од втората петтина и од третата $\frac{3}{7}$ од млекото, во цистерните ќе останат еднакви количества млеко. Колку млеко има во секоја цистерна?

10. Во два сада вкупно има 64 литри вода. Од првиот сад се земени 20% од водата и се претурани во вториот сад. Потоа, од вториот сад се земени 20% од водата која во тој момент е во садот и се претурени во првиот сад. По двете претурања во двата сада има еднакво количество вода. Колку вода имало о секој сад на почетокот?

11. На влезот на станот на семејството Екологисти има шише со средство за дезинфекција, кое секој самостојно го користи. Мајката преточила $\frac{3}{5}$ од вкупното количество во свое шише. Потоа таткото преточил $\frac{1}{6}$ од остатокот во свое шише. По него синот преточил $\frac{6}{7}$ од остатокот во свое шише, па истурил уште $15\,ml$, па во шишето останале само $10\,ml$ од средството. Колку милилитри средство за дезинфекција имало во шишето на почетокот?

12. Во полн филџан со волумен $3\,dl$ се наоѓа бело кафе. Односот на количествата млеко и кафе е $3:2$. Марко испил шестина од белото кафе и потоа филџанот до врв го дополнил со млеко. Потоа испил петтина од белото кафе и филџанот повторно го дополнил до врв така што сега налеал пет пати повеќе млеко отколку кафе. Откако и трет пат испил дел од белото кафе, филџанот до својата третина бил наполнет со бело кафе. Колку млеко ќе има во филџанот откако Марко повторно до врв го дополнил со млеко?

13. Во два сада A и B има смеса од антифриз и вода. Во садот A има 9 литри антифриз и 6 литри вода, а во садот B има 12 литри антифриз и 6 литри вода. Од секој сад се одлеани 7 литри раствор и потоа растворот од A е турен во B, а тој од B е турен во A. Колку литри вода и колку литри антифриз има во секој сад по претурањето?

14. Во две буриња има $170\,kg$ брашно. Ако $\frac{3}{20}$ од брашното од едното буре се претури во другото буре, тогаш во двете буриња ќе има еднакво количество брашно. Колку брашно имало на почетокот во секое буре?

15. Најдов скапоцен камен, но не го измерив. Потоа најдов друг скапоцен камен кој имаше маса еднаква на една седмина од масата на првиот камен, а потоа најдов трет скапоцен камен кој имаше маса еднаква на една единаесеттина од масата на првите два скапоцени камења заедно. Масата на трите скапоцени камења беше еднаква на $60\,g$. Колкава е масата на секој од трите скапоцени камења кои ги најдов?

16. Располагаме со пет пакети. Првиот и вториот пакет заедно тежат $12\,kg$, вториот и третиот пакет заедно имаат маса $13{,}5\,kg$, третиот и четвртиот пакет заедно имаат маса $11{,}5\,kg$, четвртиот и петтиот пакет заедно имаат маса $8\,kg$ и првиот, третиот и петтиот пакет заедно имаат мас $16\,kg$. Колку маса има секој пакет?

17. Колку килограми е масата на прачка легура од злато и бакар која содржи 42% злато, ако златото во неа има иста маса како и златото во прачка легура со маса $14\,kg$ во која 30% е злато?

18. На располагање имаме две легури од бакар и цинк. Односот на масите на бакарот и цинкот во едната легура е $5:2$, а во другата легура е $3:4$. Колку килограми треба да земеме од секоја легура за да направиме $35\,kg$ нова легура со еднакви количества бакар и цинк во неа?

19. Од две ниви со вкупна плоштина 500 декари, дедо Стојан вкупно ожнеал 222 тони пченица. Приносот од првата нива бил $400\,kg$ од декар, а од втората нива бил $500\,kg$ од декар. Определи ја плоштината на секоја од нивите.

20. Дедо Коста треба да ја изора и посее својата нива со семенски материјал-пченица. Тој нивата ја изорал за 3 дена. Првиот ден изорал 20% од целата нива и уште 16 декари, вториот ден 30% од остатокот од првиот ден и уште 20 декари, а третиот ден изорал 75% од остатокот од претходниот ден и последните 30 декари. Колку тони семенски материјал-пченица треба да купи дедо Коста, ако за сеење на еден декар е потребно 3,5 *kg* пченица?

5. ЗАДАЧИ СО ДВИЖЕЊЕ

1. Ивана на училиште оди за половина час, при што се движи со постојана брзина од $3,6\,km/h$. Таа од училиште се враќа по истиот пат движејќи се со постојана брзина од $4,5\,km/h$. За колку минути Ивана стасува од училиштето до дома?

2. За 2 часа поминав 9 километри. Ако се движам со истата брзина, за колку минути ќе поминам 15 километри?

3. Воз просечно минува $375\,km$ за три часа. Колку трае патувањето ако возот со иста просечна брзина помине $2023\,km$ со едно застанување од 3 часа и 50 минути и седум пократки застанувања од по 10 минути?

4. Пабло со велосипед тргнал од дома до нивната планинарска куќа. Првата пауза ја направил кога поминал $\frac{2}{7}$ од патот. По $54km$ повторно направил пауза и до тогаш поминал $\frac{7}{11}$ од патот. Определи ја должината на патот од домот на Пабло до неговата планинарска куќа.

5. Велосипедист изминал $600\,km$ за три дена. На почетокот возел побрзо, па затоа првиот ден поминал два пати поголемо растојание отколку вториот ден, и за $5\,km$ повеќе отколку третиот ден. Колку километри минувал велосипедистот секој од трите дена?

6. Во 7:30 од Скопје за Белград тргнува моторциклист, кој се движи со константна брзина од $62,2\,km/h$. Во 10:30 од Скопје во истата насока тргнува втор моторциклист со брзина $85,5\,km/h$. Колку километри еден од друг ќе се наоѓаат моторциклистите во 12:30?

7. Група моторциклисти се движела со брзина од $40\,km/h$. Еден член на групата застанал да одмори. Тој одмарал 24 минути, а потоа ја зголемил својата брзина за 25%, за да ја стигне групата. По колку километри мотоциклистот ја стигнал групата?

8. Иван со моторцикл вози $80\,km/h$, а Петар со велосипед вози $20\,km/h$. Двајцата истовремено тргнале од градот A кон градот B, меѓу кои должината на патот е $200\,km$. Откако стигнал во B, Иван без да застанува тргнал кон A. На колку километри од B тој го сретнал Петар?

9. Откако поминал 0,4 од должината на тесен мост, Марко разбрал, дека зад него кон мостот се приближува автомобил. За да не се сретнат на мостот, Марко тргнал назад и во моментот кога тој слегол од мостот, автомобило требало да навлезе на мостот. Се покажало, дека ако Марко и автомобилот не ги менувале брзините и Марко продолжел право, без да се враќа назад, автомобилот ќе го стигнел во моментот, кога Марко ќе слегува од мостот. Определи колку пати брзината на автомобилот е поголема од брзината на Марко.

10. Автобус требало да го помине патот од градот A до градот B за 4 часа и 45 минути. Тој тргнал од градот A и изминал 60% од целиот пат за 3 часа, со брзина помала од определената. За да сигне во определеното време, возачот пресметал, дека треба да ја зголеми брзината за $8,5\,km/h$. Определи ја должината на патот меѓу двата града.

11. Браќата Пабло и Матео заедно излегле од дома и тргнале на училиште. Матео оди со брзина $4,2\,km/h$, а Пабло со брзина $5,6\,km/h$ и пристигнал на училиште 10 минути пред Матео. Колку метри е должината на патот од нивната куќа до училиштето?

12. Андреј и Горјан се нашле на почетокот на патека долга $1800\,m$. Андреј возел велосипед, а Горјан трчал и двајцата се движеле со свои постојани брзини. Кога ќе стигнат до крајот на патеката, се свртуваат и без застанување продолжуваат во спротивната насока. За 30 минути Андреј поминал $9\,km$, а Горјан поминал $4,5\,km$. На кое растојание ќе бидат еден од друг по 30 минути од почнувањето на тренингот? На кое растојание од почетокот на патеката се кога прв пат се сретнале?

13. Оддалеченоста од домот на Филип до училиштето е $1200\,m$. Едно утро тој тргнал кон училиштето со брзина од 4 метри во секунда. Две

минути покасно, неговото куче Шарко тргнало по Филип со брзина 10 метри во секунда. На која оддалеченост од училиштето Шарко ќе го стигне Филип?

14. Андреј се наоѓа на $30\,m$ пред Пабло, кој оди три пати побрзо од Андреј. Колку метри поминал Пабло пред да го стигне Андреј?

15. Пабло учествувал на кроз и тој патеката од $5\,km$ ја претрчал за 16 минути и 40 секунди. За време на трката тој ја зголемувал брзината и секој следен километар го поминувал за 5 секунди побрзо отколку претходниот. За кое време Пабло го претрчал последниот километар?

16. Теодора трча со брзина поголема за $8\,km/h$ од брзината со која пешачи. Таа пешачела 2 часа и трчала 30 минути, по што изминала вкупно $14\,km$. Колкава е брзината на Теодора кога пешачи?

17. Од градовите A и B, меѓу кои должината на патот е $329{,}4\,km$, еден кон друг тргнале автобус и автомобил. Автобусот тргнал од градот A и се движел со постојана брзина од $72\,km/h$. Автомобилот тргнал 1,2 часа покасно од автобусот и се движел 1,25 пати побрзо од него. На колкаво растојание од градот B се сретнале автобусот и автомобилот?

18. Од градовите A и B едновремено еден кон друг тргнале два велосипедисти. По 3 часа возење велосипедистите се наоѓале на $40\,km$ еден од друг. Се покажало дека по 5 часа од поаѓањето велосипедистите повторно биле на $40\,km$ еден од друг. Определи ја должината на патот меѓу градовите A и B.

19. Андреј одел од местото A до местото B и обратно (без да застанува во B). Билјана одела од B до A и обратно (без да застанува во A). Тие тргнале истовремено, при што секој се движел со своја константна брзина. На одење двајцата се сретнале на $700\,m$ од B, а на враќање се сретнале на $400\,m$ од A. Определи ја должината на патот од A до B.

20. Два автомобили тргнале истовремено од градовите A и B еден кон

друг и се движеле по прав пат со брзини соодветно $100\,km/h$ и $80\,km/h$. Автомобилите се сретнале во точката C. Откако стигнале во градовите B и A, тие без да застануваат одново тргнале една кон друга и се сретнале о точката D. Определи го растојанието меѓу градовите A и B, ако растојанието меѓу C и D е $53\frac{1}{3}\,km$.

21. Два воза се разминуаат во железничка станица, без да запираат. Првиот воз се движи со брзина $70\,km/h$, а вториот се движи со брзина $80\,km/h$. Патник, кој седи во вториот воз, забележал, дека првиот воз поминал покрај него за 3 секунди. Определи ја должината на првиот воз?

22. Воз, долг $450\,m$, минува покрај знакот на пругата за 15 секунди, а покрај неподвижна платформа минува за 35 секунди. Определи ги брзината на возот и должината на платформата?

23. Матео, патувајќи со трамвај, го видел Пабло, кој се движел покрај трамвајската линија во насока, обратна од насоката на движење на трамвајот. По 10 секунди Матео слегол од трамвајот и побрзал да го стигне Пабло. За колку секунди Матео го стигнал Пабло ако Матео се движел два пати побрзо од Пабло, а пет пати поспоро од трамвајот?

24. Во 10 часот наутро од градот A тргнал автомобил кон градот B, а 1 час и 15 минути покасно од градот B по истиот пат кон градот A тргнал друг автомобил. Брзината на вториот автомобил е еднаква на $66\frac{2}{3}\%$ од брзината на првиот автомобил. Првиот автомобил пристигнал во градот B точно на полноќ. Во колку часот се сретнале автомобилите?

25. Крал со својата придружба се движи од тврдината A кон тврдината B со брзина $5\,km/h$. Кралот на секој час испраќа гласници кон тврдината B кои се движат со $20\,km/h$. Колкаво е временското растојание на пристигнување на гласниците во тврдината B?

26. Од градовите A и B во 13 часот истовремено еден кон друг тргнуваат автомобил и пешак, соодветно. Автомобилот го минува патот од

A до B за 1 час. Откако автомобилот и пешакот се сретнале, пешакот се качил во автомобилот и тој се вратил назад во градот A, за да го однесе пешакот. Потоа автомобилот без застанување се вратил кон градот B и таму пристигнал во 15 часот и 40 минути. Определи го времето за кое пешакот може да го помине патот меѓу двата града.

27. Автомобил првиот ден поминал $\frac{3}{5}$ од целиот пат, вториот ден поминал $\frac{1}{3}$ од патот поминат во првиот ден, а третиот ден ги поминал преостанатите $100\,km$. Со која средна брзина се движел овој автомобил ако првиот ден патувал $3\,h\,45\,\text{min}$, вториот ден патувал $1\,h\,20\,\text{min}$ и третиот ден патувал $1\,h\,35\,\text{min}$?

28. Пабло и Матео скокнале истовремено од брегот на езерото и запливале кон платформата која била во близина на брегот. Кога Пабло стигнал до платформата, Матео бил на $40\,m$ од брегот на езерото. Пабло, по истата патека, запливал назад кон брегот и го сретнал Матео на $48\,m$ од брегот. Колку метри е растојанието од брегот до платформата.

29. Брзината на водата во една река е 5 метри во секунда. Од пристаништето A по течението на реката тргнал сплав, а три часа по сплавот тргнал моторен чамец, кој сплавот ги стигнал по 2 часа. Определи ја брзината на чамецот наспроти течението на реката.

30. Брзината на чамецот во мирна вода во однос на брзината на реката се однесува како $13:2$. По течението на реката чамецот поминал $75\,km$. Колкаво растојание ќе помине чамецот за истото време ако се движи спротивно од течението на реката?

31. Градовите A и B лежат на брегovите на река, а растојанието меѓу нив е $10\,km$. Брзината на бродот е u, а на реката е v, $u > v$. Дали времето потребно бродот да плови од A до B, а потоа од B до A е подолго од времето потребно бродот во мирно езеро да помине $20\,km$?

6. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ И КУПУВАМЕ

1. Андреј, Горјан, Пабло и Филип седат околу тркалезна маса (во овој редослед). Заедно имаат 1600 златници. Прво Андреј половина од своите златници ги поделил на два еднакви дела и по еден дел му дал на својот лев и својот десен сосед, додека втората половина ја задржал за себе. Потоа истото ова го направил Горјан, потоа Пабли и на крајот Филип. На крајот сите четворица имаат еднаков број златници. Колку златници имал на почетокот Горјан?

2. Павел и Томи играат игра во која користат жетони со вредност 3 денари и 5 денари. Ако во играта некој застане на златно поле, тогаш може да купи волшебен напиток. Павел купил еден вошебен нашиток и го платил со жетони од по 3 денари, и Томи купил еден волшебен напиток и го платил со жетони од по 5 денари. Определи ја цената на напитокот ако двајцата заедно дале повеќе од 60, а помалку од 70 жетони.

3. Во последното тримесечие од годината една фирма остварила добивка 24000 евра, која е еднаква на 20% од годипната добивка на фирмата. Определи ја просечната месечна добивка на оваа фирма.

4. За колку дена човек кој за ден и половина заработува 45 евра и во еден ден троши 20% од дневната заработувачка, ќе заштеди 600 евра?

5. Три работници последователно извршуваат една работа. Првиот работник завршил 40% од работата, вториот завршил $\frac{1}{3}$ од преостанатата работа и 5% од целата работа и третиот работник ја довршил работата. Како ќе биде распределено плаќањето на работниците ако целата работа е оценета со 40000 евра?

6. Во продавница за облека Филип купил пантолони и потрошил 10% од парите што ги имал и уште 10 евра. Потоа, тој купил и вентијага за што потрошил 20% од парите што му останале и уште 20 евра. На крајот со преостанатите 80 евра Филип во продавницата за обувки си

купил патики. Колку пари потрошил Филип?

7. Горјан на пазар однел $525\,kg$ лешници. Продал $\frac{3}{5}$ од сите лешници по цена 3 евра за килограм, $\frac{4}{5}$ од остатокот по цена 5 евра за килограм и третина од новиот остаток по цена 6 евра за килограм. По која цена ги продал Горјан преостанатите лешници ако вкупно добил 2023 евра?

8. Ако на пазарот може да се купат 300 манга за една драма, а 30 зрели шипки за една пана, колку шипки може да се добијат во замена за десет манга? (1 драма вреди колку 16 пани)

9. Цената на еден производ последователно два пати е зголемена за по 12%. Колку проценти е повисока цената на производот во однос на цената пред зголемувањата?

10. Цената на една книга прво се зголемила за 10%, потоа се намалила за 20% и повторно се зголемила за 10%. Дали цената на книгата на крајот е поголема или помала од почетната цена и за колку проценти?

11. Цената на една книга се зголемила за 20%, а потоа се намалила за 10%. За колку проценти треба да се намали најновата цена на книгата, за да цената на книгата биде еднаква на 54% од нејзината почетна цена?

12. Цената на ист вид патики во две продавници била еднаква. Во едната продавница цената на патиките се зголемила за 8%, а во другата се намалила за 8%. Колкава е почетната цена на патиките, ако сега разликата на цените е еднаква на 1200 денари?

13. Во една слаткарница вчера се продадени колачи и торти, како што е прикажано во следнава табела:

Вид и цена	Колач 1 евро	Колач 5 евра	Торта 10 евра	Торта 15 евра
Број на продадени	100	25	20	15

а) Колку проценти од продадените колачи и торти се по цена од 1 евро?

б) Приближно колку проценти од оставарената продажба се добиени

од тортите од 15 евра?

14. Во лабораторија од два вида растенија се добиваат етерични масла A и B. Десет минути обработка на еден тон растение чини 100 евра. Во долната табела се дадени податоците за количествата етерични масла A и B (во литри) од $1t$ растителен материјал.

Количество добиено етерично масло (l/t)					
Етерично масло A			Етерично масло B		
Обработка	Растение 1	Растение 2	Обработка	Растение 1	Растение 2
10 мин	3,0	3,5	10 мин	2,0	2,5
15 мин	4,0	3,8	15 мин	2,7	2,5

Ако $1l$ етерично масло A се продава 200 евра, а $1l$ етерично масло B се продава 300 евра, да се определи максималната добивка при вадење на едно етерично масло од едно растение.

15. На кружниот дијаграм е дадена распределбата на буџетот на едно семејство.

а) Колку проценти од буџетот ова семејство троши за исхрана?
б) Со колку проценти од семејните расходи за храна учествува лебот?
в) Килограм леб чини 8 пати помалку од килограм месо. Каков е односот на количеството месо наспрема количеството леб во ова семејство?

16. За театарската претстава „Пепелашка“, цената на влезницата за возрасен човек е за 50% поголема од цената на влезницата за дете. Ако влезниците за пет возрасни луѓе и четири деца вкупно чинат 39,79 евра, определи колку чинат влезниците за осум возрасни луѓе и шест деца.

17. Пабло, Андреј и Филип заедно купиле таблет. Пабло платил 60% од

цената на таблетот, Андреј платил 40% од преостанатиот дел, а Филип учествувал со 30 евра. Колку пари чинел таблетот?

18. Горјан, Пабло и Филип купиле топка која ја платиле 204 евра. Горјан дал 20 евра повеќе од Пабло, а Филип дал 20% поголема сума од Горјан. Со колку пари учествувало секое од децата во купувањето на топката?

19. Матео обиколил три продавици и ги потрошил сите пари. Со половината од парите Матео купил книга, потоа со $\frac{1}{3}$ од преостанатите пари купил топка, а последните 18 евра ги потрошил за нова капа. Колку пари потрошил Матео?

20. Платата на Пабло е 75% од платата на Матео. Секој од нив троши дел од платата, а преостанатиот дел го штеди. Пабло троши 50% од сумата која ја троши Матео, а Матео троши толку колку што е платата на Пабло. Ако Матео заштедил 600 евра, колку евра заштедил Пабло?

21. Андреј, Пабло и Филип купиле по една книга со една иста цена и потрошиле соодветно 100%, $55\frac{5}{9}\%$ и 50% од парите кои ги имале. Преостанатите пари има стигнале точно за три билети за кино од по 3 евра. Определи ја цената на книгата?

22. Во една продавница за спортска опрема пар патики се продавал 900 денари поефтино од една тренерка. На акција патиките биле намалени за 10%, а тренерките за 5%. Матео купил пар патики и тренерка на намаление и за нив платил вкупно 5480 денари. Колку чинеле парот патики, а колку тренерката пред намалувањето?

23. За некоја сума пари домаќинката Соња може да купи $20\,kg$ компири. Колку компири може да купи Соња за истата сума пари, откако цената на компирите се намалила за 20%?

24. Цената на еден производ се намалила за 5%. Потоа цената на истиот производ се зголемила за 40% и сега таа е за 135206 денари помала од двократната почетна цена. Определи ја почетната цена на производот.

25. Ивана купила четири производи чија вкупна цена била 30 евра. Ако на овие производи им додаде вентијага, тогаш просечната цена на петте производи ќе биде 20 евра. Ако наместо вентијагата купи чизми и панталонии, тогаш просечната цена ќе биде пак 20 евра. Чизмите чинат 54 евра повеќе од панталоните. Определи ги цените на јакната, чизмите и панталоните.

26. Јован шета во супермаркет и разгледува. Му се допаѓа една книга, но му се допаѓа и една топка. Книгата е поскапа од топката за 360 денари. Јован забележал дека за вредноста на 5 топки може да купи две такви книги и уште едно чоколадо. Топката е три пати поскапа од чоколадото. На крајот Јован купил една книга, една топка и едно чоколадо. Колку пари платил Јван?

27. Четири другари заедно купиле топка. Првиот платил половина од вкупната вредност на топката, вториот платил третина од сумата кои ја дале другите тројца, а третиот платил четвртина од сумата која ја дале другите тројца. Четвртиот платил 100 денари. Колку пари чинела топката?

28. Во книжарница стигнала кутија моливи и е планирано сите да се продадат по иста цена. Една четвртина од вкупниот број моливи се продадени по 5% повисока цена од планираната. Половина од моливите се продаден по 10% пониска цена од планираната. По колку проценти повисока цена од планираната треба да се продадат преостанатите моливи за да се оствари заработувачката која е планирана кога пристигнале моливите?

29. Во текот на месец август во продавница за чевли еден од моделите на летни чевли бил намален 25% и биле продадени 400 пара чевли повеќе од овој модел отколку во месец јули. Се покажало дека приходите од продажбата на овој модел чевли биле еднакви во двата месеци. Колку пара чевли од овој модел биле продадени во текот на двата месеци?

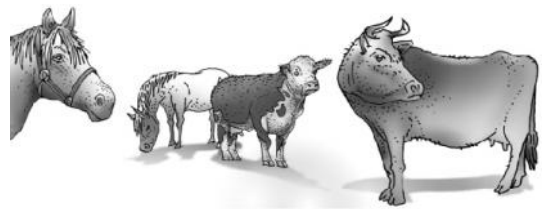
30. Максим пазарувал и потрошил 80% од парите кои ги имал. Притоа по завршување на пазарувањето имал толку евроценти, колку што имал евра пред пазарувањето, и пет пати помалку евра, отколку што имал

евроценти пред пазарувањето. Колку пари имал Максим пред пазарувањето?

31. Хуманитарна организација од продажба на 150 билети за добротворна претстава заработило 2023 евра. Повеќе од 100 билети биле продадени по една цена која е природен број, а преостанатите билети биле продадени со 50% попуст. Колкава е заработувачката од билетите кои биле продадени без попуст?

32. Андреј, Филип и Горјан поделиле определена сума пари. Андреј добил 56 евра и четвртина од остатокот на парите. Потоа Филип од преостанатите пари добил 78 евра и четвртина од новиот остаток. На крајот Горјан добил 90 евра и четвртина од новиот остаток. Како Андреј, Филип и Горјан треба да ги поделат преостанатите 108 евра за да секој од нив добие иста сума пари?

33. Трговец купува неколку коњи и бикови за сума од 1770 талири. Платил 31 талир за секој бик и 21 талир за секој коњ. Колку бикови и коњи купил трговецот?



34. Еден петел чини 5 евра, една кокошка чини 3 евра и три пилиња чинат 1 евро. Дедо Марко купил 100 птици за 100 евра. Колку петли, кокошки и пилиња купил дедо Марко?

7. ЗАДАЧИ СО РАБОТА

1. Ако 40 деца садат 160 дрвца за еден ден ден, колку дрвца ќе посадат 60 деца за 5 дена? (Секое дете секој ден сади еднаков број дрвца.)

2. Три мајстори за 5 часа покриле со еднакви квадратни плочки правоаголен под $6 \times 5,2\,m$. Мајсторите ги избрале најголемите можни плочки, со кои може да го покријат подот, без да има потреба да ги сечат плочките. За колку часа двајца мајстори ќе залепат 104 плочки од истиот вид?

3. Петар еден ѕид може да соѕида за 6 дена, а Мирко истиот ѕид може да го соѕида за 12 дена. За колку дена ќе биде соѕидан ѕидот, ако Петар и Мирко работат заедно?

4. Шеснаесет работници за 5 дена завршиле $\frac{4}{9}$ од некоја работа. Колку работници треба уште да се ангажираат за да преостанатиот дел од работата, ако работниците работат со исто темпо, се заврши за 4 дена?

5. Базен со волумен 18500 литри се полни од три отворени цевки. Од првата ценка во една минута истекува 32 литри вода. Од втората цевка во две минути истекува онолку вода колку што од првата цевка истекува вода за три минути. Од третата цевка за 5 минути истекува онолку вода колку што истекува од втората вода за 4 минути. Ако сите три цевки се отворат истовремено, за колку минути ќе се наполни целиот базен?

6. Базен се полни од неколку еднакви цевки. Ако имаше два пати повеќе цевки, базенот ќе се наполнеше за 5 часа пократко време, а ако цевките беа за 2 повеќе, базенот ќе се наполнеше за 6 часа. Колку цевки го полнат базенот?

7. За да изора дадена површина во определен рок, тракторист требало да ора по 20 декари на ден. Тој решил да работи 20% повеќе од опреде-

лената норма, па така 3 дена пред определеното време изорал $\frac{4}{5}$ од целата површина. Определи ја плоштината на површината која требало да ја изора трактористот.

8. Дедо Стојан може сам да ја окоси ливадата за 8 часа, а неговиот внук Матеј може сам да ја окоси ливадата за 13 часа. Дали двајцата заедно може да ја окосат ливадата за 5 часа?

9. Еден работник завршува дадена работа за 12 дена, а друг работник истата работа ја завршува за $\frac{2}{3}$ од времето на првиот работник. Двајцата работници почнале истовремено да работат, но по неколку дена првиот работник бил преместен на друга работа, а вториот работник ја доврпил работата за три дена. За колку дена е завршена целата работа?

10. Двајца работници работат заедно и изработуваат определен број исти делови, при што првиот работник изработил 40 делови помалку од вториот. Ако првиот работник од почетокот го зголеми својот производен капацитет за $\frac{100}{3}\%$, работејќи едновремено, двајцата ќе ја исполнат порачката, при што ќе изработат еднаков број делови. Колку делови била порачката?

11. Во една печатница има три машини за печатење. За потребите на изборна кампања Методија добил порачка да отпечати флаери. На првата машина за 3,5 часа може да се отпечати 42% од порачката. На втората машина за 9 часа може да се отпечати 60% од порачката, а брзините на печатење на третата и втората машина се однесуваат како $6:5$. За колку време Методија може да ги отпечати флаерите ако трите машини започнат истовремено да печатат?

12. Ана, Билјана и Цветанка молерисуваат соба. Ана може да ја молериса собата за 15 часа, Билјана за 10 часа, а Цветанка два пати побрзо од Ана. Ана почнала да молерисува сама час и половина, потоа и се при-

дружила Билјана и заедно молерисувале додека не била молерисана половина од собата. Потоа им се придружила и Цветанка и сите три работеле заедно додека не ја молерисале целата соба. Колку вкупно минути траело молерисувањето на собата?

13. Двајца работници, работејќи едновремено, завршуваат дадена работа за 5 дена. Ако првиот работник работи два пати побрзо, а вториот работник работи два пати побавно, тогаш тие работата ќе ја завршат за 4 дена. За колку дена секој работник самостојно ја завршува работата?

14. Одреден број на момчиња и девојчиња отишле на кампување за време на летниот распуст. Тие испланирале еколошка акција, што би ја завршиле за 29 дена ако секое дете работи рамномерно – во кои било денови сработува ист дел од работата. Момчињата работеле нешто побрзо; за исто време 2 момчиња работат исто колку што работат 3 девојчиња. За среќа, по три дена од почнување со работата, им се придружила поголема група деца, и тоа: момчиња – 8 пати повеќе од првичниот број на девојчиња, и девојчиња – 18 пати повеќе од првичниот број на момчиња. Новодојдените деца работат со иста динамика како и прводојдените. Колку вкупно денови биле работни?

15. Дончо има определено количество сено, со кое храни коњ, коза и крава. Сеното е доволно само кравата и коњот да се хранат 12 месеци, само кравата и козата да се хранат 15 месеци и само коњот и козата да се хранат 20 месеци. Колку месеци со сеното кое го има Дончо може да ги храни коњот, кравата и козата?

16. За 4 седмици 12 говеда испасуваат $3\frac{1}{3}$ декари пасиште, а за 9 седмици 21 говедо испасуваат 10 декари пасиште. Ако тревата расте секогаш со иста брзина, колку говеда се потребни да испасат 24 декари пасиште во период од 18 седмици?

8. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Во корпата на бабата на Андреј, Пабло и Филип имало ореви. Андреј изел 1 орев, половина од преостанатите ореви и уште 2 ореви. Пабло изел 2 ореви, половина од преостанатите ореви и уште 3 ореви. На крајот Филип изел 3 ореви, половина од останатите ореви и уште 4 ореви, по што во корпата останале 6 ореви. Колку ореви имало на почетокот во корпата?

2. Бојан и Ангел имале по 64 џамлии. Секој ден еден од нив му давал половина од своите џамлии на другиот. По 6 дена Бојан имал 61 џамлија, а Ангел имал 67 џамлии. Во колку од овие шест дена Ангел ги поделил своите џамлии со Бојан?

3. Во еден магацин има 360 гајби со јаболка и 384 гајби со круши. Гајбите со овошје треба да се испорачаат во различни продавници, во пратки во кои секогаш има еднаков број гајби со овошје и во секоја пратка има еднаков број гајби со јаболка. Камионите со кои се пренесуваат пратките со овошје може да носат најмногу 60 гајби. По колку гајби со јаболка и колку гајби со круши има во секоја пратка?

4. Теодор и Теодора береле сливи, секој во својата кошница. Теодора изела 5 сливи од својата кошница. Потоа Теодор и дал половина од неговите сливи. Теодора изела уште 5 сливи и му дала 7 сливи на Теодор, по што двајцата имале еднаков број сливи. Колку сливи имала Теодора на почетокот?

5. Една држава вкупно има 4080 жители, секој од кои е математичар или поет. Секој седми математичар е и поет, а секој деветти поет е и математичар. Колку жители на оваа држава се истовремено поети и математичари?

6. Пабло и Матео треба да преведат 70 страници текст од македонски на германски јазик. Пабло ги поделил страниците меѓу двајцата, но Матео се побунил, дека тој има премногу страници за превод, па му дал една третина од неговиот дел на Пабло. Сега, делот на Пабло се

зголемил три пати. По колку страици ќе преведе секој по втората распределба?

7. Бројот на пензионерите во еден град е 25% од населението со право на глас и 20% од целото население. Колку проценти од населението нема право на глас?

8. На една прослава 20% од гостите облекле сини пантолони, при што 60% од гостите со сини пантолони носеле бели чевли. Меѓу гостите кои не носеле сини пантолони 30% носеле бели чевли. Определи колку проценти од гостите кои носеле бели чевли облекле сини пантолони.

9. Во една голема компанија на комјутерите се проширил нов вирус. Во јануари со вирусот се заразени 30% од сите комјутери. Во февруари од 30% од заразените комјутери е отстранет вирусот, а 30% од во тој момент незаразените комјутери се заразиле со вирусот. Во март од 30% од заразените комјутери е отстранет вирусот, а 30% од во тој момент незаразените комјутери се заразиле со вирусот. Колкав процент од компјутерите во компанијата не е заразен со вирусот на почетокот на април?

10. Една компанија минатата година го реализирала производствениот план со 112%. Колку проценти од реализираното производство е планираното производство?

11. Вкупниот број момчиња во едно одделение е еднаков на 60% од вкупниот број девојчиња во тоа одделение. Определи го процентот на момчињата во вкупниот број ученици во тоа одделение.

12. На еден остров $\frac{2}{3}$ од сите мажи се женети, а $\frac{3}{5}$ од сите жени се мажени. Колкав дел од населението не е во брак?

13. Павел, Томи и Ангела поделиле кутија бомбони на следниов начин: Ангела зела 20% од бомбоните и уште 12 бомбони, потоа Томи зел 25% од преостанатите бомбони и уште 15 бомбони и на крајот Павел зел 30% од преостанатите бомбони и последните 21 бомбона. Колку бомбони зело секое дете?

14. На Охридското езеро бројот на белите лебеди спрема бројот на црните лебеди се однесува како $5:2$. Од езерото одлетале 27 лебеди и останале 40% од белите и 25% од црните лебеди. Колку лебеди останале на езерото?

15. На крајот од учебната година седмооделенците од едно училиште ги добиле следниве оценки: 80% од сите ученици биле оценети со петки по македонски јазик, 50% по македонски јазик и математика, а со петка по математика биле 84 ученици. Колку ученици во седмо одделение има во ова училиште и колку од нив имаат петки по математика, но немаат петки по македонски јазик, а колку имаат петки по македонски јазик, но немаат петки по математика?

16. Во училишната книжарница донесле определен број збирки по математика. Првиот ден се продале 18 збирки, а следниот ден се продал една третина од остатокот и уште 18 збирки, по што во книжарницата останале половината од збирките. Колку збирки биле донесени во книжарницата?

17. Во едно училиште 40% од учениците се девојчиња. Ако само 69 ученици имаат петка по математика, а 75% од девојчињата и 40% од момчињата имаат пониска оценка, колку момчиња имаат петка по математика?

18. Иван собрал 20% повеќе јаболки од Стефан, но 20% јаболки помалку од Кирил. За колку проценти повеќе јаболки собрал Кирил од Стефан?

19. Атанас добил наследство и со добра зделка тој го зголемил за 60%. Потоа претрпел загува и му останала истата сума пари која ја наследил. Колку проценти е загубата на Атанас?

20. Во училиштето на Горјан се запишале нови ученици и тоа два пати повеќе момчиња од девојчиња. Од нив 25% од девојчињата и 20% од момчињата, вкупно 39 нови ученици учат германски јазик. Колку нови ученици се запишале во училиштето на Горјан?

21. Во две вреќи има соодветно a и b килограми шеќер. Познато е, дека $a-b$ е еднакво на $2a\%$ од b и на $a\%$ од a. Колку вкупно шеќер има

во вреќите?

22. Пабло и Матео јаделе бонбони. Пабло изел $\frac{1}{3}$ од сите бонбони и уште 4 бонбони. Потоа Матео изел $\frac{1}{3}$ од преостанатите бонбони и уште една бонбона. Последните 7 бонбони останале за Филип. Колку бонбони изел Пабло?

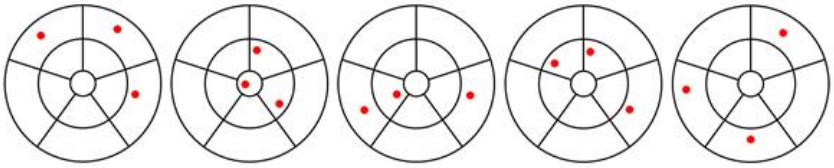
23. Четири села A,B,C,D имаат заедно 2009 жители и за бројот на жителите на селата важи $A:B=2:3, B:C=4:5, C:D=5:2$. Колку жители има секое село?

24. На фармата на дедо Марко вкупно има 1200 крави, овци и свињи. Определи го бројот на секој вид животни ако $\frac{2}{3}$ од бројот на кравите се еднакви на $\frac{1}{2}$ од бројот на овците и се еднакви на $\frac{2}{5}$ од бројот на свињите.

25. За определување на екипата за еден математички натпревар се правеле два теста. Првиот тест содржел 24 задачи, при што за секој точен одговор се добивале 5 поени, а за неточен или непотполнет одговор се одземал 1 поен од постигнатиот резултат. Вториот тест содржел 15 задачи, при што за секој точен одговор се добивале поени, а за секој неточен или непотполнет одговор се одземале по 2 поени од постигнатиот резултат. Филип решил вкупно 30 задачи, а реззултатот од првиот тест му бил за 10 поени подобар од резултатот на вториот тест. По колку задачи Филип решил на секој тест?

26. На еден натпревар се натпреварувале вкупно 2400 ученици во пет различни категории. Вкупниот број на ученици од првата и втората категорија е еднаков на $\frac{3}{5}$ од вкупниот број на ученици од третата, четвртата и петтата категорија. Односот на бројот на учениците од првата и втората категорија е 2:3, а односот на бројот на учениците од третата, четвртата и петтата категорија е 5:4:6. По колку ученици се натпреварувале во секоја категорија.

27. Метата за пикадо е поделена на 11 делови: пет надворешни, пет внатрешни и еден централен. Погодоците во различните надворешни делови на метата донесуваат различен број бодови. Погодокот во внатрешниот дел на метата донесува двојно повеќе бодови од погодокот во соседниот надворешен дел на метата (соседни се деловите кои имаат заедничка линија). Погодокот во средниот круг се вреднува 36 бода.



40 бода 92 бода 56 бода 72 бода 53 бода

Горјан со стрелички ја гаѓал метата. Горните цртежи ги прикажуваат погодоците во пет серии со по три стрлички и збировите на бодовите кои притоа се остварени. Кој е најголемиот број бодови што Горјан може да го добие ако со секоја од три различни стрелички погоди различни полиња од метата?

28. Во две одделенија имало 40 ученици. Минатата година поголем број од нив покажале одличен успех, додека во тековната учебна година, овој број значително се намалил. Така, ако бројот на ученици кои во тековната година покажале одличен успех се зголеми за 5 ученици, тогаш тој број сепак ќе биде 3 пати помал од половината од бројот на ученици кои имале одличен успех во минатата година. Определи го бројот на ученици со одличен успех во тековната и минатата година, ако нивниот вкупен број изнесува 37. Колку ученици не покажале одличен успех во тековната година?

29. Во фудбалот победникот добива 3 бода, а поразениот 0 бодови. Ако натпреварот заврши нерешено, тогаш двете екипи добиваат по 1 бод. Една екипа одиграла 68 натпревари и освоила 170 бодови. Колку најмногу натпревари можела да загуби оваа екипа?

30. Вкупно 24 лица поделиле 48 кроасани. Секое дете добило по 8 кроасани, секоја жена по 2 кроасани, а секој маж добил по 1 кроасан. Колку деца, жени и мажи учествувале во поделбата, ако секое лице добило барем по еден кроасан?

31. Група од 27 планинари меѓу себе поделиле 13 леба. Секој маж добил по два леба, секоја жена добила по половина леб и секое дете добило по третина леб. Колку мажи, жени и деца имало во групата?

32. Во една бочва има мешавина на вода и оцет таква што односот на водата и оцетот е $2:1$. Во друга бочва, со двапати поголем волумен од првата бочва, има мешавина на вода и оцет таква што односот на водата и оцетот е $3:1$. Содржините на двете бочви се прелеани во трета бочва. Каков е односот на водата и оцетот во третата бочва?

33. Дедо Марко има две ниви чии плоштини се однесуваат како $2:3$. На двете ниви тој сака да засади малини и јагоди така што плоштината на која ќе засади јагоди ќе биде еднаква на плоштината на која ќе засади малини. Помалата нива ја засадил со јагоди и малини во однос $3:5$. Во кој однос треба да ја засади поголемата нива?

34. Девет ученици се натпреварувале во решавање на пет математички задачи, секоја од кои се вреднува со по 10 бода. Осум ученици освоиле еднаков број бодови, а Матео освоил повеќе бодови од преостанатите ученици. Ако просекот на освоените бодови на сите натпреварувачи е еднаков на 24, колку бодови можел да освои Матео?

35. Филип, Кирил и Никола си испраќаат писма меѓу себе при што не добиваат писма од други луѓе. Притоа писмата се испраќаат според следниве правила:
    - Филип му испраќа писмо на Кирил секој втор ден, а на Никола секој петти ден,
    - Кирил му испраќа писмо на Филип одма по секои две добиени писма, а на Никола секој чртврт ден,
    - Никола му испраќа писмо на Филип одма по секои четири добиени писма, а на Кирил секој осми ден.

    Секое писмо патува еден ден, т.е. секое писмо стигнува следниот ден од денот кога е испратено. Кој е најмалиот број денови по кои Филип ќе добие 68 писма?

36. На еден остров има само црвени сини и жолти камелеони. Во даден

момент бројот на жолтите бил еднаков на 25% од бројот на сините, а бројот на сините бил еднаков на 25% од бројот на црвените камелеони. Потоа помалку од 1000 црвени камелеони ја сменила бојата: некои во сини, некои во жолти. Така бројот на сините камелеони станал 20% поголем од бројот на жолтите, а бројот на црвените станал 20% помал од бројот на сините. Колку црвени камелеони останале на островот?

37. Откако ги прегледал патничките билети на сите патници во три вагони, кондуктерот Мирко заклучил: Ако во првиот вагон се качеа 55 патници повеќе, тогаш во првиот вагон ќе имаше еднаков број на патници како во вториот и третиот вагон заедно. Ако во вториот вагон се качеа 33 патници повеќе, тогаш во вториот вагон ќе имаше еднаков број патници како во првиот и третиот вагон заедно. Бројот на патниците во првиот вагон е помал од четвртината на бројот на патниците во третиот вагон. Кој е најголемиот можен број патници во трите вагони заедно?

38. Во едно училиште има помалку од 300 ученици. Во шест одделенија има еднаков број ученици. Вкупниот број ученици во овие шест одделенија е поголем од 90. Преостанатите ученици се за 20% повеќе од вкупниот број ученици во овие шест одделенија. Колку ученици има во ова училиште?

39. На еден маратон учествувале меѓу 510 и 550 ученици. Ако бројот на девојчињата кои учествувале на маратонот е за 100 помал од трикратниот број на момчињата кои учествувале на маратонот, кој е најмалиот, а кој најголемиот можен број девојчиња кои учествувале на маратонот?

40. Сите неоправдани изостаноци во едно одделение се повеќе од 25% од сите изостаноци во одделението. Ако секој ученик во одделението имал 3 пати повеќе неоправдани изостаноци и за 2 повеќе оправдани изостаноци, тогаш бројот на сите неоправдани изостаноци ќе беше 5 пати помал од бројот на сите оправдани изостаноци. Докажи, една третина од учениците во одделението немаат изостаноци.

41. Од 605 топчиња со еднаков радиус се направени „исправена пирами-

да“ чија основа е квадрат и „исправена пирамида“ чија основа е рамностран триаголник. Двете тела во висина имаат еднаков број хоризонтални редови топчиња. По колку топчиња има во секоја пирамида?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Едно село има седум куќи. Во секоја куќа има по седум мачки. На секоја мачка има по седум глувци, а за секој глушец има по седум зрна пченица. Секое зрно дава седум мерици жито. Колку во ова село вкупно има куќи, мачки, глувци, зрна пченица и колку мерици жито може да се добијат?

Решение. Во ова село има 7 куќи, $7 \cdot 7 = 49$ мачки, $49 \cdot 7 = 343$ глувци, $343 \cdot 7 = 2401$ зрна пченица. Значи, во селото вкупниот број куќи, мачки, глувци и зрна пченица е $7 + 49 + 343 + 2401 = 2800$, а бројот на мериците кои може да се добијат е $2401 \cdot 7 = 16807$.

2. Матео треба да направи четири теста. На првите три теста тој просечно освоил по 88 поени. Колку поени треба да освои на четвртиот тест, за да на сите четири теста просечно освои 100 поени.
Решение. На првите три теста Матео освоил $3 \cdot 88 = 264$ поени. За на сите четири теста Матео да има просечно по 100 поени, тој вкупно треба да има $4 \cdot 100 = 400$ поени. Според тоа, Матео на четвртиот тест треба да освои $400 - 264 = 136$ поени.

3. Една фудбалска екипа одиграла 13 натпревари и освоила 29 бодови. Притоа бројот на нерешените натпревари кои ги одиграла бил еднаков на бројот на поразите. Во колку натпревари победила оваа екипа? (Во фудбалот за победа се добиваат 3 бода, за пораз не се добиваат бодови, а при нерешен резултат секоја екипа добива по 1 бод.)
Решение. Нека екипата има x порази и x нерешени резултати. Тогаш, бројот на победите е $13 - 2x$, од каде следува $3(13 - 2x) + x = 29$, т.е. $x = 2$. Значи, екипата имала 2 порази, 2 нерешени средби и 9 победи.

4. Пред да го скрие вошебното стапче Хари Потер им заповедал на своите 36 ученици да ги затворат очите. Тогаш сите момчиња и една четвртина од девојчињата го затвориле десното око, а сите девојчиња и една четвртина од момчињата го затвориле левото око. Колку

ученици виделе каде Хари Потер го скрил волшебното стапче?
Решение. Бидејќи сите момчиња го затвориле десното око, а една четвртина од нив го затвориле и левото око, заклучуваме дека една четвртина од момчињата ги затвориле двете очи. Аналогно, една четвртина од девојчињата ги затвориле двете очи. Следствено, една четвртина од сите ученици ги затвориле двете очи, а тоа се $36:4=9$ ученици. Останатите $36-9=27$ ученици виделе каде Хари Потер го скрил волшебното стапче.

5. Во една паралелка учат помалку од 30 ученици и $\frac{5}{8}$ од нив се момчиња. Ако $\frac{2}{3}$ од учениците сакаат да пливаат, колку девојчиња има во паралелката.
Решение. Бројот на учениците во паралелката е делив со 8 и со 3, што значи дека е делив со 24. Единствен број кој е помал од 30 и е делив со 24 е бројот 24. Значи во паралелката учат 24 ученици и $\frac{3}{8}$ се девојчиња. Според тоа, во паралелката има $\frac{3}{8}\cdot 24=9$ девојчиња.

6. Предниот запчаник на еден велосипед има 21 запци, а задниот има 12 запци. Колку пати ќе се заврти задниот запчаник, додека предниот запчаник се заврти 16 пати?
Решение. При 16 завртувања на предниот запчаник, кај него ќе имаме $16\cdot 21=336$ поместувања на еден забец. Ако за тоа време задниот запчаник се заврти n пати, тогаш кај него ќе имаме $12n$ поместувања на еден забец. Но бројот на поместувањата на запците кај двата запчаника е еднаков, па затоа $12n=336$, од каде добиваме $n=28$.

7. Огнен правел два теста. На вториот тест тој добил 90 поени и резултатот од вториот тест бил 20% подобар од резултатот од првиот тест. Колку поени Огнен повеќе освоил на вториот тест?
Решение. Нека Огнен на првиот тест освоил x поени. Тој на вториот тест освоил 20% повеќе поени, што значи дека освоил $1{,}2x$ поени. Затоа $1{,}2x=90$, од каде добиваме $x=90:1{,}2=75$. Значи, Огнен на вториот тест освоил $90-75=15$ поени повеќе отколку на првиот тест.

8. Бојан и Борко купиле бомбони и си ги поделиле во однос $5:1$. Борко изел една бонбона, а Бојан изел 13 бомбони и им останале еднаков

број бомбони. Колку бомбони купиле Бојан и Борки?

Решение. На почетокот Борко имал x бомбони, а Бојан имал $5x$ бонбони. Кога Борко изел 1 бонбона, а Бојан 13 бомбони, им останале еднаков број бомбони, па затоа $x-1=5x-13$, од каде добиваме $x=3$. Според тоа, двајцата вкупно купиле $3+5\cdot 3=18$ бомбони.

9. Матео во две кошници има 90 јаболки. Тој од едната кошница зел $\frac{1}{4}$ од јаболките и ги преместил во другата кошница, по што во двете кошници имал еднаков број јаболки. По колку јаболки имало на почетокот во секоја кошница?

Решение. Бидејќи на крајот во двете кошници имало еднаков број јаболки, а вкупно биле 90 јаболки, во секоја кошница имало по $90:2=45$ јаболки. Од едната кошница се земени $\frac{1}{4}$ од јаболките и во неа останале $\frac{3}{4}$ од јаболките, а тоа се 45 јаболки. Според тоа, $\frac{1}{4}$ е еднаква на $45:3=15$ јаболки. Значи, во едната кошница имало $45:15=60$ јаболки, а во другата кошница имало $45-15=30$ јаболки.

10. Во една кутија чоколади секоја чоколада е или само со бадем, или само со брусница, или само со кикиритки или само со лешник. Притоа $\frac{1}{5}$ од вкупниот број чоколади се само со бадем, 30% се само со брусница и 20% се само со кикиритки. Колку чоколади има во кутијата, ако девет од чоколадите во кутијата се само со лешник?

Решение. Нека во кутијата има x чоколади. Од условот на задачата следува $\frac{x}{5}+0,3x+0,2x+9=x$, од каде добиваме $x=30$. Значи, во кутијата има 30 чоколади.

11. Пабло добил кутија со бомбони. Првиот ден изел четвртина од бомбоните, а вториот ден изел четвртина од остатокот. Колку бомбони имало на почетокот во кутијата, ако на крајот на вториот ден останале 9 бомбони?

Решение. *Прв начин*. Бидејќи вториот ден изел четвртина од бомбоните кои останале по првиот ден, преостанатите 9 бомбони се $\frac{3}{4}$ од бомбоните кои Пабло ги имал по првиот ден. Според тоа, по првиот ден на Пабло му преостанале $\frac{4}{3}\cdot 9=12$ бомбони. Аналогно како по-

горе добиваме дека овие 12 бомбони се $\frac{3}{4}$ од бомбоните кои биле на почетокот во кутијата, што значи дека на почетокот во кутијата имало $\frac{4}{3}\cdot 12 = 16$ бомбони.

Втор начин. Нека на почетокот во кутијата имало x бомбони. Првиот ден Пабло изел $\frac{1}{4}x$ бомбони, а вториот ден изел $\frac{1}{4}(x-\frac{1}{4}x)=\frac{3}{16}x$ бомбони. Според тоа, $\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}x+9=x$, од каде добиваме $x=16$.

12. Три вида жетони: бели, црни и црвени, се наредени во една низа. Прво биле ставени белите жетони во една низа, потоа меѓу секои два бели жетони е ставен по еден црн жетон, На крајот меѓу секои два жетони во низата е ставен по еден црвен жетон. Определи го бројот на белите жетони, ако во низата биле ставени вкупно 397 жетони.

Решение. *Прв начин*. Нека во низата се ставени x бели жетони. Тогаш бројот на црните жетони е $x-1$. Досега се ставени $2x-1$ жетони, па затоа бројот на црвените жетони е $2x-2$. Според тоа,

$$x+x-1+2x-2=397,$$

од каде добиваме $x=100$. Значи, во низата има 100 бели жетони.

Втор начин.Црвените жетони се за 1 помалку од вкупниот број бели и црни жетони. Значи, во низата има $(397-1):2=198$ црвени жетони. Според тоа, бројот на белите и црните жетони е $397-198=199$. Црни жетони има за 1 помалку од бели жетони. Значи, во низата има $(199-1):2=99$ црни и $199-99=100$ бели жетони.

13. Во дворот на дедо Марко има зајаци и фазани, кои заедно имаат 35 глави и 94 нозе. Колку фазани и колку зајаци има во дворот на дедо Марко.

Решение. *Прв начин*. Ако сите животни се фазани, бидејќи фазаните имаат по 2 нозе, бројот на нозете треба да биде $35\cdot 2=70$. Но, има $94-70=24$ нозе повеќе, па бидејќи зајак има по 2 нозе повеќе од фазан, во дворот има $24:2=12$ зајаци. Конечно, бројот на фазаните е $35-12=23$.

Втор начин. Нека во дворот има x зајаци и y фазани. Од условот на задачата следува $x+y=35$ и $4x+2y=94$. Од првата равенка доби-

ваме $y = 35 - x$ и од втората равенка имаме $4x + 2 \cdot (35 - x) = 90$, од каде следува $2x = 24$, т.е. $x = 12$. Значи, во дворот на дедо Марко има 12 зајаци и $35 - 12 = 23$ фазани.

14. На тестот по Природни науки поставени се 35 прашања. За секое прашање се понудени четири одговори, од кои само еден е точен. Одговорите треба да се заокружат. За секој точен одговор се добива по 5 поени, за неточен одговор се одземаат 2 поени, а за неодговорено прашање се одзема 1 поен. Ана, Марија, Марко, Иво и Петар тврдат дека освоиле 153, 167, 149, 169 и 173 поени соодветно. Кој од нив ја зборува вистината?

Решение. Со t ќе ги означиме точните одговори, со n неточните одговори, а со m неодговорените прашања. Имаме:

- 35 точни прашања $\Leftrightarrow 35 \cdot 5 = 175$,
- 34 точни прашања $\Leftrightarrow \begin{cases} 34t + n = 34 \cdot 5 - 2 = 168, \\ 34t + m = 34 \cdot 5 - 1 = 169, \end{cases}$
- 33 точни прашања $\Leftrightarrow \begin{cases} 33t + 2n = 33 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 161, \\ 33t + n + m = 33 \cdot 5 - 2 - 1 = 162, \\ 33t + 2m = 33 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 163, \end{cases}$
- 32 точни прашања $\Leftrightarrow \begin{cases} 32t + 3n = 32 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 154, \\ 32t + 2n + m = 32 \cdot 5 - 2 \cdot 2 - 1 = 155, \\ 32t + n + 2m = 32 \cdot 5 - 2 - 2 \cdot 1 = 156, \\ 32t + 3m = 32 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 157, \end{cases}$
- 31 точно прашање $\Leftrightarrow \begin{cases} 31t + 4n = 31 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 147, \\ 31t + 3n + m = 31 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 1 = 148, \\ 31t + 2n + 2m = 31 \cdot 5 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 149, \\ 31t + n + 3m = 31 \cdot 5 - 2 - 3 \cdot 1 = 150, \\ 31t + 4m = 31 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 151. \end{cases}$

Бидејќи за најмногу 30 точни одговори бројот на освоените поени е сигурно помал од $30 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 145$, од горните равенства заклучуваме дека вистината ја зборувале Марко и Иво.

15. Третина од лалињата и ги дадов на Шана, петтина на Вишна, шестина доби Соња, а четвртина Дана. Преостанатите шест цветови и ги дадов на мајками. Колку вкупно лалиња имав?

Решение. Нека бројот на лалињата е x. Од условот на задачата ја добиваме равенката

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x+6=x,$$

која е еквивалентна со равенката

$$20x+12x+10x+15x+360=60x,$$

чие решение е $x=120$. Значи, имав 120 лалиња.

16. Ана отпила $\frac{1}{6}$ од филџан полн со црно кафе и го дополнила со млеко. Потоа отпила $\frac{1}{3}$ од филџанот и го дополнила со млеко. Сега отпила $\frac{1}{2}$ од филџанот и го дополнила со млеко, по што го испила целиот филџан. Што испила повеќе Ана, млеко или кафе?

Решение. По првото пиење во филџанот останало $\frac{5}{6}$ и е додадена $\frac{1}{6}$ млеко. По второто пиење во филџанот останало $\frac{2}{3}$ и е додадена $\frac{1}{3}$ млеко. По третото пиење во филџанот останало $\frac{1}{2}$ и е додадена $\frac{1}{2}$ млеко. Значи, вкупното количество млеко кое е додадено е еднакво на $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$ полн филџан и како на почетокот имаме полн филџан кафе заклучуваме дека Ана испила еднакво количество млеко и кафе.

17. Двајца браќа наследиле куќа и стан. Вредноста на куќата е четири пати поголема од вредноста на станот, а браќата сакаат наследството да го поделат на еднакви делови. Ако на едниот од нив му припадне целиот стан, во кој однос треба да ја поделат куќата?

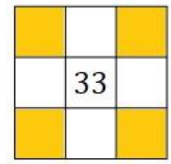
Решение. Нека вредноста на станот е $2x$. Сега, бидејќи вредноста на куќата е четири пати поголема од вредноста на станот, добиваме дека вредноста на куќата е $8x$. Според тоа, вредноста на целиот имот е $2x+8x=10x$, па затоа секој од браќата треба да добие по $10x:2=5x$. Понатаму, бидејќи на едниот брат му припаднал станот, тој веќе добил вредност $2x$, па затоа од куќата тре-ба да добие $5x-2x=3x$. Значи, другиот брат од куќата треба да добие $8x-3x=5x$, од што следува дека куќата треба да ја поделат во однос $5x:3x=5:3$ во корист на братот кој не добил дел од станот.

2. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Определи ја разликата на најмалиот непарен четирицифрен број чиј збир на цифри е 4 и најголемиот парен трицифрен број чиј производ на цифри е 16.

   Решение. Најмалиот непарен четирицифрен број чиј збир на цифри е 4 е бројот 1003, а најголемиот парен трицифрен број чиј производ на цифри е 16 е 812. Нивната разлика е $1003-812=191$.

2. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десно е запишан по еден од броевите 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 и 99. Збировите на трите броја в о полињата во секој ред, односно во секоја колона се меѓусебно еднакви. Во централното поле е запишан бројот 33. Колку е збирот на броевите во четирите обоени полиња?



   Решение. Збирот на сите броеви запишани во табелата е

   $$11+22+33+44+55+66+77+88+99=495.$$

   Затоа во секој ред, односно во секоја колона збирот на броевите е еднаков на $495:3=165$. Според тоа, збирот на двата броја кои недостасуваат во средниот ред е еднаков на $165-33=132$, а исто толку е и збирот на двата броја кои недостасуваат во средната колона. Значи, збирот на броевите во необоените полиња на табелата е еднаков на $2\cdot 132+33=297$. Конечно, збирот на броевите запишани во обоените полиња на табелата е еднаков на $495-297=198$.

3. Збирот на десет последователни броја е 315. Определи го најмалиот и најголемиот од овие броеви.

   Решение. Нека најмалиот број е n. Тогаш најголемиот број е $n+9$, па затоа

   $$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+8)+(n+9)=315,$$

   од каде добиваме

   $$10n+(1+2+3+\ldots+8+9)=315,$$

   т.е. $10n+45=315$. Решението на последната равенка е $n=27$. Значи, најмалиот број е 27, а најголемиот број е $27+9=36$.

4. Збирот на 1259 последователни цели броеви е еднаков на 1259. Определи го најголемиот собирок.

   Решение. Нека x е бројот кој се наоѓа во средината на дадените 1259 броја. Тогаш негови претходници се: $x-1, x-2, x-3, ..., x-629$, а негови следбеници се $x+1, x+2, x+3, ..., x+629$. Според тоа,

   $$x-629+x-628+...+x-1+x+x+1+...+x+628+x+629=1259,$$

   па затоа $1259x=1259$, од каде наоѓаме $x=1$. Значи, најголемиот собирок е $x+629=1+629=630$.

5. Ана ги запишала сите броеви деливи со 2 од 2 до 2022, еден по друг без растојание меѓу броевите. Која цифра се наоѓа на 2021-вото место?

   Решение. Едноцифрените парни броеви зафаќаат 4 места во низата цифри, двоцифрените зафаќаат $45\cdot 2=90$ места, а трицифрените парни броеви зафаќаат $450\cdot 3=1350$ места. Значи, досега се зафатени $4+90+1350=1444$ места.

   До 2021-вото место има уште $2021-1444=577$ места. Сега, бидејќи $577=4\cdot 144+1$ имаме 144 парни четирицифрени броеви, а на 2021-вото место се наоѓа првата цифра од 145-тиот парен четирицфирен број, т.е. паврта цифра од бројот 1288. Значи, бараната цифра е 1.

6. Ако некој број се подели со друг број, се добива количник 2 и остаток 5. Ако збирот на тие броеви се подели со нивната разлика, се добива количник 2 и остаток 7. Определи го збирот на овие броеви.

   Решение. Ако со x го означиме делителот, тогаш деленикот е $2x+5$. Збирот на броевите е $3x+5$, а разликата е $x+5$. Затоа

   $$3x+5=2(x+5)+7,$$

   од каде добиваме $x=12$. Значи, бараниот збир е $3x+5=41$.

7. Дадени се четири природни броеви. Со пресметување на сите можни ненегативни разлики на дадените броеви добиваме 0, 2, 3 и 5. Определи ги овие броеви ако е познато дека збирот на двата поголеми броја е три пати поголем од збирот на двата помали броја.

   Решение. Нека бараните броеви се $a\le b\le c\le d$. Тогаш нивните ненегативни разлики се $b-a, c-a, d-a, c-b, d-b, d-c$. Тие примаат вредности од множеството $\{0,2,3,5\}$, па затоа некои од нив се еднакви и важи $d-a=5$. Разликуваме три случаи:

1) $a=b<c<d$ и тогаш $b-a=0, d-a=d-b, 3(a+b)=c+d$, од каде добиваме $6a=c+a+5$, т.е. $4a=c-a+5$. Бидејќи $c-a+5$ мора да е делив со 4, добиваме $c-a=3$, од каде наоѓаме $a=b=2$, $c=5, d=7$.
2) $a<b=c<d$ и тогаш $b-c=0, d-a=5, c-a=b-a, 3(a+b)=c+d$, од каде наоѓаме $3(a+b)=a+b+5$, т.е. $2(a+\mathrm{b})=5$, што не е можно.
3) $a<b<c=d$ и тогаш $d-c=0, d-a=c-a, 3(a+b)=c+d$, од каде добиваме $4b=b-a+10$. Бидејќи $b-a+10$ мора да е делив со 4, добиваме $b-a=2$, од каде наоѓаме $a=1, b=3, c=d=6$.

8. Филип запишал неколку различни природни броеви чиј збир е еднаков на 100, при што користел само две различни цифри. Колку броеви најмногу можел да запише Филип?

Решение. Постојат 6 броја помали од 100 во чиј запис се среќаваат само две различни цифри и тоа: $a, b, \overline{aa}, \overline{ab}, \overline{ba}, \overline{bb}$. Нивниот збир е еднаков на $a+b+(10a+a)+(10a+b)+(10b+a)+(10b+b)=23(a+b)$, па не може да е еднаков на 100, бидејќи 100 не е делиц со 23. Филип можел да запише пет број, на пример, $1+6+11+16+66=100$.

9. Определи ги сите двоцифрени броеви, кои собрани со бројот 36 се запишуваат со истите цифри, но во обратен редослед?

Решение. Нека бараниот двоцифрен број е $\overline{ab}$. Тогаш $\overline{ab}+36=\overline{ba}$, од каде последователно добиваме

$$10a+b+36=10b+a,$$
$$9a+36=9b,$$
$$a+4=b.$$

Но, a и b се ненултри цифри, па затоа

$$(a,b)\in\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8),(5,9)\},$$

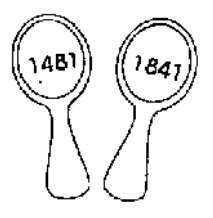
т.е. бараните броеви се 15, 26, 37, 48 и 59.

10. Андреј замислил четирицифрен број. Горјан на тој број му ја избришал цифрата на единиците и кога трицифрениот број, кој го добил, го помножил со избришаната цифра го добил бројот 2020. Кој број го замислил Андреј?

Решение. Едноцифрени делители на бројот 2020 се 1, 2, 4 и 5.

Производите $2020 \cdot 1$ и $1010 \cdot 2$ не ги земаме предвид, бидејќи 2020 и 1010 не се трицифрени броеви, па затоа имаме две можности $404 \cdot 5 = 2020$ и $505 \cdot 4 = 2020$. Значи, бројот кој го замислил Андреј е 4045 или 5054.

11. Да го рзгледаме бројот 1481. Бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е 1841. За два такви броја, ако се различни, ќе велиме дека се огледални. Збирот на два огледални броја е 176. Кои се тие броеви?



Решение. Јасно е дека бараните броеви се двоцифрени. Според тоа, ако едниот број е $\overline{ab} = 10a + b, a \neq b$, тогаш другиот број е $\overline{ba} = 10b + a$. Значи, $(10a + b) + (10b + a) = 176$, од каде добиваме $11a + 11b = 176$, односно $11(a + b) = 176$. Сега, $a + b = 16$ и како a и b се различни цифри, единствена можност е цифрите a и b да се 7 и 9, во некој редослед. Значи,бараните броеви се 79 и 97.

12. Определи ги двоцифрените огледални броеви чија разлика е еднаква на збирот на нивните цифри.

Решение. Нека $a > b$ се цифрите на бараните огледални броеви. За нивната разлика имаме

$$10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b).$$

Сега, од условот на задачата следува $9(a - b) = a + b$, од каде добиваме $9a - a = 9b + b$, односно $4a = 5b$. Но, a и b се цифри, па од последното равенство следува $a = 5$ и $b = 4$, што значи дека бараните броеви се 54 и 45.

13. Определи го најмалиот број запишан со различни цифри, кој е за 396 поголем од својот огледален број.

Решение. Ако бараниот број е двоцифрен запишан со цифрите $a > b$, тогаш бидејќи $a \leq 9$ и $b \geq 1$ разликата со неговиот огледален број е $9(a - b) \leq 9 \cdot 8 = 72$. Според тоа, нема двоцифрен број кој ги задоволува условите на задачата.

Да ги разгледаме трицифрените огледални броеви $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$, $a > c$. Нивната разлика е

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c).$$

Според тоа, $99(a-c)=396$, од каде следува $a-c=4$. Значи, $a=c+4$. Најмалата можна вредност за c е 1 и соодветно $a=5$. Бидејќи се бара најмалиот можен број, тој се добива за $b=0$, па значи бараниот број е 501. Навистина, $501-105=396$.

14. Збирот на двоцифрен и трицифрен број е 177. Збирот на нивните огледални броеви е 483. Кои се тие броеви?

Решение. Нека бараните броеви се $\overline{ab}=10a+b$ и $\overline{cde}=100c+10d+e$. Тогаш нивните огледални броеви се $\overline{ba}=10b+a$ и $\overline{edc}=100e+10d+c$. Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases}100c+10(a+d)+(b+e)=177,\\ 100e+10(b+d)+(a+c)=483.\end{cases}$$

Сега, од првата равенка следува $c=1$ и ако замениме добиваме

$$\begin{cases}10(a+d)+(b+e)=77,\\ 100e+10(b+d)+a=482,\end{cases}$$

па од втората равенка следува $a=2$ и ако замениме добиваме

$$\begin{cases}10d+(b+e)=57,\\ 10e+(b+d)=48,\end{cases}$$

Ако ги одземеме последните две равенки добиваме $9d-9e=9$, т.е. $d=e+1$. Сега, со замена во првата равенка добиваме $11e+b=47$ и како e и b се цифри, единствено решение е $e=4$ и $b=3$. Значи, $d=5$, па бараните броеви се $\overline{ab}=23$ и $\overline{cde}=154$.

15. Збирот на двоцифрен и четирицифрен број е 2750. Збирот на нивните огледални броеви е 8888. Кои се тие броеви?

Решение. Нека бараните броеви се

$$\overline{ab}=10a+b \text{ и } \overline{cdef}=1000c+100d+10e+f.$$

Тогаш нивните огледални броеви се

$$\overline{ba}=10b+a \text{ и } \overline{fedc}=1000f+100e+10d+c.$$

Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases}1000c+100d+10(a+e)+(b+f)=2750,\\ 1000f+100e+10(b+d)+(a+c)=8888.\end{cases}$$

Сега, имајќи предвид дека непознатите се едноцифрени броеви, од првата равенка следува $c=2$, а од втората равенка следува $f=8$ и ако замениме добиваме

$$\begin{cases} 100d + 10(a+e) + b = 742, \\ 100e + 10(b+d) + a = 886. \end{cases}$$

Понатаму, од првата равенка следува $b = 2$, а од втората равенка следува $a = 6$, и ако замениме во првата равенка добиваме

$$10d + e = 68,$$

од каде наоѓаме $d = 6, e = 8$. Конечно, бараните броеви се $\overline{ab} = 62$ и $\overline{cdef} = 2688$.

16. Збирот на трицифрен и четирицифрен број е 1576. Збирот на нивните огледални броеви е 4375. Кои се тие броеви?

Решение. Нека бараните броеви се

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c \text{ и } \overline{defg} = 1000d + 100e + 10f + g.$$

Тогаш нивните огледални броеви се

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a \text{ и } \overline{gfed} = 1000g + 100f + 10e + d.$$

Од условот на задачата следува

$$\begin{cases} 1000d + 100(a+e) + 10(b+f) + (c+g) = 1576, \\ 1000g + 100(c+f) + 10(b+e) + (a+d) = 4375. \end{cases}$$

Од првата равенка следува $d = 1$, па ако замениме во втората равенка добиваме $1000g + 100(c+f) + 10(b+e) + a = 4374$, од каде наоѓаме $a = 4$. Сега, со замена во равенките, по средувањето добиваме

$$\begin{cases} 100e + 10(b+f) + c + g = 176, \\ 100g + 10(c+f) + b + e = 437. \end{cases}$$

Понатаму, постапувајќи како во претходните задачи добиваме дека $\overline{abc} = 462$ и $\overline{defg} = 1114$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

17. Определи ги два огледални броја чиј производ е 65125.

Решение. Бидејќи $99 \cdot 99 < 10000 < 65125 < 1000000 = 1000 \cdot 1000$, бараните броеви се трицифрени. Според условот нивниот производ завршува на цифрата 5, што значи дека цифрата на единиците на едниот број е 5, т.е. тој е од видот $\overline{ab5}$. Според тоа, другиот број е $\overline{5ba} > 500$. Значи, $\overline{ab5} \cdot \overline{5ba} > \overline{ab5} \cdot 500$, односно $\overline{ab5} \cdot 500 < 65125$, од каде следува $\overline{ab5} < 131$. Единствени броеви помали од 131 кои имаат цифра на единиците 5 се 105, 115 и 125. Притоа, $125 \cdot 521 = 65125$, што значи дека бараните броеви се 125 и 521.

18. Кој четирицифрен број помножен со 4 го дава својот огледален број.

Решение. Нека бараниот четирицифрен број е $\overline{abcd}$. Од условот на здачата следува $\overline{abcd}\cdot 4=\overline{dcba}$. Јасно, $d\le 9$, па затоа $a\le 2$. Но, производот на d и 4 не може да е 1, па затоа $a=2$ и оттука следува дека $d=8$. Сега имаме $\overline{2bc8}\cdot 4=\overline{8cb2}$, од каде лесно се добива дека $b=1$ и $c=7$. Значи, $\overline{abcd}=2178$.

19. Галена требало на својот комјутер да отчука трицифрен број. При чукањето пред тој број по грешка ја отчукала цифрата 6 и така добила 31 пати поголем број. Кој трицифрен број требало да го отчука Галена?

Решение. Нека претпоставиме дека Галена требало да го отчука трицифрениот број $\overline{abc}$. Таа пред бројот ја отчукала цифрата 6, т.е. го отчукала бројот $\overline{6abc}=6000+\overline{abc}$, па затоа важи $6000+\overline{abc}=31\cdot\overline{abc}$, од каде добиваме $31\cdot\overline{abc}-\overline{abc}=6000$, т.е. $30\cdot\overline{abc}=6000$, односно $\overline{abc}=200$.

20. При собирање на два броја Илија згрешил, така што на крајот на едниот број ја допишал цифрата 6 и добил збир 6645, наместо 2004. Кои се тие броеви?

Решение. Нека едниот број е x, а другиот број е y. Тогаш

$$x+y=2004,\ \overline{x6}+y=6645,$$

па затоа

$$x+y=2004,\ 10x+6+y=6645.$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата, добиваме $9x=4635$, од каде наоѓаме $x=515$. Сега, $y=2004-515=1489$.

21. Ако на еден трицифрен број му избришеме една цифра, добиваме двоцифрен број кој е шест пати помал од почетниот трицифрен број. Определи ги броевите со ова својство.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот трицифрен број. Можни се три случаи.

1) Ако ја избришеме цифрата на стотките добиваме $\overline{abc}=6\cdot\overline{bc}$, од каде по средувањето ја добиваме еквивалентната равенка

$20a = 10b + c$. Сега, од деливоста со 10 следува $c = 0$, па затоа $20a = 10b$, т.е. $2a = b$, па како a и b се цифри добиваме

$$(a,b) = (1,2), (2,4), (3,6), (4,8),$$

па во овој случај решенија се броевите 120, 240, 360 и 480.

2) Ако ја избришеме цифрата на десетките добиваме $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{ac}$, од каде по средувањето ја добиваме еквивалентната равенка $8a + 2b = c$. Сега, бидејќи $a \neq 0$ и c е цифра, единствено решение е $a = 1, b = 0, c = 8$, па во овој случај решение е бројот 108.

3) Ако ја избришеме цифрата на единиците добиваме $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{ab}$, од каде по средувањето ја добиваме равенката $40a + 4b + c = 0$, па како a,b,c се цифри добиваме $a = b = c = 0$, што не е решение бидејќи не се добива трицифен број.

22. На таблата е запишан трицифрен број. Од него се добиени три двоцифрени броја, така што прво е пречкртана првата цифра, потоа од почетниот број е пречкртана втората цифра и на крајот од почетниот број е пречкртана третата цифра. Збирот на така добиените броеви е еднаков на 293. Определи го почетниот трицифрен број.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот број. Според условот на задачата имаме

$$\overline{bc} + \overline{ac} + \overline{ab} = 293,$$

т.е.

$$20a + 11b + 2c = 293.$$

Ако $a \leq 8$, тогаш имаме

$$293 = 20a + 11b + 2c \leq 20 \cdot 8 + 11 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 277,$$

што не е можно. Значи, $a = 9$. Сега, добиваме

$$11b + 2c = 113,$$

од каде лесно следува дека $b = 9, c = 7$. Конечно, бараниот број е 997.

23. Определи го најмалиот повеќецифрен број кој започнува со цифрата 1 и е таков што ако цифрата 1 ја преместиме по цифрата на единиците, добиваме број кој е трипати поголем од почетниот број.

Решение. Нека претпоставиме дека постои таков двоцифрен број, т.е. дека бројот $\overline{1x}$ го задоволува условот на задачата. Тогаш $\overline{x1} = 3 \cdot \overline{1x}$, од каде добиваме $10x + 1 = 3(10 + x)$, т.е. $7x = 29$, што не е можно бидејќи 7 не е делител на 29.

Нека претпоставиме дека постои таков трицифрен број $100+x$. Тогаш треба да важи $10x+1=3(100+x)$, односно $7x=299$, што не е можно бидејќи 7 не е делител на 299.

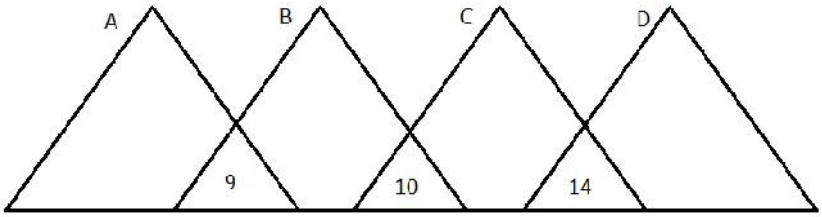
Нека претпоставиме дека постои таков четирицифрен број $1000+x$. Тогаш треба да важи $10x+1=3(1000+x)$, односно $7x=2999$, што не е можно бидејќи 7 не е делител на 2999.

Нека претпоставиме дека постои таков петцифрен број $10000+x$. Тогаш треба да важи $10x+1=3(10000+x)$, односно $7x=29999$, што не е можно бидејќи 7 не е делитек на 29999.

Нека претпоставиме дека постои таков шестцифрен број $100000+x$. Тогаш треба да важи $10x+1=3(100000+x)$, односно $7x=299999$, од каде добиваме $x=42857$.

Според тоа, бројот 142857 е најмалиот број со саканите својства.

24. На секој од триаголниците A,B,C,D му е приружен по еден природен број од 1 до 9. Придружените броеви се меѓусебно различни. Збировите на броевите доделени на одделните триаголници се запишани во нивните пресеци. Определи ги броевите A,B,C,D.



Решение. Нека A,B,C,D се броевите доделени на триаголниците A,B,C,D, соодветно. Имаме: $B=9-A$, $C=A+1$ и $D=13-A$. Од $B\geq 1$ и $D\leq 9$ следува $A\leq 8$ и $A\geq 4$.

Ако $A=4$, тогаш $B=C=5$ и $D=9$, што не е можно бидејќи четирите придружени броја треба да се различни.

Ако $A=5$, тогаш $B=4, C=6$ и $D=8$.

Ако $A=6$, тогаш $B=3$ и $C=D=7$, што не е можно бидејќи четирите придружени броја треба да се различни.

Ако $A=7$, тогаш $B=2, C=8, D=6$.

Ако $A=9$, тогаш $B=1, C=9, D=5$.

25. Филип замислил пет броја и ги пресметал збирот на секои два од овие броеви. Така вкупно добил 10 збира, меѓу кои најмалите се 32, 36 и 37, а најголемите се 48 и 51. Определи го најголемиот број кој го замислил Филип.

Решение. Нека Филип ги замислил броевите $a<b<c<d<e$. Од условот на задачата следува $a+b=32, a+c=36, c+e=48, d+e=51$. Третиот по големина број е $a+d$ или $b+c$. Но,

$$a+d=(a+c)+(d+e)-(c+e)36+51-48=39,$$

па затоа $b+c=37$. Оттука следува

$$e=(c+e)-\frac{(a+c)+(b+c)-(a+b)}{2}=48-\frac{36+37-32}{2}=\frac{55}{2}.$$

Забелешка. Наместо последниот чекор во даденото решение, решавајќи го системот равенки

$$a+b=32, a+c=36, c+e=48, d+e=51 \text{ и } b+c=37,$$

наоѓаме $a=\frac{31}{2}$, $b=\frac{33}{2}$, $c=\frac{41}{2}$, $e=\frac{55}{2}$ и $d=\frac{47}{2}$.

26. Бројот a е за 10% поголем од бројот $b=\underbrace{77...77}_{m}0$, но збирот на цифрите на a е за 20% помал од збирот на цифрите на b. Определи го m.

Решение. Лесно се гледа дека $a=8\underbrace{55...55}_{m-2}47$. Збирот на цифрите на a е $8+5(m-2)+4+7=5m+9$, а збирот на цифрите на b е $7m$. Затоа $5m+9=\frac{8\cdot 7m}{10}$, од каде добиваме $m=15$.

27. Определи ги сите трицифрени броеви кои се 5 пати поголеми од производот на своите цифри.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{abc}$. Тогаш $\overline{abc}=5abc$, односно $100a+10b+c=5abc$. Од последното равенство следува $5\mid c$ и како $c\neq 0$, добиваме $c=5$. Според тоа, $100a+10b+5=25ab$, односно $20a+2b+1=5ab$. Затоа, $5\mid(2b+1)$, што значи $2b+1=5$ или $2b+1=15$. Од $2b+1=5$, следува $b=2$, а од $2b+1=15$ следува $b=7$. Од $20a+2b+1=5ab$, за $b=2$ добиваме $a=-\frac{1}{2}$, што не е можно, а за $b=7$ добиваме $a=1$. Според тоа, единствено решение на задачата е бројот 175.

28. Од сите трицифрени броеви определи го бројот кој поделен со збирот на своите цифри дава најголем можен природен број.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Имаме

$$100x + 10y + z = m(x + y + z),$$
$$x(100 - m) + y(10 - m) + z(1 - m) = 0.$$

Понатаму, бидејќи $x > 0, 0 \le y, z \le 9$, од последното равенство следува дека $m \le 100$, па како го бараме најголемиот можен број m добиваме $m = 100$ и притоа важи $90y + 99z = 0$, од каде следува $y = z = 0$. Конечно, бараниот број е $\overline{xyz} = 900$.

29. Збирот на неколку последователни природни броеви е трицифрен број кој е запишан со исти цифри. Колку природни броеви се собрани?

Решение. Нека се собрани k броеви и нека нивниот збир е трицифрениот број $\overline{aaa}$. Тогаш

$$1 + 2 + \ldots + k = \overline{aaa},$$
$$\frac{k(k+1)}{2} = 111a,$$
$$k(k+1) = 222a,$$
$$k(k+1) = 6 \cdot 37a.$$

Јасно, единствена можност десната страна во последното равенство да е производ на два последователни броја е за $a = 6$. Според тоа, $k(k+1) = 36 \cdot (36+1)$, односно $k = 36$.

30. Цифрата на единиците на еден шестцифрен број е 7. Ако таа цифра ја преместиме на прво место, ќе добиеме шестцифрен број, кој е пет пати поголем од даденият. Кој е тој број?

Решение. *Прв начин*. Нека бројот е $\overline{abcde7}$. Од условот на задачата следува равенката

$$5 \cdot \overline{abcde7} = \overline{7abcde},$$

која последователно е еквивалентна со равенките

$$5 \cdot (10 \cdot \overline{abcde} + 7) = 700000 + \overline{abcde}$$
$$50 \cdot \overline{abcde} + 35 = 700000 + \overline{abcde}$$
$$49 \cdot \overline{abcde} = 699965$$
$$\overline{abcde} = 14285.$$

Според тоа, бараниот број е 142857.

Втор начин. Нека бројот е $\overline{abcde7}$. Од условот на задачата следува

$$5\cdot\overline{abcde7}=\overline{7abcde}.$$

Цифрата на единиците на производот на левата страна е 5, па затоа $e=5$. Понатаму, бидејќи цифрата на единиците на $5\cdot5+3=28$ е 8, добиваме $d=8$. Сега, од $5\cdot8+2=42$ следува дека $c=2$, од $5\cdot2+4=14$ следува $b=4$ и конечно од $5\cdot4+1=21$ следува $a=1$. Навистина, $142857\cdot5=714285$.

31. Определи ги сите седумцифрени броеви кои стануваат 46 пати помали кога ќе им се избрише првата цифра од лево.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{xabcdef}$. По бришењето на првата цифра од лево го добиваме бројот $y=\overline{abcdef}$. Сега имаме

$$\overline{xabcdef}=\overline{x000000}+\overline{abcdef}=10^6x+y,$$

па затоа $10^6x+y=46y$, односно $10^6x=45y$. Изразот на десната страна е делив со 9, па како 10^6 не е делив ниту со 3 ниту со 9, добиваме $x=9$. Оттука следува $y=\frac{10^6\cdot9}{45}=200000$. Конечно, единствено решение на задачата е бројот 9200000.

32. Збирот на шеснаесет последователни броеви меѓу кои е и бројот n, е петнаесет пати поголем од бројот n. Определи за кои броеви n е ова можно.

Решение. Најмалиот од шеснаесетте последователни броеви да го означиме со x. Тогаш важи

$$x+(x+1)+...+(x+15)=15(x+k),$$

каде $n=x+k$ за некој $k\in\{0,1,2,...,15\}$. Горната равенка е еквивалентна со равенката

$$16x+120=15x+15k,$$

т.е. со равенката $x=15(k-8)$, Сега, бидејќи x е природен број, мора разликата $k-8$ да е природен број, што значи дека мора да е $k>8$. Можни се следниве случаи:

- $k=9$ и тогаш $x=15\cdot(9-8)=15$, па затоа $n=x+k=24$, односно $15+16+...+30=15\cdot24$,
- $k=10$ и тогаш $x=15\cdot(10-8)=30$, па затоа $n=x+k=40$, односно $30+31+...+45=15\cdot40$,

- $k=11$ и тогаш $x=15\cdot(11-8)=45$, па затоа $n=x+k=56$, односно $45+46+...+60=15\cdot 56$,
- $k=12$ и тогаш $x=15\cdot(12-8)=60$, па затоа $n=x+k=72$, односно $60+61+...+75=15\cdot 72$,
- $k=13$ и тогаш $x=15\cdot(13-8)=75$, па затоа $n=x+k=88$, односно $75+76+...+90=15\cdot 88$,
- $k=14$ и тогаш $x=15\cdot(14-8)=90$, па затоа $n=x+k=104$, односно $90+91+...+105=15\cdot 104$,
- $k=15$ и тогаш $x=15\cdot(15-8)=105$, па затоа $n=x+k=120$, односно $105+106+...+120=15\cdot 120$,

Конечно, бараните броеви се: 24, 40, 56, 72, 88, 104 и 120.

33. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што

$$4\cdot\overline{abcd}+30=\overline{dcba}.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$4(1000a+100b+10c+d)+30=1000d+100c+10b+a,$$
$$3999a+390b+30=996d+60c,$$
$$1333a+130b+10=332d+20c.$$

Ако $a\geq 3$, тогаш левата страна на последната равенка е поголема или еднаква на $3\cdot 1333=3999$, а најголемата можна вредност на десната страна е $9\cdot 332+9\cdot 20<3999$, што не е можно.

1) Нека $a=2$. Тогаш

$$1333\cdot 2+130b+10=332d+20c,$$
$$2676+130b=332d+20c,$$
$$1338+65b=166d+10c.$$

Ако $d\leq 7$, тогаш најголемата можна вредност на десната страна е $166\cdot 7+10\cdot 9<1338$, па затоа $d\geq 8$.

За $d=8$ добиваме

$$1338+65b=166\cdot 8+10c,$$
$$10+65b=10c,$$
$$2+13b=2c,$$
$$b=0, c=1,$$

што значи дека $\overline{abcd}2018$.

2) Нека $a=1$. Тогаш $1333+130b+10=332d+20c$, што не е можно

бидејќи 1333 е непарен број.

Значи, единствено решение на задачата е бројот 2018.

34. Кој број треба да се одземе од броителот и од именителот на дропката $\frac{1}{2012}$ за да се добие дропката $\frac{1}{2013}$?

Решение. Нека бараниот број е x. Тогаш последователно добиваме

$$\frac{1-x}{2012-x}=\frac{1}{2013},$$
$$2013(1-x)=2012-x,$$
$$2013-2013x=2012-x,$$
$$2013x-x=2013-2012,$$

т.е. $x=\frac{1}{2012}$ е бараниот број.

35. Дадени се дропките $\frac{43}{337}$ и $\frac{6}{47}$. Кој број треба да се одземе и од броителот и од именителот на помалата дропка за да се добие дропка која е еднаква на поголемата дропка?

Решение. Имаме $\frac{43}{337}-\frac{6}{47}=\frac{43\cdot 47-337\cdot 6}{47\cdot 337}=-\frac{1}{47\cdot 337}<0$, па затоа $\frac{43}{337}<\frac{6}{47}$. Ако бројот кој го одземаме го означиме со x, ја добиваме равенката $\frac{43-x}{337-x}=\frac{6}{47}$. Решението на последната равенка е $x=-\frac{1}{41}$.

36. Збирот на два броја и нивниот збир е $\frac{40}{21}$. Определи ги собирците ако апсолутната вреност на едниот собирок е четири пати поголема од апсолутната вредност на другиот собирок.

Решение. Собирците да ги оззачиме со a и b. Според условот на здачата $a+b+(a+b)=\frac{40}{21}$, од каде добиваме дека $a+b=\frac{20}{21}$. Понатаму, $|a|=|4b|$, па затоа $a=4b$ или $a=-4b$.

Во првиот случај имаме $5b=\frac{20}{21}$, па затоа $b=\frac{4}{21}$, $a=\frac{16}{21}$.

Во вториот случај имаме $-3b=\frac{20}{21}$, па затоа $b=-\frac{20}{63}$, $a=\frac{80}{63}$.

37. Броителите на три позитивни дропки се однесуваат како $1:2:8$, а именителите како $1:3:11$. Збирот на трите дропки е $\frac{79}{88}$. Определи ги овие дропки.

Решение. Бараните дропки се $\frac{a}{b}, \frac{2a}{3b}, \frac{8a}{11b}$, каде $a \neq 0, b \neq 0$ се природни броеви. Имаме $\frac{a}{b} + \frac{2a}{3b} + \frac{8a}{11b} = \frac{79}{88}$, од каде добиваме $\frac{79a}{33b} = \frac{79}{88}$, односно $\frac{a}{b} = \frac{3}{8}$. Според тоа, бараните дропки се $\frac{a}{b} = \frac{3}{8}$, $\frac{2a}{3b} = \frac{6}{24}, \frac{8a}{11b} = \frac{24}{88}$.

38. Разликата на два рационални броја е $-371,52$. Ако на намалениот му се помести децималната запирка за едно место лево се добива намалителот. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека x е намалителот. Според условот на задачата намаленикот се добива така што децималната запирка на намалителот се помести за едно место на десно, па затоа намаленикот е $10x$. Значи,

$$10x - x = -371,52$$
$$9x = -371,52$$
$$x = -41,28.$$

Конечно, намалителот е $-41,28$, а намаленикот е $-412,8$.

39. Три броја се однесуваат како $1,5 : 0,625 : \frac{7}{12}$. Определи ги овие броеви ако првиот број е за 21 поголем од збирот на другите два броја.

Решение. Со a, b, c да ги означиме бараните броеви. Според условот на здачата имаме $a : b : c = 1,5 : 0,625 : \frac{7}{12}$ и $a = 21 + b + c$. Од првиот услов следува $a : b : c = 18 : 7,5 : 7 = k$, па затоа $a = 18k, b = 7,5k, c = 7k$. Заменуваме во вториот услов и добиваме $18k = 21 + 7,5k + 7k$, од каде наоѓаме $k = 6$. Според тоа, бараните броеви се

$$a = 18 \cdot 6 = 108, b = 7,5 \cdot 6 = 45 \text{ и } c = 7 \cdot 6 = 42.$$

40. Ако на некој трицифрен природен број запишан со различни цифри му го додадеме бројот запишан со истите цифри во обратен редослед и намален за 50%, ќе добиеме нов трицифрен природен број. Кој трицифрен број треба да го избереме така што по извршените пресметувања ќе добиеме најголем можен трицифрен природен број?

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот трицифрен број, каде a, b, c се цифри и $a \neq 0$. По извршените операции ќе добиеме:

$$\overline{abc} + \frac{1}{2}\overline{cba} = 100a + 10b + c + 50c + 5b + 0,5a = 100,5a + 15b + 51c.$$

Бидејќи резултатот треба да природен број, цифрата a мора да е

парна, т.е. $a \in \{2,4,6,8\}$.

- Нека $a=2$. Тогаш разгледуваниот број е $201+15b+51c$. Овој збир прима најголема вредност ако $c=9$ и $b=8$ и таа е еднаква на $201+120+459=780$.
- Нека $a=4$. Тогаш разгледуваниот број е $402+15b+51c$. Овој збир прима најголема вредност ако $c=9$ и $b=8$ и таа е еднаква на $402+120+459=981$.
- Нека $a=6$. Тогаш разгледуваниот број е $603+15b+51c$ и треба да важи $603+15b+51c \le 999$, односно $15b+51c \le 396$, од каде добиваме $c \le 7$. За $c=7$ имаме $15b+51\cdot 7 \le 396$, т.е. $15b \le 39$, па затоа $b=2$ и во овој случај имаме збир 990. За $c=6$ имаме $15b+51\cdot 6 \le 396$, па затоа $b=6$, но $b=c=6$, па овој случај отпаѓа. За $c=5$ имаме $15b+51\cdot 5 \le 396$, па затоа $b=9$ и во овој случај имаме збир 993. Јасно, за $c \le 4$ ќе имаме $b=9$ и тогаш добиените збирови ќе се помали од 993.
- Нека $a=8$. Тогаш разгледуваниот збир е $804+15b+51c$ и треба да важи $804+15b+51c \le 999$, односно $15b+51c \le 195$. Од каде добиваме $c \le 3$. За $c=3$ имаме $15b+51\cdot 3 \le 195$, па затоа $b=2$ и во овој случај имаме збир 987. За $c=2$ имаме $15b+51\cdot 2 \le 195$, па затоа $b=6$ и во овој случај имаме збир 996. За $c=1$ имаме $15b+51\cdot 1 \le 195$, па затоа $b=9$ и во овој случај имаме збир 990. Јасно, за $c=0$ ќе имаме $b=9$ и тогаш добиениот збир ќе биде помал од 990.

Од претходните разгледувања следува дека најголем можен збир ќе се добие ако го избереме бројот 862.

41. Двоцифрените броеви од 10 до 99 се запишани во некој редослед $\overline{a_1b_1}, \overline{a_2b_2}, ..., \overline{a_{90}b_{90}}$. Определи го бројот $\overline{a_1b_1a_2b_2}$ ако важи

$$\overline{a_1b_1a_2b_2} = \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + ... + \overline{a_{90}b_{90}}. \qquad (1)$$

Решение. Имаме

$$10+11+12+...+99 = 1+2+...+99-(1+2+...+9)$$
$$= \frac{99\cdot 100}{2} - \frac{9\cdot 10}{2} = 4950-45 = 4905,$$

па затоа од (1) следува

$$\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + ... + \overline{a_{90}b_{90}} = 4905,$$
$$\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_1b_1a_2b_2} = 4905,$$

$$\overline{a_1b_1}+\overline{a_2b_2}+100\overline{a_1b_1}+\overline{a_2b_2}=4905,$$
$$101\overline{a_1b_1}+2\overline{a_2b_2}=4905.$$

Бидејќи $101\cdot 49=4949>4905$, заклучуваме дека $\overline{a_1b_1}\le 48$. Понатаму, $2\overline{a_2b_2}$ е парен број и $2\overline{a_2b_2}\le 198$. Но, збирот $101\overline{a_1b_1}+2\overline{a_2b_2}$ е непарен број, па затоа $101\overline{a_1b_1}$ е непарен број и

$$101\overline{a_1b_1}=4905-2\overline{a_2b_2}\ge 4905-198=4707.$$

Значи, $\overline{a_1b_1}$ е непарен број и $\overline{a_1b_1}\ge\frac{4707}{101}>46$.

Според тоа, $\overline{a_1b_1}$ е непарен број и $46<\overline{a_1b_1}\le 48$, па затоа $\overline{a_1b_1}=47$. Сега, $2\overline{a_2b_2}=4905-101\overline{a_1b_1}=4905-4747=158$, т.е. $\overline{a_2b_2}=79$, па затоа $\overline{a_1b_1a_2b_2}=4779$.

42. Ана замислила пет природни броја (кои не мора да се различни), а потоа ги пресметала сите можни збирови на четири од тие пет броја, по што ги добила броевите 29, 33 и 42. Кои броеви ги замислила Ана?

Решение. Нека Ана ги замислила броеите a,b,c,d,e. Четири броја од пет дадени броја можеме да избереме на пет начини. Значи, Ана ги добила збировите

$$S_a=b+c+d+e,$$
$$S_b=a+c+d+e,$$
$$S_c=a+b+d+e,$$
$$S_d=a+b+c+e,$$
$$S_e=a+b+c+d,$$

каде $S_a,S_b,S_c,S_d,S_e\in\{29,33,42\}$. Без ограничување на општоста можеме да земеме

$$S_a=29,S_b=33,S_c=42,S_d=x,S_e=y,$$

каде $x,y\in\{29,33,42\}$. Да ставиме $S=a+b+c+d+e$. Тогаш

$$S_a+S_b+S_c+S_d+S_e=x+y+104$$

и

$$S_a+S_b+S_c+S_d+S_e=4(a+b+c+d+e)=4S,$$

па затоа $4S=x+y+104$, т.е. $4(S-26)=x+y$. Значи, збирот $x+y$ треба да е делив со 4. Понатаму, од $x,y\in\{29,33,42\}$ следува дека $x+y\in\{58,62,66,71,75,84\}$ и како $4\mid x+y$, добиваме $x+y=84$. Спо-

ред тоа, $x = y = 42$, односно $S_c = S_d = S_e = 42$, од каде следува $c = d = e$. Од $x = y = 42$ и $4(S-26) = x + y$ добиваме $S = 47$. Конечно,

$$a = S - S_a = 47 - 29 = 18,$$
$$b = S - S_b = 47 - 33 = 14,$$
$$c = S - S_c = 47 - 42 = 5,$$
$$d = S - S_d = 47 - 42 = 5,$$
$$e = S - S_e = 47 - 42 = 5.$$

Значи, Ана ги замислила броевите 5, 5, 6, 14 и 18.

43. Страниците на една книга се нумерирани со броевите од 1 до 100. Од книгата се скинати неколку листови и притоа се покажало дека збирот на броевите со кои тие страни се нумерирани е еднаков на 4949. Колку листови се скинати?

Решение. Бидејќи секој лист е нумериран со броеви $2n-1$ и $2n$, заклучуваме дека збирот на броевите со кои се нумерирани сраните на секој лист е $4n-1$, каде $1 \le n \le 50$. Нека се останале k нескинати листови. Тогаш збирот на броевите со кои тие се нумерирани е еднаков на

$$(4n_1 - 1) + (4n_2 - 1) + ... + (4n_k - 1) = (1 + 2 + 3 + ... + 100) - 4949,$$

т.е.

$$4(n_1 + n_2 + ... + n_k) - k = 101.$$

Остатокот при делењето на 101 со 4 е 1, па затоа и остатокот при делењето на $4(n_1 + n_2 + ... + n_k) - k$ со 4 е 1. Тоа значи дека остатокот при делењето на $-k$ со 4 е 1, односно остатокот при делењето на k со 4 е 3. Според тоа, $k \in \{3,7,11,15,...,87,91,95,99\}$. Бидејќи за $k \ge 7$ имаме

$$4(n_1 + n_2 + ... + n_k) - k \ge 4(1 + 2 + 3 + ... + 7) - 7 = 105 > 101,$$

заклучуваме дека единствено можно решение е $k = 3$, што значи дека од книгата се скинати $50 - 3 = 47$ листови.

44. Бројот n е трицифрен и n^3 завршува на 777. Определи го бројот n.

Решение. Лесно се проверува дека цифрата на единиците на бројот n^3 е 7, ако и само ако цифрата на единиците на бројот n е 3. Значи $n = 10a + 3$ и оттука добиваме

$$n^3 = (10a + 3)^3 = 1000a^3 + 900a^2 + 270a + 27.$$

Според тоа, цифрата на десетките на бројот n^3 е 7, ако и само ако цифрата на единиците на бројот $7a+2$ е 7, т.е.ако и само ако цифрата не единиците на бројот a е 5. . Споед тоа, $n=100b+53$ и тогаш

$$n^3=(100b+53)^3=10^6b^3+3\cdot 53\cdot 10^4b^2+3\cdot 2809\cdot 100b+148877\,.$$

Цифрата на стотките на бројот n^3 е 7, ако и само ако цифрата на единиците на бројот $7b+8$ е 7, т.е. $b=7$. Конечно, бидејќи n е трицифрен број добиваме $n=753$.

45. Филип замислил еден реален број. Производот на неговиот квадрат и квадратот на неговата трикратна вредност е еднаков на 36. Збирот на замисленият број и неговата апсолутна вредност е еднаков на 0. Кој број го замислил Филип?

Решение. Со x да го означиме замисленият број. Имаме $x^2(3x)^2=36$, од каде добиваме $x^4=4$, односно $x^2=2$. Понатаму, $x+|x|=0$, што значи дека замисленият број е негативен, па од $x^2=2$ следува $x=-\sqrt{2}$.

46. Определи ги сите природни броеви n за кои е можно некои броеви од множеството $\{1,2,3,...,n\}$ да се зголемат за 1, а сите останати да се намалат за 1, така што производот на броевите не се менува.

Решение. За $n=1$ очигледно тоа не е можно. Исто така, за $n=3$ не е можно некои од броевите 1, 2, 3 да се зголемат за 1, а останатите броеви да се намалат за 1 и повторно да се добие производ 6 (бројот 1 мора да се зголеми на 2, бидејќи во спротивно производот ќе биде 0, но тогаш не е можно да се добие производот на другите два броја да е 3).

Понатаму, за $n=2k$ броевите ги делиме на парови:

$$(1,2),(3,4),(5,6),...,(2k-1,2k)\,,$$

а потоа во секој пар помалиот број го зголемуваме за 1, а поголемиот го намалуваме за 1, со што ги добиваме паровите броеви:

$$(2,1),(4,3),(6,5),...,(2k,2k-1)\,.$$

Јасно, производот на сите броеви во двата случаи е еднаков. Значи, сите парни броеви го задоволуваат условот на здачата.

Понатаму, за $n=5$ подредената петорка $(1,2,3,4,5)$ ја трансформираме во подредената петорка $(2,1,2,5,6)$ чиј производ е

$$2\cdot 1\cdot 2\cdot 5\cdot 6=120=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,.$$

Според тоа, решение на задачата е и бројот $n=5$. Сега за непарните броеви $n>5$ првите пет броја $(1,2,3,4,5)$ ги трансформираме во $(2,1,2,5,6)$, а преостанатите $n-5$ броеви кои ги има парен број ги делиме во парови: $(6,7),(8,9),...,(n-1,n)$ и во секој пар првиот број го зголемуваме за 1, а вториот број го намалуваме за 1, со што ги добиваме паровите: $(7,6),(9,8),...,(n,n-1)$. На овој начин производот на првите пет броја не се менува, а исто така не се менува и прозводот на преостанатите $n-5$ броја. Значи, решение на задачата се и сите непарни броеви поголеми од 5.

Конечно, решение на задачата се сите природни броеви n различни од 1 и 3.

3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

1. Стоногалката Цаци има точно сто нозе, 50 леви и 50 десни. Секое утро таа обува 50 пара чевли и така што прво ги обува сите леви, а потоа сите десни. За обување на секој лев чевел и треба 1 секунда. Но, тогаш се уморува па за десните чевли и треба повеќе време. За првиот десен чевел и треба една секунда, за вториот три, за третиот пет и така до последниот десен чевел, секој пат две секунди повеќе отколку претходно. Но, навечер, кога ги собува чевлите, вкупно и треба три пати помалку време отколку за обување. Колку секунди и требаат на стоногалката Цаци за собување на чевлите?

   Решение. За обување на сите леви чевли на стоногалката Цаци и требаат $50 \cdot 1 = 50\ s$. Понатаму, за обување на сите десни чевли на Цаци и требаат

   $$1+3+5+...+95+97+99 = (1+99)+(3+97)+(5+95)+...+(49+51)$$
   $$= 25 \cdot 100 = 2500\ s.$$

   Значи, за обување на сите чевли на Цаци и требаат $2500 + 50 = 2550\ s$. Конечно, за собување на сите чевли на стоногалката Цаци и се потребни $2550 : 3 = 850\ s$.

2. Матео поставил точно време на својот часовник на пладне. Еден час потоа часовникот на Матео покажал $12\ h\ 57\ \text{min}\ 36\ s$. Часовникот на Матео продолжил да задоцнува на истиот начин. Колку е часот во моментот кога часовникот ќе покаже $19\ h\ 30\ \text{min}$?

   Решение. По $60\ \text{min}$ според часовникот на Матео поминале

   $$57\ \text{min}\ 36\ s = 57\frac{36}{60}\ \text{min} = 57,6\ \text{min}.$$

   Од пладне до $19\ h\ 30\ \text{min}$ според часовникот ма Матео ќе поминат $7\ h\ 30\ \text{min} = 450\ \text{min}$. Овие $450\ \text{min}$ всушност покажуваат дека поминале $\frac{450}{57,6}h$. Според тоа, кога кога часовникот на Матео ќе покажува $19\ h\ 30\ \text{min}$ од пладне поминале:

   $$\frac{450}{57,6} \cdot 60 = 7,8175 \cdot 60 = 468,75\ \text{min} = 7\ h\ 48\ \text{min}\ 45\ s,$$

   па затоа вистинското време е $19\ h\ 48\ \text{min}\ 45\ s$.

3. На прашањето колку е часот таткото му одговорил на синот: Четвртината од изминатото време и половина од преостанатото време на овој ден го даваат точното време. Колку бил часот?

   Решение. Ако t го означиме точното време, ја добиваме равенката

   $$\frac{t}{4}+\frac{24-t}{2}=t\,,$$

   од каде добиваме

   $$t=\frac{48}{5}=9{,}6\,h=9\,h\,36\,\min\,.$$

4. Андреј го прашал Горјан: „Колку е часот сега?“, а Горјан одговорил: „Од 3 часот попладне до пред 50 минути, помина четири пати повеќе време отколку што е времето од сега до 6 часот попладне.“ Колку часот е сега?

   Решение. Нека од сега до 6 часот попладне има x минути. Од сега, наназад до 3 часот прво имаме 50 минути, а потоа четири пати подолго време отколку од сега до 6 часот, односно имаме $4x$ минути. Значи, од една страна од 3 часот попладне до 6 часот попладне имаме 3 часа, односно 180 минути, а од друга страна од 3 часот до сега имаме $4x+50$ минути и од сега до 6 часот имаме x минути, што значи вкупно $4x+50+x=5x+50$ мнути. Според тоа, $5x+50=180$, односно $x=26$ минути. Значи, сега е 26 минути пред 6 часот попладне, односно $5\,h\,34\,\min$ попладне.

5. Андреј и Горјан секое утро трчаат до базенот, пливаат и трчаат обратно до дома. Тие излегуваат во 8:00 и трчаат по една иста патека. Горјан трча три пати побрзо од Андреј и плива два пати подолго од Андреј. Едно утро Андреј стигнал до базенот и забележал, дека ја заборавил крпата за бришење. Тој веднаш потрчал кон дома, ја зел крпата и дотрчал до базенот во моментот кога Горјан излегувал од базенот. Ако вообичаено Андреј се враќа од базенот во 10 часот, во колку часот се враќа Горјан?

   Решение. Со $x\,h$ да го означиме времето за кое Горјан стигнува до базенот. Бидејќи Горјан е три пати побрз од Андреј, добиваме дека Андреј истото растојание го минува за $3x\,h$. Освен тоа, ако Андреј плива $y\,h$, тогаш Горјан плива $2y\,h$.

   Андреј трча до базенот, се враќа до дома и повторно трча до базенот

за $3 \cdot 3x = 9x\ h$, а Горјан трча до базенот и плива $x + 2y\ h$. Според тоа, $9x = x + 2y$, од каде добиваме $y = 4x$.

Вообичаено Горјан трча до базенот, плива и трча до дома за $x + 2y + x = 2x + 2y\ h$, а Андреј за $3x + y + 3x = 6x + y\ h$. Но, $y = 4x$, па затоа времето на Горјан е $2x + 2 \cdot 4x = 10x\ h$ и времето на Андреј е $6x + 4x = 10x\ h$. Според тоа, Горјан и Андреј дома се враќаат истовремено, во 10 часот.

6. Се симнувам со ескалатор (подвижни скали). Ако изодам 26 скалила надолу, ќе се симнам за 30 секунди, а ако изодам 34 скалила надолу, ќе се симнам за 18 секунди. Колку скалила има ескалаторот и за колку секунди ќе се симнам ако стојам на едно исто скалило?

Решение. Нека ескалаторот има x скалила.Од условот на задачата следува пропорцијата $\frac{x-26}{x-34} = \frac{30}{18}$, од каде добиваме $x = 46$.

Ако бараното време е y секунди, тогаш $\frac{y}{30} = \frac{46}{46-26}$, од каде добиваме $y = 69$.

7. Татковото детство траело шестина од неговиот живот, а се оженил осмина од својот живот по детството и одма отишол во војска. Кога поминала уште дванаесеттина од неговиот живот таткото се вратил од војска и 5 години по враќањето од војската добил син. Синот кој проживеал половина од татковите години умрел 4 години пред таткото. Колку години живеел таткото и колку години имал кога му се родил синот?

Решение. Ако со x го означиме бројот на годините на таткото, тогаш од условот на задачата следува

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x,$$

од каде добиваме $x = 72$. Значи, таткото живеел 72 години, а синот му се родил кога имал 36години.

8. Таткото денес има 5 години помалку од збирот на годините на мајката и синот. По 7 години синот ќе има една третина од годините на мајката и сите тројца заедно ќе имаат 108 години. Колку години има секој од нив денес?

Решение. Денес збирот на годините на тројцата е $108 - 3 \cdot 7 = 87$.

Затоа таткото денес има $(87-5):2=41$ година. По 7 години збирот на годините на мајката и синот ќе биде $108-(41+7)=60$. Но, тогаш синот ќе биде три пати помал од мајката, па затоа тој ќе има $60:4=15$ години, а мајката ќе има $60-15=45$ години. Значи, денес синот има $15-7=8$ години, а мајката има $45-7=38$ години.

9. Пред 30 години бројот на годините на Иван, Ламбе и Рампо се однесувале како $1:2:5$. Денес годините на Иван и Ламбе се однесуваат како $6:7$. Колку години има Рампо во моментот?
Решение. Пред 30 години Иван имал x години, Ламбе имал $2x$ години и Рампо имал $5x$ години. Денес Иван има $x+30$, а Ламбе има $2x+30$ години, па затоа
$$(x+30):(2x+30)=6:7,$$
$$7(x+30)=6(2x+30)$$
$$5x=30,$$
$$x=6.$$
Според тоа, Рампо денес има $5\cdot 6+30=60$ години.

10. Мартин е постар од своите три сестри Ана, Ивана и Елена по 8, 10 и 13 години, соодветно. По една година, збирот на годините на сестрите на Мартин ќе биде за 39 поголем од годините на Мартин. Колку години има Мартин денес?
Решение. *Прв начин.* Нека Мартин денес има x години. Тоа значи дека неговите сестри денес имаат $x-8, x-10$ и $x-13$ години. По една година, Мартин ќе има $x+1$ година, а неговите сестри ќе имаат $x-7, x-9$ и $x-12$ години. Затоа, $x+1+39=x-7+x-9+x-12$, од каде добиваме $x=34$. Значи, Мартин денес има 34 години.
Втор начин. Нека Мартин денес има x години. Тоа значи дека неговите сестри денес имаат $x-8, x-10$ и $x-13$ години. По една година збирот на годините на сестрите се зголемува за 3, а годините на Мартин за 1, па затоа денес збирот на годините на сестрите е за $39-3+1=37$ поголем од годините на Мартин. Според тоа, $x-8+x-10+x-13=x+37$, од каде добиваме $x=34$. Значи, Мартин денес има 34 години.

11. Просечната возраст на членовите на едно семејство е 22 години. Ако просечната возраст на таткото и мајката е 46 години, а на децата е 6

години, колку деца има ова семејство?

Решение. Нека семејството има n деца. Таткото и мајката заедно имаат $2 \cdot 46 = 92$ години, а децата заедно имаат $6n$ години, што значи дека целото семејство има $6n + 92$ години. Од друга страна, семејството брои $n + 2$ години и просечната возраст е 22 години, што значи дека има $22(n + 2)$ години. Според тоа, $6n + 92 = 22(n + 2)$, од каде добиваме $n = 3$, т.е. семејството има три деца.

12. Бројот на годините на еден човек во 1959 година бил еднаков на збирот на цифрите на годината во која е роден. Во која година е роден овој човек?

Решение. За сите броеви помали или еднакви на 1959 збирот на цифрите е помал или еднаков на $1 + 8 + 9 + 9 = 27$, што значи дека човекот во 1959 година имал помалку од 30 години, т.е. е роден во XX век. Нека годината на неговото раѓање е $\overline{19xy}$. Тогаш важи

$$59 - 10x - y = 1 + 9 + x + y \text{, т.е. } 11x + 2y = 49.$$

Јасно, x е непарен број и $x < 5$.

За $x = 1$, добиваме $2y = 38$, односно $y = 19$, што не е можно, бидејќи y е цифра.

За $x = 3$, добиваме $2y = 16$, односно $y = 8$.

Според тоа, човекот е роден во 1938 година.

13. Бројот на годините на Михаил во 1989 година бил еднаков на збирот на цифрите на годината во која е роден. Во која година е роден Михаил?

Решение. За сите броеви помали или еднакви на 1989 збирот на цифрите е помал или еднаков на $1 + 8 + 9 + 9 = 27$, што значи дека Михаил во 1989 година имал помалку од 30 години, т.е. тој е роден во XX век. Нека годината на неговото раѓање е $\overline{19xy}$. Тогаш важи

$$89 - 10x - y = 1 + 9 + x + y \text{, т.е. } 11x + 2y = 79.$$

Јасно, x е непарен број и бидејќи $0 \le 2y \le 18$, добиваме $71 \le 11x \le 79$, од каде што следува $x = 7$. Сега $y = 1$, што значи дека Михаил е роден во 1971 година и тој во 1989 година имал 18 години.

14. Ана, нејзината мајка и баба слават роденден на 12. јули. Денес на 12. јули 2021, збирот на нивните години изнесува 127. Кога Ана имала 4

години, бабата била два пати постара од мајката. Пред две години, мајката била три пати постара од Ана. Која година е родена мајката на Ана? Колку години ќе има Ана кога таа и мајката заедно ќе имаат еднаков број години како и бабата? Која година тоа ќе се случи?

Решение. Нека во 2021 година Ана има a години, мајката има m години и бабата има b години. Важи $a+m+b=127$. Нека пред x години Ана имала 4 години, т.е. $x=a-4$. Понатаму, пред x години мајката имала $m-x$, а бабата имала $b-x$ години, па затоа

$$b-x=2(m-x),$$
$$b-(a-4)=2(m-(a-4)),$$
$$b-a+4=2m-2a+8,$$
$$a+b-2m=4.$$

Но, $a+b=127-m$, па затоа $127-m-2m=4$, од каде добиваме $m=41$. Според тоа, мајката на Ана има 41 година, што значи дека таа е родена 1980. година.

Пред две годни мајката имала 39 години и била три пати постара од Ана. Значи, пред две години Ана имала $39:3=13$ години, а сега таа има $13+2=15$ години, односно $a=15$, па затоа $b=127-(15+41)=71$

По y години Ана и мајката заедно ќе имаат еднаков број години колку и бабата, па затоа $15+y+41+y=71+y$, од каде добиваме $y=15$. Тогаш Ана ќе има 30 години и тоа ќе се случи во 2036 година.

15. Која година е родена тетката на Марко која во 1999 година наполнила онолку години колку што е двократниот збир на цифрите од годината во која наполнила дваесет години?

Решение. Нека тетката е родена во $\overline{19ab}$ година.

Прв случај. Тетката 20 години наполнила во XX века. Тогаш годината во која наполнила 20 години е $\overline{19ab}+20=\overline{19(a+1)b}$, па од условот на задачата следува $1999-\overline{19ab}=2\cdot(1+9+a+2+b)$, од каде добиваме $25=4a+b$. Според тоа, $25-b$ мора да е делив со 4, од каде добиваме $b\in\{1,5,9\}$, што значи дека годините на раѓање на тетката на Марко може да се 1961, 1955 и 1949.

Втор случај. Тетката 20 години наполнила во XXI век. Во овој случај тетката е родена по 1979 година, па затоа $a=8$ или $a=9$.

- Ако $a=8$, тогаш тетката наполнила 20 години во $\overline{198b}+20=\overline{200b}$

година, па затоа $1999-\overline{198b}=2\cdot(2+0+0+b)$, од каде добиваме $b=5$. Според тоа, годината на раѓање на тетката може да биде 1985.

- Ако $a=9$, тогаш тетката наполнила 20 години во $\overline{199b}+20=\overline{201b}$ година, па затоа $1999-\overline{199b}=2\cdot(2+0+1+b)$, од каде добиваме $b=1$. Според тоа, годината на раѓање на тетката може да биде 1991.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека тетката на Марко може да е родена во 1949, 1955, 1961, 1985 или 1991 година.

16. Марко бил роден меѓу 1300 и 1400 година, а Дарко меѓу 1400 и 1500 година. И двајцата биле родени на 6-ти април, во години кои што се точни квадрати на природни броеви. Двајцата живееле по 110 години. Во која година, додека биле живи, нивните години на 7-ми април биле точни квадрати на природни броеви.

Решение. Бидејќи $36^2=1296, 37^2=1369, 38^2=1444, 39^2=1521$, јасно е дека единствен точен квадрат меѓу 1300 и 1400 година е 1369, а меѓу 1400 и 1500 е 1444. Значи, Марко бил роден во 1369 година, а Дарко во 1444 година.

Да претпоставиме дека на 7-ми април во некоја година, Марко имал $m^2<111$, а Дарко имал $n^2<111$ години, каде $m,n\in\mathbb{N}$. Марко наполнил m^2 години во $1369+m^2$ година, а Дарко наполнил n^2 години во $1444+n^2$ година. Од условот на задачата следува дека тие во иста година треба да имаат години кои се точни квадрати на природни броеви, па затоа

$$1369+m^2=1444+n^2, \text{ т.е. } m^2-n^2=75.$$

Точни, квадрати помали од 11 се 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100 и единствени чија разлика е 75 се $m^2=100$ и $n^2=25$. Оттука следува дека во $1369+10^2=1469$ година Марко имал 100, а Дарко имал 25 години.

Забелешка. Во множеството природни броеви равенката $m^2-n^2=75$ може да се реши ако се искористи разложувањето

$$(m-n)(m+n)=1\cdot 75=3\cdot 25=5\cdot 15,$$

при што, бидејќи $0 < m - n < m + n$, се добиваат три системи линеарни равенки, чии решенија се $m = 38, n = 37$, $m = 14, n = 11$ и $m = 10, n = 5$, од кои само во решението $m = 10, n = 5$ квадрати на најдените броеви се помали од 111.

17. Во едно друштво, во кое и е Горјан, некои пијат чај, а некои пијат какао. Горјан забележал, дека просечната возраст на тие што пијат какао е 16 години, а просечната возраст на тие што пијат чај е 7 години. Горјан го заменил својот напиток и така просечната возраст како на тие што пијат чај, така и на тие што пијат какао се зголемила за 1 година. Колку луѓе има во ова друштво?

Решение. Нека бројот на луѓето што пијат чај е n, а бројот на луѓето што пијат какао е k. Тогаш збирот на годините на тие што пијат чај е $7n$, а збирот на годините на тие што пијат какао е $16k$, па целата група има $7n + 16k$ години. Горјан пиел какао (Зошто?) и откако го заменил напитокот, бројот на тие што пијат чај е $n + 1$, а на тие што пијат какао е $k - 1$. Просечната возраст на тие што пијат чај е 8, па збирот на нивните години е $8(n + 1)$, а просечната возраст на тие што пијат какао е 17, па збирот на нивните години е $17(k - 1)$ и целата група има $8(n + 1) + 17(k - 1)$ години. Но, збирот на годините е константен, па затоа $7n + 16k = 8(n + 1) + 17(k - 1)$, од каде добиваме $n + k = 9$. Според тоа, во групата имало 9 луѓе. (Тоа е можно, ако на пример, на почетокот какао пие Горјан кој има 15 години и уште еден човек на 17 години, а чај пијат 7 луѓе со по 7 години.)

4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

1. Определи ја најмалата ширина на еден еден пат за да по него може паралелно да се движат три возила, ако секое од овие визила има ширина $2,75\,m$, страничното растојание меѓу возилата биде најмалку $0,75\,m$ и оддалеченоста на возилата од страните на патот е најмалку $0,5\,m$.

   Решение. Имаме три возила широки по $2,75$. Меѓу возилата имаме две растојанија од по $0,75\,m$ и од возилата до краевите на патот имаме две растојанија од по $0,5\,m$. Значи, најмалата ширина на патот кој ги задоволува дадените услови е $3\cdot 2,75+2\cdot 0,75+2\cdot 0,5=10,75\,m$.

2. За време на престојот во земјата на чудата Алиса четири пати ја менувала висината. Таа по ред: испила голтка од шипето на кое пишувало „Напиј се!“ и пораснала за 25%, каснала залак од питата на која пишували „Изеди ме!“ и се намалила за 10%, испила голтка од шишето на кое пишувало „Напиј се!“ и пораснала за 10%, каснала залак од питата на која пишувало „Изеди ме!“ и се намалила за 20%. Дали Алиса потоа била повисока или пониска отколку на почетокот?

   Решение. Нека h е висината на Алиса на почетокот. Тогаш нејзината висина на крајот била

   $$1,25\cdot 0,9\cdot 1,1\cdot 0,8h=0,99h,$$

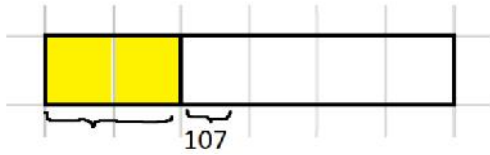
   т.е. таа на крајот била пониска отколку на почетокот.

3. Лента има должина $\frac{2}{3}$ метри. Како од неа може без да се користи метро може да се исече дел долг половина метар?

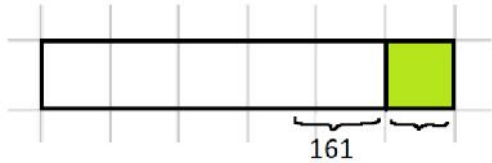
   Решение. Лентата ја превиткуваме на половина. Тогаш должината на секое парче е еднаква на $\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}\,m$. Потоа ја превиткуваме лентата уште на половина, по што должината на секое парче е $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}\,m$. Од едниот крај на ленатата отсекуваме едно парче со должина $\frac{1}{6}\,m$. Другото парче е со должина $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4-1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\,m$.

4. Андреј тргнал од местото A во местото B, а Бојан тргнал од местото B во местото A. Откако Андреј поминал третина од вкупната должина на патот и уште $107\,km$, а Бојан поминал шестина од вкупната должина на патот и уште $161\,km$, нивната меѓусебна оддалеченост била $113\,km$. Колку е долг патот од A до B, ако Андреј и Бојан се уште не се разминале?

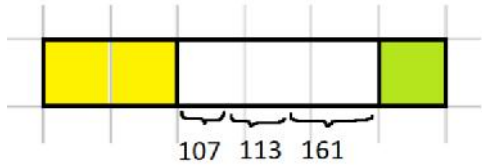
Решение. Андреј поминал



а Бојан поминал



Притоа тие не се разминале и еден од друг биле оддалечени $113\,km$, па затоа



Значи, збирот $107+113+161=381\,km$ е еднаков на половина од должината на патот меѓу местата A и B, што значи дека целиот пат е долг $2\cdot 381=762\,km$.

5. Турист поминал определен пат за два дена. Во текот на првиот ден поминал 40% од патот, а во текот на вториот ден поминал $12\,km$ повеќе пат отолку првиот ден. Колку километри поминал туристот во текот на двата дена?

Решение. Бидејќи првиот ден поминал 40% од патот, туристот вториот ден поминал 60% од патот или тој поминал $60-40=20\%$ повеќе од целиот пат. Значи $12\,km$ се 20% од целиот пат. Според тоа, целиот пат бил пет пати подолг од $12\,km$, т.е. патот бил долг $12\cdot 5=60km$.

6. Секоја од трите сестри Јана, Цана и Милена за себе купила материјал за шиење фустан. Јана купила третина повеќе од Цана, а Милена за 1,6 метри помалку од Јана. Ако Јана и даде четвртина од својот материјал на Милена, а Цана третина од својот материјал на Милена, тогаш Милена ќе има материјал колу Јана и Цана заедно. Колку материјал за шиење фустан купила секоја од трите сестри?

Решение. Нека Цана купила x метри материјал. Тогаш Јана купила $\frac{4}{3}x$ метри, а Милена купила $\frac{4}{3}x-1,6$ метри. Ако Јана и Цана дадат дел од својот материјал на Милена, тогаш Јана ќе има $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}x=x$, Цана ќе има $\frac{2}{3}x$, а Милена ќе има $\frac{4}{3}x-1,6+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}x=2x-1,6$ метри материјал. Затоа $\frac{2}{3}x+x=2x-1,6$, од каде добиваме $x=4,8\,m$. Значи, Цана купила $4,8\,m$, Јана купила $6,4\,m$ и Милена купила $4,8\,m$ материјал.

7. Утрово во едно одделение просечната височина на сите дваесет и два ученика беше $163,5\,cm$. Денес на пладне во одделението се запиша уште еден ученик со што просечната се зголеми за $0,3\,cm$, а попладнево една ученичка се отпиша од одделението со што просечната височина повторно се зголеми, но сега за $0,4\,cm$. Колку сантиметри е висока ученичката која се отпиша од одделението?

Решение. Утрово просечната висчина на сите 22 ученици беше $163,5\,cm$, а по запишувањето на новиот ученик на пладне просечната височина на сите 23 ученици беше $163,5+0,3=163,8\,cm$. Значи, на пладне вкупната височина на сите 23 ученици беше

$$v_{23}=23\cdot 163,8=3767,4\,cm.$$

Понатаму, по отпишувањето на една ученичка попладне просечната височина на сите 22 ученици е $163,8+0,4=164,2\,cm$. Значи, попладне вкупната височина на преостанатите 22 ученици е

$$v_{22}=22\cdot 164,2=3612,4\,cm.$$

Конечно, височината на ученичката која се отпиша е еднаква на

$$v_{23}-v_{22}=3767,4-3612,4=155\,cm.$$

8. Во два сада има 80 литри вода. Ако од првиот сад во вториот сад се

претури $\frac{1}{8}$ од вкупното количество вода, тогаш во вториот сад ќе има 4 пати повеќе вода отколку во првиот сад. Колку вода имало во секој сад пред прелевањето?

Решение. Нека во првиот сад има x литри вода. Тогаш во вториот сад има $80-x$ литри вода. Бидејќи $\frac{1}{8}$ од вкупното количество вода е $80:8=10$ литри, по прелевањето во првиот сад ќе има $x-10$ литри вода, а во вториот ад ќе има $80-x+10=90-x$ литри вода. Затоа $90-x=4(x-10)$, од каде добиваме $x=26$. Значи, пред прелевањето во првиот сад имало 26 литри вода, а вториот сад имало $80-26=54$ литри вода.

9. Во три цистерни се наоѓаат 780 литри млеко. Кога од првата цистерна ќе се одлее четвртина, од втората петтина и од третата $\frac{3}{7}$ од млекото, во цистерните ќе останат еднакви количества млеко. Колку млеко има во секоја цистерна?

Решение. Со a,b и c соодветно да го означиме количеството млеко во првата, втората и третата цистерна. Тогаш од условот на задачата следува $\frac{3}{4}a=\frac{4}{5}b=\frac{4}{7}c=k$, т.е. $a=\frac{4}{3}k, b=\frac{5}{4}k, c=\frac{7}{4}k$. Според тоа,

$$\frac{4}{3}k+\frac{5}{4}k+\frac{7}{4}k=780,$$

од каде добиваме $\frac{4}{3}k+3k=780$, т.е. $k=180$. Значи, во првата цистерна има $a=\frac{4}{3}\cdot 180=240\,l$, во втората има $b=\frac{5}{4}\cdot 180=225\,l$ и во третата има $c=\frac{7}{4}\cdot 180=315\,l$ млеко.

10. Во два сада вкупно има 64 литри вода. Од првиот сад се земени 20% од водата и се претурани во вториот сад. Потоа, од вториот сад се земени 20% од водата која во тој момент е во садот и се претурени во првиот сад. По двете претурања во двата сада има еднакво количество вода. Колку вода имало о секој сад на почетокот?

Решение. *Прв начин*. По двете претурања во двата сада има по $64:2=32$ литри вода. Водата која е во вториот сад е еднаква на 80% од водата која била во садот пред второто претурање. Според тоа, пред второто претурање во вториот сад имало $\frac{32}{80}\cdot 100=40$ литри вода, а во првиот сад имало $64-40=24$ литри вода. Овие 24 литри

вода во првиот сад се 80% од водата која била во садот пред првото претурање. Според тоа, во првиот сад на почетокот имало $\frac{24}{80}\cdot 100 = 30$ литри вода, а во вториот сад имало $64 - 30 = 34$ литри вода.

Втор начин. Нека на почетокот во првиот сад имало x литри вода. Тогаш во вториот сад имало $64 - x$ литри вода. По првото претурање во првиот сад останале $0{,}8x$ литри вода, а во вториот сад имало $64 - x + 0{,}2x = 64 - 0{,}8x$ литри вода. По второто претурање во вториот сад останале $0{,}8\cdot(64 - 0{,}8x)$ литри вода, а во првиот сад имало $0{,}8x + 0{,}2\cdot(64 - 0{,}8x)$ литри вода. Бидејќи по второто претурање во двата сада има еднакво количество вода, важи

$$0{,}8\cdot(64 - 0{,}8x) = 0{,}8x + 0{,}2\cdot(64 - 0{,}8x)$$
$$256 - 3{,}2x = 4x + 64 - 0{,}8x$$
$$6{,}4x = 192$$
$$x = 30.$$

Значи, на почетокот во првиот сад имало 30 литри вода, а во вториот сад имало $64 - 30 = 34$ литри вода.

11. На влезот на станот на семејството Екологисти има шише со средство за дезинфекција, кое секој самостојно го користи. Мајката преточила $\frac{3}{5}$ од вкупното количество во свое шише. Потоа таткото преточил $\frac{1}{6}$ од остатокот во свое шише. По него синот преточил $\frac{6}{7}$ од остатокот во свое шише, па истурил уште $15\,ml$, па во шишето останале само $10\,ml$ од средството. Колку милилитри средство за дезинфекција имало во шишето на почетокот?

Решение. *Прв начин*. Пред синот да истури $15\,ml$ во шишето имало $10 + 15 = 25\,ml$, што е $\frac{1}{7}$ пред синот да тури средство во своето шише. Значи, по турањето на татковото во шишето имало $7\cdot 25 = 175\,ml$ течност. Таткото турил $\frac{1}{6}$ од средството кое го затекнал, па затоа $\frac{5}{6}$ од средството се еднакви на $175\,ml$, што значи дека пред таткото да тури средство во неговото шише имало $175\cdot\frac{6}{5} = 210\,ml$ средство. Мајката турила $\frac{3}{5}$ од средството во шишето, па затоа $210\,ml$ се еднакви на $\frac{2}{5}$ од средството кое било на почетокот во шишето. Според тоа, на

почетокот во шишето имало $210 \cdot \frac{5}{2} = 525\,ml$ средство.

Втор начин. Нека на почетокот во шишето имало x течност. Откако мајката зела од средството во шишето останале $\frac{2}{5}x$ од средството. Таткото зел $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{1}{15}x$ од средството, што значи дека до сега се земени $(\frac{3}{5} + \frac{1}{15})x = \frac{2}{3}x$ од средството, па во шишето има $\frac{1}{3}x$ од средството. Понатаму, синот зел $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{2}{7}x$ од средството, што значи дека вкупно се претурени $(\frac{2}{3} + \frac{2}{7})x = \frac{20}{21}x$ од средството. Преостанатите $\frac{1}{21}x$ од средството се еднакви на $10 + 15 = 25\,ml$, што значи дека $\frac{1}{21}x = 25\,ml$, односно $x = 525\,ml$.

12. Во полн филџан со волумен $3\,dl$ се наоѓа бело кафе. Односот на количествата млеко и кафе е $3:2$. Марко испил шестина од белото кафе и потоа филџанот до врв го дополнил со млеко. Потоа испил петтина од белото кафе и филџанот повторно го дополнил до врв така што сега налеал пет пати повеќе млеко отколку кафе. Откако и трет пат испил дел од белото кафе, филџанот до својата третина бил наполнет со бело кафе. Колку млеко ќе има во филџанот откако Марко повторно до врв го дополнил со млеко?

Решение. Односот на количеството млеко и кафе во филџанот е $3:2$, па како $3 + 2 = 5$, во филџанот има $\frac{3}{5}$ млеко и $\frac{2}{5}$ кафе, односно $\frac{3}{5} \cdot 3 = 1{,}8\,dl$ млеко и $\frac{2}{5} \cdot 3 = 1{,}2\,dl$ кафе. Понатаму, $\frac{1}{6} \cdot 1{,}8 = 0{,}3\,dl$ и $\frac{1}{6} \cdot 1{,}2 = 0{,}2\,dl$, што значи дека по првото отпивање во филџанот има $1{,}8 - 0{,}3 = 1{,}5\,dl$ млеко и $1{,}2 - 0{,}2 = 1\,dl$ кафе. Во првото турање Марко турил $3 - (1{,}5 + 1) = 0{,}5\,dl$ млеко, што значи дека во филџанот потоа имало $2\,dl$ млеко и $1\,dl$ кафе. Понатаму, бидејќи $\frac{1}{5} \cdot 2 = 0{,}4\,dl$ и $\frac{1}{5} \cdot 1 = 0{,}2\,dl$, по второто отпивање во филџанот има $2 - 0{,}4 = 1{,}6\,dl$ млеко и $1 - 0{,}2 = 0{,}8\,dl$ кафе. Сега филџанот треба да се дополни со $3 - (1{,}6 + 0{,}8) = 0{,}6\,dl$ течност. Марко во второто дополнување турил пет пати повеќе млеко од кафе, што значи дека тој турил $0{,}5\,dl$ млеко и $0{,}1\,dl$ кафе, па затоа по второто дополнување на филџанот во него

има $2{,}1\,dl$ млеко и $0{,}9\,dl$ кафе. По второто отпивање филџанот останал наполнет до својата третина, па затоа во него сега има $\frac{1}{3}\cdot 2{,}1 = 0{,}7\,dl$ млеко и $\frac{1}{3}\cdot 0{,}9 = 0{,}3\,dl$ кафе. Конечно по третото дополнување само со млеко во филџанот се дотурени $2\,dl$ млеко, па затоа сега во него има $2{,}7\,dl$ млеко и $0{,}3\,dl$ кафе.

13. Во два сада A и B има смеса од антифриз и вода. Во садот A има 9 литри антифриз и 6 литри вода, а во садот B има 12 литри антифриз и 6 литри вода. Од секој сад се одлеани 7 литри раствор и потоа растворот од A е турен во B, а тој од B е турен во A. Колку литри вода и колку литри антифриз има во секој сад по претурањето?

Решение. Во A антифризот е $\frac{3}{5}$, а водата е $\frac{2}{5}$. Во B антифризот е $\frac{2}{3}$, а водата е $\frac{1}{3}$. По прелевањето во A се добива раствор, во кој антифризот е $8\cdot\frac{3}{5}+7\cdot\frac{2}{3}=\frac{142}{15}\,l$, а во B антфризот е $11\cdot\frac{2}{3}+7\cdot\frac{3}{5}=\frac{173}{15}\,l$. Значи, водата во A е $15-\frac{142}{15}=\frac{83}{15}\,l$, а во B е $18-\frac{173}{15}=\frac{97}{15}\,l$.

14. Во две буриња има $170\,kg$ брашно. Ако $\frac{3}{20}$ од брашното од едното буре се претури во другото буре, тогаш во двете буриња ќе има еднакво количество брашно. Колку брашно имало на почетокот во секое буре?

Решение. *Прв начин*. На крајот во секое буре имало по $170:2=85\,kg$ брашно. Овие $85\,kg$ се $1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$ од брашното кое на почетокот било во првото буре. Според тоа, на почетокот во првото буре имало $85:\frac{17}{20}=100\,kg$ брашно, а во второто буре имало $170-100=70\,kg$ брашно.

Втор начин. Нека на почетокот во првото буре имало $x\,kg$ брашно. Тогаш во второто буре имало $170-x\,kg$ брашно. По претурањето на $\frac{3}{20}$ од брашното во првото буре, во него останале $\frac{17}{20}x\,kg$ брашно, а во второто буре имало $170-x+\frac{3}{20}x=170-\frac{17}{20}x\,kg$ брашно. Значи, $170-\frac{17}{20}x=\frac{17}{20}x$, од каде добиваме $x=100\,kg$. Значи, во првото буре имало $100\,kg$ брашно, а во второт буре имало $170-100=70\,kg$

брашно.

15. Најдов скапоцен камен, но не го измерив. Потоа најдов друг скапоцен камен кој имаше маса еднаква на една седмина од масата на првиот камен, а потоа најдов трет скапоцен камен кој имаше маса еднаква на една единаесеттина од масата на првите два скапоцени камења заедно. Масата на трите скапоцени камења беше еднаква на $60\,g$. Колкава е масата на секој од трите скапоцени камења кои ги најдов?

Решение. Нека масата на првиот скапоцен камен е x грама. Тогаш масата на вториот скапоцен камен е еднаква на $\frac{1}{7}x$ грама, а масата на третиот скапоцен камен е еднаква на $\frac{1}{11}(x+\frac{1}{7}x)$ грама. Според тоа, масата на трите скапоцени камења е еднаква на $x+\frac{1}{7}x+\frac{1}{11}(x+\frac{1}{7}x)$, па затоа

$$x+\tfrac{1}{7}x+\tfrac{1}{11}(x+\tfrac{1}{7}x)=60,$$

од каде добиваме $x=48{,}125$. Значи, масата на првиот скапоцен камен е еднаква на $48{,}125\,g$, на вториот скапоцен камен е еднаква на $48{,}125:7=6{,}875\,g$ и на третиот скапоцен камен е еднаква на $60-(48{,}125+6{,}875)=5\,g$.

16. Располагаме со пет пакети. Првиот и вториот пакет заедно тежат $12\,kg$, вториот и третиот пакет заедно имаат маса $13{,}5\,kg$, третиот и четвртиот пакет заедно имаат маса $11{,}5\,kg$, четвртиот и петтиот пакет заедно имаат маса $8\,kg$ и првиот, третиот и петтиот пакет заедно имаат мас $16\,kg$. Колку маса има секој пакет?

Решение. Нека првиот, вториот, третиот, четвртиот и петтиот пакет соодветно има маса a,b,c,d,e. Имаме

$$\begin{aligned}a+b&=12\\b+c&=13{,}5\\c+d&=11{,}5\\d+e&=8\\a+c+e&=16.\end{aligned}$$

Ако ги собереме равенствата, добиваме $2a+2b+3c+2d+2e=61$. Но, $2a+2b+2d+2e=40$, па затоа $3c=21$. Според тоа, $c=7\,kg$. Сега лесно се добива дека $b=6{,}5\,kg$, $a=5{,}5\,kg$. $d=4{,}5\,kg$ и $e=3{,}5\,kg$.

17. Колку килограми е масата на прачка легура од злато и бакар која содржи 42% злато, ако златото во неа има иста маса како и златото во прачка легура со маса $14\ kg$ во која 30% е злато?

Решение. Во втората прачка, која има маса $14\ kg$ златото е 30%, па затоа таа содржи $\frac{14\cdot 30}{100}=4,2\ kg$ злато. Значи, во првата прачка има $4,2\ kg$ злато и како тоа е 42% од масата на прачката, добиваме дека масата на прачката е $\frac{4,2\cdot 100}{42}=10\ kg$.

18. На располагање имаме две легури од бакар и цинк. Односот на масите на бакарот и цинкот во едната легура е $5:2$, а во другата легура е $3:4$. Колку килограми треба да земеме од секоја легура за да направиме $35\ kg$ нова легура со еднакви количества бакар и цинк во неа?

Решение. Нека $x\ kg$ е масата на првата легура и $y\ kg$ е масата на втората легура која треба да ја земеме. Тогаш $x+y=35$. Првата легура содржи $\frac{5}{7}x\ kg$ бакар и $\frac{2}{7}x\ kg$ цинк, а втората легура содржи $\frac{3}{7}y\ kg$ бакар и $\frac{4}{7}y\ kg$ цинк. Затоа важи $\frac{5}{7}x+\frac{3}{7}y=\frac{2}{7}x+\frac{4}{7}y$, од каде добиваме $5x+3y=2x+4y$, т.е. $y=3x$. Со замена во $x+y=35$, добиваме $x+3x=35$, т.е. $x=8,75$, па затоа $y=3\cdot 8,75=26,25$.

Според тоа, треба да земеме $8,75\ kg$ од првата легура и $26,25\ kg$ од втората легура.

19. Од две ниви со вкупна плоштина 500 декари, дедо Стојан вкупно ожнеал 222 тони пченица. Приносот од првата нива бил $400\ kg$ од декар, а од втората нива бил $500\ kg$ од декар. Определи ја плоштината на секоја од нивите.

Решение. Ако плоштината на првата нива е x декари, тогаш плоштината на втората нива е $500-x$ декари. Дедо Стојан вкупно ожнеал $222\ t=222000\ kg$ пченица, па затоа $400x+500(500-x)=222000$, од каде добиваме $x=280$. Значи плоштината на едната нива била 280 декари, а на другата нива била 220 декари.

20. Дедо Коста треба да ја изора и посее својата нива со семенски материјал-пченица. Тој нивата ја изорал за 3 дена. Првиот ден изорал 20% од

целата нива и уште 16 декари, вториот ден 30% од остатокот од првиот ден и уште 20 декари, а третиот ден изорал 75% од остатокот од претходниот ден и последните 30 декари. Колку тони семенски материјал-пченица треба да купи дедо Коста, ако за сеење на еден декар е потребно 3,5 *kg* пченица?

Решение. *Прв начин*. Последните 30 декари се 25% од површината која е изорана третиот ден, што значи дека третиот ден дедо Коста изорал $4 \cdot 30 = 120$ декари, кои останале неизорани по вториот ден. Бидејќи вториот ден дедо Коста изорал 30% од остатокот од првиот ден и уште 20 декари, добиваме дека по орањето на 30% од остатокот од првиот ден неизорани биле $120 + 20 = 140$ декари, што значи дека 70% од остатокот од првиот ден се 140 декари, т.е. остатокот по првиот ден е $\frac{140}{70} \cdot 100 = 200$ декари. Последното значи дека по орањето на 20% од целата нива останале $200 + 16 = 216$ декари и тоа се 80% од целата нива. Значи, целата нива имала $\frac{216}{80} \cdot 100 = 270$ декари. Конечно, бидејќи за сеење на 1 декар се потребни $3,5\,kg$ пченица, добиваме дека за да ја засее нивата дедо Коста требало да купи $270 \cdot 3,5 = 945\,kg$ пченица.

Втор начин. Нека нивата имала x декари. Првиот ден се изорани $0,2x + 16$ декари, па неизорани останале $x - (0,2x + 16) = 0,8x - 16$ декари. Вториот ден се изорани $0,3(0,8 - 16) + 20 = 0,24x + 15,2$ декари, па неизорани останале $0,8x - 16 - (0,24x + 15,2) = 0,56x - 31,2$ декари. Третиот ден се изорани $0,75(0,56x - 31,2) + 30 = 0,42x + 6,6$ декари, со што е изорана целата нива, па затоа $0,42x + 6,6 = 0,56x - 31,2$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $0,14x = 37,8$, од каде добиваме $x = 270$ декари. Конечно, бидејќи за сеење на 1 декар се потребни $3,5\,kg$ пченица, добиваме дека за да ја засее нивата дедо Коста требало да купи $270 \cdot 3,5 = 945\,kg$ пченица.

5. ЗАДАЧИ СО ДВИЖЕЊЕ

1. Ивана на училиште оди за половина час, при што се движи со постојана брзина од $3,6\,km/h$. Таа од училиште се враќа по истиот пат движејќи се со постојана брзина од $4,5\,km/h$. За колку минути Ивана стасува од училиштето до дома?

   Решение. Ивана живее на $3,6\cdot 0,5=1,8\,km$ од училиштето. Таа од училиштето до дома стасува за

   $$1,8:4,5=0,4\,h=0,4\cdot 60\ \text{min}=24\ \text{min}.$$

2. За 2 часа поминав 9 километри. Ако се движам со истата брзина, за колку минути ќе поминам 15 километри?

   Решение. Имаме $\text{NZD}(9,15)=3$. Бидејќи за $2\,h=120\ \text{min}$ поминав $9\,km$, за 3 пати помалку време, односно за $120:3=40\ \text{min}$ поминав $9:3=3\,km$. Понатаму, 5 пати подолг пат $5\cdot 3=15\,km$ ќе поминам за 5 пати подолго време, односно за $5\cdot 40=200\ \text{min}$.

3. Воз просечно минува $375\,km$ за три часа. Колку трае патувањето ако возот со иста просечна брзина помине $2023\,km$ со едно застанување од 3 часа и 50 минути и седум пократки застанувања од по 10 минути?

   Решение. Во текот на патувањето возот застанува

   $$3\,h\,50\,\text{min}+7\cdot 10\ \text{min}=3\,h\,120\ \text{min}=5\,h.$$

   Возот за 1 час поминува $357:3=119\,km$, па затоа целиот пат ќе го помине за $2023:119=17\,h$. Според тоа, патувањето на возот трае $17+5=22\,h$.

4. Пабло со велосипед тргнал од дома до нивната планинарска куќа. Првата пауза ја направил кога поминал $\frac{2}{7}$ од патот. По $54km$ повторно направил пауза и до тогаш поминал $\frac{7}{11}$ од патот. Определи ја должината на патот од домот на Пабло до неговата планинарска куќа.

   Решение. Нека x е должината на патот. Од $(\frac{7}{11}-\frac{2}{7})x=54$, добиваме

$\frac{27}{77}x = 54$. Според тоа, $x = 154\ km$.

5. Велосипедист изминал $600\ km$ за три дена. На почетокот возел побрзо, па затоа првиот ден поминал два пати поголемо растојание отколку вториот ден, и за $5\ km$ повеќе отколку третиот ден. Колку километри минувал велосипедистот секој од трите дена?

Решение. *Прв начин*. Ако додадеме $5\ km$ на поминатиот пат третиот ден, ќе добиеме дека велосипедистот поминал $605\ km$, при што изминатиот пат во текот на првиот и во текот на третиот ден е два пати подолг од изминатиот пат вториот ден. Според тоа, велосипедистот вториот ден поминал $605:5 = 121\ km$, првиот ден $2 \cdot 121 = 242\ km$ и третиот ден поминал $242 - 5 = 237\ km$.

Втор начин. Нека велосипедистот вториот ден поминал $x\ km$. Тоа значи дека првиот ден поминал $2x\ km$ и третиот ден поминал $2x - 5\ km$. Според тоа, $2x + x + 2x - 5 = 600$, од каде добиваме $x = 121$. Значи, велосипедистот вротиот ден поминал $121\ km$, првиот ден поминал $2 \cdot 121 = 242\ km$ и третиот ден поминал $242 - 5 = 237\ km$.

6. Во 7:30 од Скопје за Белград тргнува моторциклист, кој се движи со константна брзина од $62,2\ km/h$. Во 10:30 од Скопје во истата насока тргнува втор моторциклист со брзина $85,5\ km/h$. Колку километри еден од друг ќе се наоѓаат моторциклистите во 12:30?

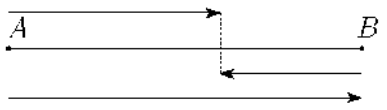
Решение. Првиот моторциклист патува $12\ h\ 30\ \min - 7\ h\ 30\ \min = 5\ h$ со брзина $62,2\ km/h$, па за тоа време ќе помине $5 \cdot 62,2 = 311\ km$. Вториот моторциклист патува $12\ h\ 30\ \min - 10\ h\ 30\ \min = 2\ h$ со брзина $85,5\ km/h$ и за тоа време ќе помине $2 \cdot 85,5 = 171\ km$. Значи, во 12:30 растојанието меѓу моторциклистите ќе биде $311 - 171 = 140\ km$.

7. Група моторциклисти се движела со брзина од $40\ km/h$. Еден член на групата застанал да одмори. Тој одмарал 24 минути, а потоа ја зголемил својата брзина за 25%, за да ја стигне групата. По колку километри мотоциклистот ја стигнал групата?

Решение. За да ја стигне групата моторцилистот се движел $x\ h$ со брзина $1,25 \cdot 40 = 50\ km$. За тоа време тој поминал пат, кој групата

групата го поминала со брзина $40\,km/h$ за време $x+\frac{24}{60}=x+0,4\,h$. Значи, $50x=40(x+0,4)$, од каде добиваме $x=1,6\,h$. Значи, моторциклистот ја стигнал групаа по $1,6\,h$, т.е. по $50\cdot 1,6=80\,km$.

8. Иван со моторцикл вози $80\,km/h$, а Петар со велосипед вози $20\,km/h$. Двајцата истовремено тргнале од градот A кон градот B, меѓу кои должината на патот е $200\,km$. Откако стигнал во B, Иван без да застанува тргнал кон A. На колку километри од B тој го сретнал Петар?



Решение. До моментот на средбата Иван и Петар поминале пат кој е еднаков на два пати патот од A до B (види цртеж). Според тоа, тие поминале пат долг $2\cdot 200=400\,km$. Бидејќи за еден час заедно поминуваат $80+20=100\,km$, до нивното среќавање поминале $400:100=4\,h$. За тоа време Петар од A е оддалечен $4\cdot 20=80\,km$. Според тоа, Иван и Петар се сретнале на $200-80=120\,km$ од B.

9. Откако поминал 0,4 од должината на тесен мост, Марко разбрал, дека зад него кон мостот се приближува автомобил. За да не се сретнат на мостот, Марко тргнал назад и во моментот кога тој слегол од мостот, автомобило требало да навлезе на мостот. Се покажало, дека ако Марко и автомобилот не ги менувале брзините и Марко продолжел право, без да се враќа назад, автомобилот ќе го стигнел во моментот, кога Марко ќе слегува од мостот. Определи колку пати брзината на автомобилот е поголема од брзината на Марко.

Решение. За времето за кое Марко одел кон автомобилот, тој поминал пат со должина 0,4 од должината на мостот. За тоа време автомобилот дошол на почетокот на мостот. Ако Марко не се завртел, тој ќе имал изминато $2\cdot 0,4=0,8$ од должината на мостот и тоа е растојанието меѓу него и автомобилот во моментот кога автомобилот бил на почетокот на мостот. Значи, на Марко му останувало да измине уште 0,2 од должината на мостот, па бидејќи во моментот кога автомобилот ќе го стигне, Марко се симнува од мостот, заклучуваме дека брзината на автомобилот е $1:0,2=5$ пати поголема од брзината на Марко.

10. Автобус требало да го помине патот од градот A до градот B за 4 часа и 45 минути. Тој тргнал од градот A и изминал 60% од целиот пат за 3 часа, со брзина помала од определената. За да сигне во определеното време, возачот пресметал, дека треба да ја зголеми брзината за $8,5\ km/h$. Определи ја должината на патот меѓу двата града.

Решение. Ако со x ја означиме должината на патот меѓу градовите A и B, тогаш за првите 3 часа се поминати $0,6x$ со брзина $\frac{0,6x}{3} = 0,2x\ km/h$. Преостанатиот дел од патот е $0,4x$ и автобусот го поминал за $1,75\ h$ со брзина $(0,2x+8,5)\ km/h$, па затоа важи

$$1,75\cdot(0,2x+8,5) = 0,4x,$$

од каде добиваме $x = 297,5\ km$.

11. Браќата Пабло и Матео заедно излегле од дома и тргнале на училиште. Матео оди со брзина $4,2\ km/h$, а Пабло со брзина $5,6\ km/h$ и пристигнал на училиште 10 минути пред Матео. Колку метри е должината на патот од нивната куќа до училиштето?

Решение. Матео за $1\ h$ минува $4,2\ km$, што значи дека за $10\ \min = \frac{1}{6}\ h$ тој минува $4,2:6 = 0,7\ km$. Тоа значи дека Матео бил на $0,7\ km$ од училиштето, кога Пабло пристигнал во училиштето.

Но, Пабло оди $5,6-4,2 = 1,4\ km$ на час побрзо од Матео. Според тоа, за да Пабло биде $0,7\ km$ понапред, потребни се $0,7:1,4 = 0,5\ h$. Значи, Пабло до училиштето одел $0,5\ h$ и оттука растојанието од нивниот дом до училиштето е $0,5\cdot 5,6 = 2,8\ km = 2800\ m$.

12. Андреј и Горјан се нашле на почетокот на патека долга $1800\ m$. Андреј возел велосипед, а Горјан трчал и двајцата се движеле со свои постојани брзини. Кога ќе стигнат до крајот на патеката, се свртуваат и без застанување продолжуваат во спротивната насока. За 30 минути Андреј поминал $9\ km$, а Горјан поминал $4,5\ km$. На кое растојание ќе бидат еден од друг по 30 минути од почнувањето на тренингот? На кое растојание од почетокот на патеката се кога прв пат се сретнале?

Решение. Андреј за даденото време од почетокот, возејќи велосипед поминал $9\ km = 9000\ m$, што значи дека тој поминал $9000:1800 = 5$ должини на патеката. Горјан за даденото време, трчајќи со постојана

брзина поминал $4,5\,km = 4500\,m$, што значи дека тој поминал $4500:1800 = 2,5$ должини на патеката. Според тоа, по 30 минути одпочетокот на тренингот Андреј е на крајот од патеката, а Горјан е на половина од патеката, што значи дека меѓусебно се оддалечени $1800:2 = 900\,m$.

Почетокот на патеката да го означиме со A, крајот на патеката со B и нека S е точката во која за прв пат се сретнале. Ако $\overline{AS} = x$, тогаш $\overline{SB} = 1800 - x$.

Андреј се движл побрзо од Горјан, па затоа должината на патот кој го поминал е $\overline{AB} + \overline{BS} = 1800 + 1800 - x = 3600 - x$, а должината на патот кој го помиал Горјан е $\overline{AS} = x$. Андреј поминал два пати подолг пат од Горјан, па затоа важи $2x = 3600 - x$, од каде добиваме $x = 1200\,m$. Според тоа, кога прв пат се сретнале Андреј и Горјан биле на $1200\,m$ од почетокот на патеката.

13. Оддалеченоста од домот на Филип до училиштето е $1200\,m$. Едно утро тој тргнал кон училиштето со брзина од 4 метри во секунда. Две минути покасно, неговото куче Шарко тргнало по Филип со брзина 10 метри во секунда. На која оддалеченост од училиштето Шарко ќе го стигне Филип?

Решение. До тргнувањето на Шарко поминале 2 минути, односно $2 \cdot 60 = 120$ секунди. Значи, до тргнувањето на Шарко Филип поминал $120 \cdot 4 = 480\,m$. Понатаму, за 1 секунда Шарко поминува $10 - 4 = 6\,m$ повеќе од Филип, па затоа за тој да го стигне Филип му се потребни $480:6 = 80$ секунди. За тоа време Филип дополнително ќе помине уште $4 \cdot 80 = 320\,m$ и ќе се наоѓа на $1200 - (480 + 320) = 400\,m$ пред училиштето.

14. Андреј се наоѓа на $30\,m$ пред Пабло, кој оди три пати побрзо од Андреј. Колку метри поминал Пабло пред да го стигне Андреј?

Решение. Нека, додека го стигнал Андреј, Пабло поминал $x\,m$. Бидејќи Андреј е $30\,m$ пред Пабло, добиваме дека до тој момент Андреј поминал $x - 30\,m$. Бидејќи Пабло оди три пати побрзо од

Андреј, тој поминал поминал три пати подолг пат од Андреј, па затоа $x = 3(x - 30)$, од каде следува $x = 45\,m$.

15. Пабло учествувал на кроз и тој патеката од $5\,km$ ја претрчал за 16 минути и 40 секунди. За време на трката тој ја зголемувал брзината и секој следен километар го поминувал за 5 секунди побрзо отколку претходниот. За кое време Пабло го претрчал последниот километар?
Решение. Нека Пабло петтиот километар го претрчал за x секунди. Тогаш четвртиот километар го претрчал за $x + 5$ секунди, тетиот за $x + 10$ секунди, вториот за $x + 15$ секунди и првиот за $x + 20$ секунди. Според тоа,

$$x + (x + 5) + (x + 10) + (x + 15) + (x + 20) = 16 \cdot 60 + 40,$$
$$5x + 50 = 1000,$$
$$x = 190.$$

Значи, Пабло последниот километар го претрчал за 190 секунди, односно за 3 минути и 10 секунди.

16. Теодора трча со брзина поголема за $8\,km/h$ од брзината со која пешачи. Таа пешачела 2 часа и трчала 30 минути, по што изминала вкупно $14\,km$. Колкава е брзината на Теодора кога пешачи?
Решение. *Прв начин*. За еден час Теодора, трчајќи, минува $8\,km$ повеќе отколку кога пешачи. Според тоа, за 30 минути таа минува $4\,km$ повеќе отколку кога пешачи. Тоа значи, дека ако Теодора само пешачи 2,5 часа, таа ќе помине $14 - 4 = 10\,km$. Значи, Теодора пешачи со брзина од $10 : 2,5 = 4\,km/h$.
Втор начин. Нека Теодора пешачи со брзина од $x\,km/h$. Тогаш таа трча со брзина $(x + 8)\,km/h$, па затоа $2x + 0,5(x + 8) = 14$, од каде добиваме $x = 4\,km/h$.

17. Од градовите A и B, меѓу кои должината на патот е $329,4\,km$, еден кон друг тргнале автобус и автомобил. Автобусот тргнал од градот A и се движел со постојана брзина од $72\,km/h$. Автомобилот тргнал 1,2 часа покасно од автобусот и се движел 1,25 пати побрзо од него. На колкаво растојание од градот B се сретнале автобусот и автомобилот?
Решение. Автомобилот се движел со брзина $72 \cdot 1,25 = 90\,km/h$. Авто-

бусот патувал 1,2 часа повеќе од автомобилот и за тоа време поминал $1,2 \cdot 72 = 86,4\ km$. Според тоа, во моментот кога тргнал автомобилот возилата биле едно од друго оддалечени $329,4 - 86,4 = 243\ km$. Бидејќи автомобилот и автобусот се движат еден кон друг, за 1 час растојанието меѓу нив се намалува за $72 + 90 = 162\ km$. Според тоа, тие ќе се сретнат по $243 : 162 = 1,5\ h$ од тргнувањето на автомобилот. За ова време автомобилот ќе помине $90 \cdot 1,5 = 135\ km$, т.е. возилата ќе се сретнат на $135\ km$ пред градот B.

18. Од градовите A и B едновремено еден кон друг тргнале два велосипедисти. По 3 часа возење велосипедистите се наоѓале на $40\ km$ еден од друг. Се покажало дека по 5 часа од поаѓањето велосипедистите повторно биле на $40\ km$ еден од друг. Определи ја должината на патот меѓу градовите A и B.

Решение. За $5 - 3 = 2\ h$ двата велосипедисти вкупно поминале $2 \cdot 40 = 80\ km$. Според тоа, за $1\ h$ двата велосипедисти вкупно поминуваат вкупно $80 : 2 = 40\ km$. Велосипедистите патувале 3 часа и биле на растојание $40\ km$ еден од друг, а потоа уште еден час до средбата и еден час повторно да се оддалечат $40\ km$ еден од друг. Според тоа, тие до средбата патувале вкупно $3 + 1 = 4\ h$ и поминале $4 \cdot 40 = 160\ km$ и тоа е должината на патот меѓу градовите A и B.

19. Андреј одел од местото A до местото B и обратно (без да застанува во B). Билјана одела од B до A и обратно (без да застанува во A). Тие тргнале истовремено, при што секој се движел со своја константна брзина. На одење двајцата се сретнале на $700\ m$ од B, а на враќање се сретнале на $400\ m$ од A. Определи ја должината на патот од A до B.

Решение. Нека должината на патот од A до B е $x\ m$. Од поаѓањето до првата средба тие вкупно поминале $x\ m$, од кои Билјана поминала $700\ m$. Од поаѓањето до втората средба тие вкупно поминале $3x\ m$, т.е. три пати подолг пат. Значи, Билјана од поаѓањето до втората средба поминала три пати подолг пат отколку до првата средба. Бидејќи таа до втората средба поминала $x + 400\ m$, добиваме $x + 400 = 3 \cdot 700$, од каде наоѓаме $x = 1700\ m$.

20. Два автомобили тргнале истовремено од градовите A и B еден кон друг и се движеле по прав пат со брзини соодветно $100\,km/h$ и $80\,km/h$. Автомобилите се сретнале во точката C. Откако стигнале во градовите B и A, тие без да застануваат одново тргнале една кон друга и се сретнале о точката D. Определи го растојанието меѓу градовите A и B, ако растојанието меѓу C и D е $53\frac{1}{3}\,km$.

Решение. Со t да го означиме времето кое поминало до средбата во точката D. За тоа време автомобилите три пати го поминале растојанието меѓу градовите A и B, а како до средбата во точката C ова растојание е поминато само еднаш, заклучуваме дека времето кое поминало до средбата во точката C е еднакво на $\frac{t}{3}$. До точката D првиот автобил изминал пат $100t$ и тој од точката A е оддалечен $2\cdot\frac{180t}{3}-100t=20t$, а до точката C тој изминал пат $\frac{100t}{3}$. Оттука следува дека $\frac{100t}{3}-20t=53\frac{1}{3}$, т.е. $t=4\,h$. Значи, растојанието меѓу градовите A и B е еднакво на $s=\frac{180t}{3}=240\,km$.

21. Два воза се разминуаат во железничка станица, без да запираат. Првиот воз се движи со брзина $70\,km/h$, а вториот се движи со брзина $80\,km/h$. Патник, кој седи во вториот воз, забележал, дека првиот воз поминал покрај него за 3 секунди. Определи ја должината на првиот воз?

Решение. Ако сметаме дека патникот во вториот воз е неподвижен, тогаш брзината на првиот воз е $70+80=150\,km/h$. За 3 секунди првиот воз поминува пред патникот, што значи дека првиот воз поминува пат еднаков на неговата должина. Значи, должината на првиот воз е $150\,km/h\cdot 3\,s=\frac{150000}{3600}\,m/s\cdot 3\,s=125\,m$.

22. Воз, долг $450\,m$, минува покрај знакот на пругата за 15 секунди, а покрај неподвижна платформа минува за 35 секунди. Определи ги брзината на возот и должината на платформата?

Решение. Бидејќи за 15 секунди возот минува покрај знакот на пругата, тој поминува пат еднаков на должината на возот, т.е. поминува $450\,m$. Значи, возот се движи со брзина $450:15=30\,m/s$. Возот по-

минува покрај неподвижна платформа за 35секунди, при што тоа е времето од моментот кога локомотивата ќе биде на почеток на платформата, до моментот кога последниот вагон ќе биде на крајот на платформата. Според тоа, ако должината на платформата е x, возот поминва пат $450+x$. Значи, $450+x=35\cdot 30$, од каде наоѓаме дека $x=35\cdot 30-450=600\,m$.

23. Матео, патувајќи со трамвај, го видел Пабло, кој се движел покрај трамвајската линија во насока, обратна од насоката на движење на трамвајот. По 10 секунди Матео слегол од трамвајот и побрзал да го стигне Пабло. За колку секунди Матео го стигнал Пабло ако Матео се движел два пати побрзо од Пабло, а пет пати поспоро од трамвајот?
Решение. Брзината на Пабло да ја означиме со x. Тогаш брзината на Матео е $2x$, а брзината на трамвајот е $10x$. За 10 секунди трамвајот изминал растојание $100x$, а Пабло изминал растојание $10x$. Значи, во моментот која Матео слегол од трамвајот тие се наоѓале на растојание $100x+10x=110x$. Матео оди два пати побрзо од Пабло, па затоа растојанието меѓу нив секоја секунда се намалува за $2x-x=x$. Според тоа, Матео ќе го стигне Пабло за $110x:x=110$ секунди.

24. Во 10 часот наутро од градот A тргнал автомобил кон градот B, а 1 час и 15 минути покасно од градот B по истиот пат кон градот A тргнал друг автомобил. Брзината на вториот автомобил е еднаква на $66\frac{2}{3}\%$ од брзината на првиот автомобил. Првиот автомобил пристигнал во градот B точно на полноќ. Во колку часот се сретнале автомобилите?
Решение. Нека брзината на првиот автомобил е x. Првиот автомобил патувал $24-10=14$ часа, па затоа должината на патот меѓу градовите A и B е $14x$. Брзината на вториот автомобил е еднаква на $66\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{100}=\frac{2}{3}x$. Бидејќи вториот автомобил тргнал 1 час и 15 минути покасно, при неговото тргнување растојанието меѓу двата автомобили било $14x-1{,}25x=12{,}75x$. Бидејќи брзината со која автомобилите се приближуваат еден кон друг е $x+\frac{2}{3}x=\frac{5}{3}x$, тие ќе се сретнат $12{,}75x:(\frac{5}{3}x)=7\frac{13}{20}\,h=7\,h\,39\,\min$ часа по тргнувањето на вториот автомобил, односно во $11\,h\,15\,\min+7\,h\,39\,\min=18\,h\,54\,\min$.

25. Крал со својата придружба се движи од тврдината A кон тврдината B со брзина $5\,km/h$. Кралот на секој час испраќа гласници кон тврдината B кои се движат со $20\,km/h$. Колкаво е временското растојание на пристигнување на гласниците во тврдината B?
Решение. За еден час секој гласник се оддалечува за $20-5=15\,km$ од кралот. Според тоа, растојанието меѓу секои два последователни гласници е $15\,km$. Значи, во моментот кога еден гласник стигнува во тврдината B следниот гласник е на $15\,km$ од тврдината. Бидејќи гласниците се движат со постојани брзини од $20\,km/h$, следниот гласник ќе пристигне во тврдината по $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}\,h$, односно по $\frac{3}{4}\cdot 60=45\,\min$.

26. Од градовите A и B во 13 часот истовремено еден кон друг тргнуваат автомобил и пешак, соодветно. Автомобилот го минува патот од A до B за 1 час. Откако автомобилот и пешакот се сретнале, пешакот се качил во автомобилот и тој се вратил назад во градот A, за да го однесе пешакот. Потоа автомобилот без застанување се вратил кон градот B и таму пристигнал во 15 часот и 40 минути. Определи го времето за кое пешакот може да го помине патот меѓу двата града.
Решение. Со t да го означиме времето од тргнувањето на пешакот и автомобилот до средбата. Тогаш времето за кое автомобилот стигнал до средбата и се вратил во градот A е $2t$. Автомобилот го минува патот од A до B за 1 час. Според тоа, автомобилот патувал $2t+1=2\frac{2}{3}$, од каде добиваме $t=\frac{5}{6}\,h$. Значи, автомобилот до средбата поминал $\frac{5}{6}$ од патот, а пешакот до средбата поминал $\frac{1}{6}$ од патот. Според тоа, пешакот за $\frac{5}{6}h=50\,\min$ поминал $\frac{1}{6}$ од патот. Конечно, патот од B до A пешакот ќе го помине за $6\cdot 50\,\min=300\,\min=5\,h$.

27. Автомобил првиот ден поминал $\frac{3}{5}$ од целиот пат, вториот ден поминал $\frac{1}{3}$ од патот поминат во првиот ден, а третиот ден ги поминал преостанатите $100\,km$. Со која средна брзина се движел овој автомобил ако првиот ден патувал $3\,h\,45\,\min$, вториот ден патувал $1\,h\,20\,\min$ и третиот ден патувал $1\,h\,35\,\min$?

Решение. Со x да го означиме целиот пат. Тоа значи дека првиот ден автомобилот поминал $\frac{3}{5}x$, а вториот ден поминал $\frac{1}{3}\frac{3}{5}x=\frac{1}{5}x$. Оттука добиваме

$$\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}x+100=x\text{, т.е. } x=500\,km.$$

Значи, првиот ден автомобилот поминал $\frac{3}{5}\cdot 500=300\,km$, вториот ден поминал $\frac{1}{5}\cdot 500=100\,km$ и третиот ден поминал $100\,km$. Според тоа, средната брзина со која се движел автомобилот е

$$v=\frac{500}{3\frac{45}{60}+1\frac{20}{60}+1\frac{35}{60}}=\frac{500}{\frac{20}{3}}=75\,km/h.$$

28. Пабло и Матео скокнале истовремено од брегот на езерото и запливале кон платформата која била во близина на брегот. Кога Пабло стигнал до платформата, Матео бил на $40\,m$ од брегот на езерото. Пабло, по истата патека, запливал назад кон брегот и го сретнал Матео на $48\,m$ од брегот. Колку метри е растојанието од брегот до платформата.

Решение. Со $x\,m$ да го означиме растојанието од платформата до местото на средбата на Пабло и Матео. Растојанието од брегот до платформата е $48+x\,m$. Пабло препливал $x\,m$ за времето за кое Матео препливал $8\,m$. Според тоа, додека Матео препливал $40\,m$, Пабло препливал $5x\,m$. Последното значи дека растојанието од брегот до платформата е $5x\,m$. Од равенството $48+x=5x$ наоѓаме $x=12\,m$, па затоа бараното растојание е еднакво на $5x=60\,m$.

29. Брзината на водата во една река е 5 метри во секунда. Од пристаништето A по течението на реката тргнал сплав, а три часа по сплавот тргнал моторен чамец, кој сплавот ги стигнал по 2 часа. Определи ја брзината на чамецот наспроти течението на реката.

Решение. Брзината на водата во реката е

$$5\,m/\mathrm{s}=5\cdot 3600\,m/h=18000\,m/h=18\,km/h.$$

До моментот кога чамецот го стигнал сплавот поминале 5 часа, што значи дека сплавот поминал $5\cdot 18=90\,km$. Истото растојание чамецот го поминал за 2часа, т.е. по течението на реката се движел со брзина $90:2=45\,km/h$. Значи, брзината на чамецот наспроти течението на

реката е $45-2\cdot 18=9\ km/h$.

30. Брзината на чамецот во мирна вода во однос на брзината на реката се однесува како $13:2$. По течението на реката чамецот поминал $75\ km$. Колкаво растојание ќе помине чамецот за истото време ако се движи спротивно од течението на реката?

Решение. Ако брзината на чамецот во мирна вода е $x\ km/h$, а брзината на реката е $y\ km/h$, тогаш од $x:y=13:2$ следува дека $x=13a$ и $y=2a$. Според тоа, брзината на чамецот по течението на реката е $15a\ km/h$, а наспроти течението на реката е $11a\ km/h$. Ако s е патот кој чамецот ќе о помине за истото време наспроти течението на реката, тогаш $\frac{11a}{15a}=\frac{s}{75}$, од каде добиваме $s=55\ km$.

31. Градовите A и B лежат на брегoвите на река, а растојанието меѓу нив е $10\ km$. Брзината на бродот е u, а на реката е v, $u>v$. Дали времето потребно бродот да плови од A до B, а потоа од B до A е подолго од времето потребно бродот во мирно езеро да помине $20\ km$?

Решение. Според условот на задачата времето потребно бродот да стигне од A до B и да се врати назад е

$$\frac{10}{u+v}+\frac{10}{u-v}=\frac{20u}{u^2-v^2}=\frac{20}{u-\frac{v^2}{u}}.$$

Понатаму, времето потребно во мирно езеро бродот да помине $20\ km$ е еднакво на $\frac{20}{u}$, па како $\frac{20}{u-\frac{v^2}{u}}>\frac{20}{u}$, заклучуваме дека времето за пловидба по реката е поголемо од времето за пловидба во мирно езеро.

6. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ И КУПУВАМЕ

1. Андреј, Горјан, Пабло и Филип седат околу тркалезна маса (во овој редослед). Заедно имаат 1600 златници. Прво Андреј половина од своите златници ги поделил на два еднакви дела и по еден дел му дал на својот лев и својот десен сосед, додека втората половина ја задржал за себе. Потоа истото ова го направил Горјан, потоа Пабли и на крајот Филип. На крајот сите четворица имаат еднаков број златници. Колку златници имал на почетокот Горјан?

   Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Чекорите се дадени во долната табела.

	Андреј	Горјан	Пабло	Филип
Број златници на крајот	400	400	400	400
Број златници по 3. чекор	200	400	200	800
Број златници по 2. чекор	200	300	400	700
Број златници по 1. чекор	50	600	250	700
Број златници на почетокот	100	575	250	675

   Значи, на почетокот Горјан имал 575 златници.

2. Павел и Томи играат игра во која користат жетони со вредност 3 денари и 5 денари. Ако во играта некој застане на златно поле, тогаш може да купи волшебен напиток. Павел купил еден вошебен нашиток и го платил со жетони од по 3 денари, и Томи купил еден волшебен напиток и го платил со жетони од по 5 денари. Определи ја цената на напитокот ако двајцата заедно дале повеќе од 60, а помалку од 70 жетони.

   Решение. Бидејќи Павел напитокот го платил со жетони од 3 денари, а Томи со жетони од 5 денари, заклучуваме дека цената на напитокот е делива со 3 и со 5, односно со 15. За секои 15 денари Павел дал 5 свои жетони, а Томи дал 3 свои жетони. Последното значи дека вкупниот број жетони е делив со 8. Двајцата заедно дале повеќе од 60, а помалку од 70 жетони, што значи дека дале 64 жетони.

   Бидејќи Павел платил со жетони од 3 денари, а Томи со жетони од 5

денари, заклучуваме дека Павел дал повеќе жетони од Томи. Затоа ги разгледуваме случаите кога бројот на жетоните кои ги дал Павел е поголем од 32, при што бројот на жетоните на Павел е делив со 5.
Ако Павел дал 35 жетони, тогаш Томи дал 29 жетони што не е можно бидејќи $35 \cdot 3 \neq 29 \cdot 5$.
Ако Павел дал 40 жетони, тогаш Томи дал 24 жетони, што е решение бидејќи $40 \cdot 3 = 24 \cdot 5$.
Ако Павел дал 45 или повеќе жетони, тогаш тој платил $45 \cdot 3 = 135$ или повеќе денари, а Томи дал 19 или помалку жетони, па тој платил $19 \cdot 5 = 95$ или помалку денари, што не е можно.
Конечно, цената на волшебниот напиток е 120 денари.

3. Во последното тримесечие од годината една фирма остварила добивка 24000 евра, која е еднаква на 20% од годипната добивка на фирмата. Определи ја просечната месечна добивка на оваа фирма.
Решение. Бидејќи 20% од годишната добивка се 24000 евра, добиваме дека годишната добивка на фирмата е еднаква на $\frac{24000}{20} \cdot 100 = 120000$ евра. Според тоа, просечната месечна добивка на фимета е еднаква на $120000 : 12 = 10000$ евра.

4. За колку дена човек кој за ден и половина заработува 45 евра и во еден ден троши 20% од дневната заработувачка, ќе заштеди 600 евра?
Решение. Бидејќи во еден и половина денови има 3 пати по половина дена, човекот за половина ден заработува $45 : 3 = 15$ евра. Значи, тој за еден ден заработува $2 \cdot 15 = 30$ евра. Од овие 30 евра, тој дневно троши 20%, односно $\frac{30 \cdot 20}{100} = 6$ евра, а му преостануваат $30 - 6 = 24$ евра. Конечно, 600 евра човекот ќе заштеди за $600 : 24 = 25$ дена.

5. Три работници последователно извршуваат една работа. Првиот работник завршил 40% од работата, вториот завршил $\frac{1}{3}$ од преостанатата работа и 5% од целата работа и третиот работник ја довршил работата. Како ќе биде распределено плаќањето на работниците ако целата работа е оценета со 40000 евра?
Решение. Вториот работник завршил $\frac{1}{3} \cdot 60\% + 5\% = 25\%$ и третиот работник завршил $100\%(40\% + 25\%) = 35\%$ од работата. Значи,

првиот работник ќе добие $40000 \cdot \frac{40}{100} = 16000$ евра, вториот ќе добие $40000 \cdot \frac{25}{100} = 10000$ евра и третиот ќе добие $40000 \cdot \frac{35}{100} = 14000$ евра.

6. Во продавница за облека Филип купил пантолони и потрошил 10% од парите што ги имал и уште 10 евра. Потоа, тој купил и вентијага за што потрошил 20% од парите што му останале и уште 20 евра. На крајот со преостанатите 80 евра Филип во продавницата за обувки си купил патики. Колку пари потрошил Филип?

Решение. Кога Филип потрошил 20% од сумата, му преостанале 80% од таа сума, а кога потрошил 10% од почетната сума му преостанале 90% од парите што ги имал. Сега, од условот на задачата следува дијаграмот:

$$\square \xrightarrow{\cdot 90\%} \square \xrightarrow{-10} \square \xrightarrow{\cdot 80\%} \square \xrightarrow{-20} \boxed{80}$$

Според тоа, пресметувајќи наназад, добиваме дека Филип потрошил

$$\begin{aligned}((80+20):0,8+10):0,9 &= (100:0,8+10):0,9\\ &= (125+10):0,9\\ &= 135:0,9 = 150\end{aligned}$$

евра.

7. Горјан на пазар однел $525\,kg$ лешници. Продал $\frac{3}{5}$ од сите лешници по цена 3 евра за килограм, $\frac{4}{5}$ од остатокот по цена 5 евра за килограм и третина од новиот остаток по цена 6 евра за килограм. По која цена ги продал Горјан преостанатите лешници ако вкупно добил 2023 евра?

Решение. Имаме $\frac{3}{5} \cdot 525 = 315$, што значи дека при првата продажба Горјан продал $315\,kg$ по 3 евра за килограм, и добил $3 \cdot 315 = 945$ евра и му останале $525 - 315 = 210\,kg$ лешници. Понатаму, од $\frac{4}{5} \cdot 210 = 168$ следува дека при втората продажба Горјан продал $168\,kg$ по цена од 5 евра за килограм, со што добил $5 \cdot 168 = 840$ евра и му останале $210 - 168 = 42\,kg$ лешници. Сега, од $42:3 = 14$ следува дека Горјан $14\,kg$ лешници продал по цена од 6 евра за килограм, со што добил $14 \cdot 6 = 84$ евра и му останале $42 - 14 = 28\,kg$ лешници. За овие $28\,kg$ лешници Горјан добил $2023 - (945 + 840 + 84) = 154$ евра, што значи дека последните лешници Горјан ги продал по цена од $154:28 = 5,5$

евра за килограм.

8. Ако на пазарот може да се купат 300 манга за една драма, а 30 зрели шипки за една пана, колку шипки може да се добијат во замена за десет манга? (1 драма вреди колку 16 пани)
Решение. 300 манга чинат 1 драма, односно 16 пани. Бидејќи за 1 пана може да се добијат 30 шипки, за 16 пани може да се добијат $30 \cdot 16 = 480$ шипки. Значи, за 300 манга може да се добијат 480 шипки, па затоа за десет манга може да се добијат 30 пати помалку шипки, односно $480 : 30 = 16$ шипки.

9. Цената на еден производ последователно два пати е зголемена за по 12%. Колку проценти е повисока цената на производот во однос на цената пред зголемувањата?
Решение. Ако x е цената на производот пред зголемувањата, тогаш по првото зголемување цената на производот е $y = x + \frac{12}{100}x = 1{,}12x$.
Слично, по второто зголемување цената на производот е
$$z = 1{,}12y = 1{,}12 \cdot 1{,}12x = 1{,}2544x .$$
Значи, по второто зголемување цената на производот во однос на почетната цена е поголема за $1{,}2544 \cdot 100 - 100 = 25{,}44\%$.

10. Цената на една книга прво се зголемила за 10%, потоа се намалила за 20% и повторно се зголемила за 10%. Дали цената на книгата на крајот е поголема или помала од почетната цена и за колку проценти?
Решение. Нека почетната цена на книгата е x денари. По првото зголемување од 10% цената на книгата е
$$y = x + \frac{10x}{100} = 1{,}1x .$$
По намалувањето од 20% цената на книгата е
$$z = y - \frac{20y}{100} = 0{,}8y = 0{,}8 \cdot 1{,}1x = 0{,}88x .$$
По второто зголемување од 10% цената на книгата е
$$u = z + \frac{10z}{100} = 1{,}1z = 1{,}1 \cdot 0{,}88x = 0{,}968x = (1 - 0{,}032)x = x - \frac{3{,}2}{100}x ,$$
од каде следува дека крајната цена на книгата е 3,2% пониска во однос на нејзината почетна цена.

11. Цената на една книга се зголемила за 20%, а потоа се намалила за

10%. За колку проценти треба да се намали најновата цена на книгата, за да цената на книгата биде еднаква на 54% од нејзината почетна цена?

Решение. Нека x е почетната цена на книгата, а p е бараниот процент. Од условот на здачата следува равенката

$$1,2 \cdot 0,9x - \frac{p}{100} \cdot 1,2 \cdot 0,9x = 0,54x$$

од каде последователно добиваме

$$\frac{p}{100} \cdot 1,08x = 1,08x - 0,54x$$
$$1,08p = 0,54 \cdot 100$$
$$p = 50\%.$$

Според тоа, последната цена на книгата треба да се намали за 50%.

12. Цената на ист вид патики во две продавници била еднаква. Во едната продавница цената на патиките се зголемила за 8%, а во другата се намалила за 8%. Колкава е почетната цена на патиките, ако сега разликата на цените е еднаква на 1200 денари?

Решение. Со x да ја означиме почетната цена на патиките. Сега, во едната продавница цената е $1,08x$, а во другата е $0,92x$. Според тоа,

$1,08x - 0,92x = 1200$, т.е. $0,16x = 1200$,

од каде добиваме $x = 7500$ денари.

13. Во една слаткарница вчера се продадени колачи и торти, како што е прикажано во следнава табела:

Вид и цена	Колач 1 евро	Колач 5 евра	Торта 10 евра	Торта 15 евра
Број на продадени	100	25	20	15

а) Колку проценти од продадените колачи и торти се по цена од 1 евро?

б) Приближно колку проценти од остварената продажба се добиени од тортите од 15 евра?

Решение. а) Вкупно се продадени $100 + 25 + 20 + 15 = 160$ колачи и торти од кои 100 се колачи од 1 евро. Значи, од продадените колачи и торти $\frac{100}{160} = 0,625 = 62,5\%$ се со цена од 1 евро.

б) Од продажбата се заработени $100 \cdot 1 + 25 \cdot 5 + 20 \cdot 10 + 15 \cdot 15 = 650$ евра. Од продажбата на торти од 15 евра се добиени $15 \cdot 15 = 225$ евра.

Според тоа, тортите од 15 евра во остварената продажба учествуваат со $\frac{225}{650} = \frac{9}{26} = 0,3(461538) \approx 34,62\%$

14. Во лабораторија од два вида растенија се добиваат етерични масла A и B. Десет минути обработка на еден тон растение чини 100 евра. Во долната табела се дадени податоците за количествата етерични масла A и B (во литри) од $1t$ растителен материјал.

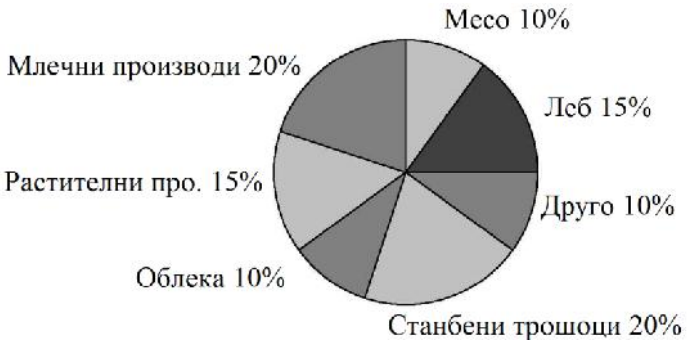
Количество добиено етерично масло (l/t)					
Етерично масло A			Етерично масло B		
Обработка	Растение 1	Растение 2	Обработка	Растение 1	Растение 2
10 мин	3,0	3,5	10 мин	2,0	2,5
15 мин	4,0	3,8	15 мин	2,7	2,5

Ако $1l$ етерично масло A се продава 200 евра, а $1l$ етерично масло B се продава 300 евра, да се определи максималната добивка при вадење на едно етерично масло од едно растение.

Решение. Поголемо количество етерично масло A при 10 минути обработка се добива од растението 2, при што заработувачката е $3,5 \cdot 200 - 100 = 600$ евра. Поголемо количество етерично масло A при обработка од 15 минути се добива од растението 1, при што заработувачката е $4 \cdot 200 - 150 = 650$ евра (јасно е дека 15 минути обработка чини $1,5 \cdot 100 = 150$ евра).

Поголемо количество етерично масло B при 10 минути обработка се добива од растението 2, при што заработувачката е $300 \cdot 2,5 - 100 = 650$ евра. Поголемо количество етерично мсло при 15 минути обработка се добива од растението 1, при што заработувачката е $2,7 \cdot 300 - 150 = 660$ евра и тоа е максималната заработувачка.

15. На кружниот дијаграм е дадена распределбата на буџетот на едно семејство.



а) Колку проценти од буџетот ова семејство троши за исхрана?
б) Со колку проценти од семејните расходи за храна учествува лебот?
в) Килограм леб чини 8 пати помалку од килограм месо. Каков е односот на количеството месо наспрема количеството леб во ова семејство?

Решение. а) Расходите за исхрана во ова семејство се

$$15+20+10+15=60\%$$

од приходисе на семејството.

б) Расходите за леб се 15%, а за храна се 60% од приходите. Според тоа, $\frac{15}{60}=25\%$ од расходите за храна се за леб.

в) Семејството дава $15:10=1,5$ пати повеќе пари за леб, отколку за месо. Освен тоа, лебот е 8 пати поефтин од месото, па затоа количеството леб е $1,5\cdot 8=12$ пати поголемо отколку количеството месо. Значи, бараниот однос е $1:12$.

16. За театарската претстава „Пепелашка“, цената на влезницата за возрасен човек е за 50% поголема од цената на влезницата за дете. Ако влезниците за пет возрасни луѓе и четири деца вкупно чинат 39,79 евра, определи колку чинат влезниците за осум возрасни луѓе и шест деца.

Решение. Нека x е цената на влезницата за дете. Тогаш $1,5x$ е цената на влезницата за возрасен човек. Од условот на задачата слеува

$$5\cdot 1,5x+4x=39,79$$
$$11,5x=39,79$$
$$x=3,46.$$

Според тоа, цената на влезницата за дете е 3,46 евра. Значи, влезниците за осум возрасни луѓе и шест деца чинат

$$8\cdot 1,5x+6x=12x+6x=18x=18\cdot 3,46=62,28 \text{ евра.}$$

17. Пабло, Андреј и Филип заедно купиле таблет. Пабло платил 60% од цената на таблетот, Андреј платил 40% од преостанатиот дел, а Филип учествувал со 30 евра. Колку пари чинел таблетот?

Решение. Нека таблетот чини x евра. Пабло дал $0,6x$ евра, а Андреј дал 40% од $0,4x$ евра, што значи дека дал $0,4\cdot 0,4x=0,16x$ евра. Според тоа, Филип платил $x-0,6x-0,16x=0,24x$ евра, па затоа $0,24x=30$, од каде добиваме $x=125$ евра.

18. Горјан, Пабло и Филип купиле топка која ја платиле 204 евра. Горјан дал 20 евра повеќе од Пабло, а Филип дал 20% поголема сума од Горјан. Со колку пари учествувало секое од децата во купувањето на топката?

Решение. Нека Пабло дал x евра. Тогаш Горјан дал $x+20$ евра, а Филип дал $1,2(x+20)$ евра. Значи,

$$x+x+20+1,2(x+20)=204$$
$$3,2x+44=204,$$
$$x=50.$$

Според тоа, за купувањето на топката Пабло дал 50 евра, Горјан дал 70 евра и Филип дал 84 евра.

19. Матео обиколил три продавици и ги потрошил сите пари. Со половината од парите Матео купил книга, потоа со $\frac{1}{3}$ од преостанатите пари купил топка, а последните 18 евра ги потрошил за нова капа. Колку пари потрошил Матео?

Решение. *Прв начин.* Нека Матео вкупно имал x евра. За книгата тој платил $\frac{x}{2}$ евра и му останале $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$ евра. За топката платил $\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$ евра, по што му останале $x-(\frac{x}{2}+\frac{x}{6})$. Значи, $x-(\frac{x}{2}+\frac{x}{6})=18$, од каде добиваме $x=54$.

Втор начин. Последните 18 евра се $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ од парите, кои Матео ги имал по купувањето на книгата. Според тоа, по купувањето на книгата на Матео му останале $18:\frac{2}{3}=18\cdot\frac{3}{2}=27$ евра. Бидејќи Матео за купување на книгата потрошил половина од парите кои ги имал на почетокот, добиваме дека тој имал $27\cdot 2=54$ евра.

20. Платата на Пабло е 75% од платата на Матео. Секој од нив троши дел од платата, а преостанатиот дел го штеди. Пабло троши 50% од сумата која ја троши Матео, а Матео троши толку колку што е платата на Пабло. Ако Матео заштедил 600 евра, колку евра заштедил Пабло?

Решение. Нека платата на Матео е x евра. Тогаш платата на Пабло е $0,75x$ евра. Матео троши $0,75x$ и штеди $0,25x$, а Пабло троши $0,5\cdot 0,75x=0,375x$ евра и штеди $0,375x$. Матео штеди 600 евра, па затоа $0,25x=600$, до каде добиваме $x=2400$ евра. Според тоа, Пабло заштедил $0,375\cdot 2400=900$ евра.

21. Андреј, Пабло и Филип купиле по една книга со една иста цена и потрошиле соодветно 100%, $55\frac{5}{9}\%$ и 50% од парите кои ги имале. Преостанатите пари има стигнале точно за три билети за кино од по 3 евра. Определи ја цената на книгата?

Решение. Нека Андреј пред да ја купи книгата имал x евра. Тогаш и цената на книгата е x евра. Бидејќи $55\frac{5}{9}\% = \frac{5}{9}$ и $50\% = \frac{1}{2}$, заклучуваме дека пред купувањеето на книгата Пабло имал $x : \frac{5}{9} = \frac{9}{5}x$ евра и Филип имал $x : \frac{1}{2} = 2x$ евра. Значи, на Пабло му преостанале $\frac{4}{5}x$ евра, а на Филип му преостанале x евра. Оттука следува дека $\frac{4}{5}x + x = 9$, од каде наоѓаме $x = 5$. Значи, книгата чинела 5 евра.

22. Во една продавница за спортска опрема пар патики се продавал 900 денари поефтино од една тренерка. На акција патиките биле намалени за 10%, а тренерките за 5%. Матео купил пар патики и тренерка на намаление и за нив платил вкупно 5480 денари. Колку чинеле парот патики, а колку тренерката пред намалувањето?

Решение. Нека цената на патиките пред намалувањето била x денари. Тогаш цената на тренерката пред намалувањето била $x + 900$ денари. По намалувањето цената на патиките била $0,9x$ денари, а цената на тренерката $0,95(x + 900)$ денари, па затоа важи

$$0,9x + 0,95(x + 900) = 5480 .$$

Според тоа, $1,85x = 4625$, од каде добиваме $x = 2500$. Значи, пред намалувањето цената на патиките била 2500 денари, а цената на тренерката 3400 денари.

23. За некоја сума пари домаќинката Соња може да купи $20\,kg$ компири. Колку компири може да купи Соња за истата сума пари, откако цената на компирите се намалила за 20%?

Решение. Нека земеме дека цената на компирот е x денари. Со парите што ги има таа може да купи $20\,kg$ компири, што значи дека таа има $y = 20x$ денари. По намалувањето цената на компирот е $0,8x$ денари, што значи дека

таа може да купи $y:(0,8x)=20x:(0,8x)=20:0,8=25\,kg$ компири.

24. Цената на еден производ се намалила за 5%. Потоа цената на истиот производ се зголемила за 40% и сега таа е за 135206 денари помала од двократната почетна цена. Определи ја почетната цена на производот.
Решение. Со x да ја означиме почетната цена на производот. Тогаш важи

$$x-0,05x+0,4\cdot(x-0,05x)=2x-135206,$$

од каде последователно добиваме

$$0,95x+0,4\cdot 0,95x=2x-135206$$
$$0,95x+0,38x=2x-135206$$
$$2x-1,33x=135206$$
$$0,67x=135206$$
$$x=201800.$$

Според тоа, пичетната цена на производот е еднаква на 201800 денари.

25. Ивана купила четири производи чија вкупна цена била 30 евра. Ако на овие производи им додаде вентијага, тогаш просечната цена на петте производи ќе биде 20 евра. Ако наместо вентијагата купи чизми и панталонии, тогаш просечната цена ќе биде пак 20 евра. Чизмите чинат 54 евра повеќе од панталоните. Определи ги цените на јакната, чизмите и панталоните.
Решение. Со x да ја означиме цената на вентијагата. Од условот на задачата следува дека $(30+x):5=20$, од каде добиваме $x+30=100$, т.е. $x=70$. Значи, вентијагата чини 70 евра.
Со y и z да ги означиме цените на чизмите и панталоните, соодветно. Од условот на задачата следува $(30+y+z):6=20$ и $y=z+54$. Од првата равенка наоѓаме $y+z=90$ и ако замениме од втората равенка добиваме $2z+54=90$, од каде следува $z=18$. Значи, панталоните чинат 18 евра, а чизмите чинат $54+18=72$ евра.

26. Јован шета во супермаркет и разгледува. Му се допаѓа една книга, но му се допаѓа и една топка. Книгата е поскапа од топката за 360 денари. Јован забележал дека за вредноста на 5 топки може да купи две такви книги и уште едно чоколадо. Топката е три пати поскапа од чоколадото. На крајот Јован купил една книга, една топка и едно

чоколадо. Колку пари платил Јван?

Решение. Со x, y и z да ги означиме цените на книгата, топката и чоколадото, соодветно. Имаме

$$\begin{cases} x - y = 360, \\ 2x + z = 5y, \\ 3z = y. \end{cases}$$

Ако од третата равенка замениме во втората добиваме $2x + z = 15z$, од каде наоѓаме $x = 7z$. Сега, заменуваме во првата равенка и добиваме $7z - 3z = 360$, од каде добиваме $z = 90$. Според тоа, чоколадото чини 90 денари, топката чини $3 \cdot 90 - 270$ денари и книгата чини $7 \cdot 90 = 630$ денари. Конечно, Јован потрошил $90 + 270 + 630 = 990$ денари.

27. Четири другари заедно купиле топка. Првиот платил половина од вкупната вредност на топката, вториот платил третина од сумата кои ја дале другите тројца, а третиот платил четвртина од сумата која ја дале другите тројца. Четвртиот платил 100 денари. Колку пари чинела топката?

Решение. Со x да ја означиме цената на топката, а со a, b, c, d парите кои ги дал првиот, вториот, третиот и четвртиот друга, соодветно. Имаме $a + b + c + d = x$, каде $d = 100$. Понатаму, првиот дал половина од цената на топката, т.е. $a = \frac{x}{2}$. Според вториот услов на здачата имаме $b = \frac{a+c+d}{3}$, од каде добиваме $b = \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{b}{3}$, па затоа $\frac{4}{3}b = \frac{x}{3}$, т.е. $b = \frac{x}{4}$. Од третиот услов на задачата следува $c = \frac{a+b+d}{4}$, од каде добиваме $c = \frac{a+b+c+d}{4} - \frac{c}{4}$, па затоа $\frac{5}{4}c = \frac{x}{4}$, т.е. $c = \frac{x}{5}$.

Според тоа, $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 100 = x$, од каде добиваме $x = 2000$. Значи, топката чинела 2000 денари.

28. Во книжарница стигнала кутија моливи и е планирано сите да се продадат по иста цена. Една четвртина од вкупниот број моливи се продадени по 5% повисока цена од планираната. Половина од моливите се продаден по 10% пониска цена од планираната. По колку проценти повисока цена од планираната треба да се продадат преостанатите моливи за да се оствари заработувачката која е планирана кога пристигнале моливите?

Решение. Со x да ја означиме планираната заработувачка, а со y процентот за кој остатокот од моливите треба да се продаде по повисока цена. Од условот на задачата имаме

$$1,05\cdot\frac{x}{4}+0,9\cdot\frac{x}{2}+\frac{100+y}{100}\cdot\frac{x}{4}=x\,.$$

Ако горната равенка ја помножиме со $\frac{400}{x}$, ја добиваме равенката $105+180+100+y=400$, чие решение е $y=15\%$.

29. Во текот на месец август во продавница за чевли еден од моделите на летни чевли бил намален 25% и биле продадени 400 пара чевли повеќе од овој модел отколку во месец јули. Се покажало дека приходите од продажбата на овој модел чевли биле еднакви во двата месеци. Колку пара чевли од овој модел биле продадени во текот на двата месеци?

Решение. Ако цената на чевлите во месец јули е x, тогаш цената на истите чевли во месец август била $0,75x$. Понатаму, ако во текот на месец јули се продале y пара чевли, во текот на август се продале $y+400$ пара од истите чевли. Но, остварениот приход е ист, па затоа

$$yx=0,75x(y+400)\,,$$

од каде добиваме

$$y=0,75y+300\,,$$

односно $y=1200$. Значи, во јули се продале 1200 пара чевли, а во август се продале $1200+400=1600$ пара чевли. Конечно, во двата месеци вкупно се продале $1200+1600=2800$ пара чевли.

30. Максим пазарувал и потрошил 80% од парите кои ги имал. Притоа по завршување на пазарувањето имал толку евроценти, колку што имал евра пред пазарувањето, и пет пати помалку евра, отколку што имал евроценти пред пазарувањето. Колку пари имал Максим пред пазарувањето?

Решение. Нека Максим пред пазарувањето имал x евра и y евроценти, т.е. $100x+y$ евроценти. По пазуравањето Максим имал $\frac{y}{5}$ евра и x евроценти, односно $20y+x$ евроценти. Бидејќи Максим потрошил 80% од парите, добиваме дека $5(20y+x)=100x+y$, од каде следува $99y=95x$. Но, броевите 99 и 95 се заемно прости, па затоа

$99 \mid x$ и $95 \mid y$. Бидејќи $0 < y < 100$, добиваме дека $y = 95$, па затоа $x = 99$. Значи, Максим пред пазарувањето имал 99 евра и 95 евроценти.

31. Хуманитарна организација од продажба на 150 билети за добротворна претстава заработило 2023 евра. Повеќе од 100 билети биле продадени по една цена која е природен број, а преостанатите билети биле продадени со 50% попуст. Колкава е заработувачката од билетите кои биле продадени без попуст?

Решение. Нека x е цената на билет кој е продаден без попуст. Тогаш цената на билет кој е продаден со 50% попуст е $\frac{x}{2}$. Ако y билети се продадени без попуст, тогаш $150 - y$ билети се продадени без попуст и затоа важи

$$xy + \tfrac{x}{2}(150 - y) = 2023,$$

од каде последователно добиваме

$$2xy + 150x - xy = 4046,$$
$$xy + 150x = 4046,$$
$$x(y + 150) = 4046.$$

Понатаму, бројот на билетите продадени без попуст е поголем од 100 и е помал од 150, т.е. $100 < y < 150$. Сега, од $x \in \mathbb{N}$ следува дека $y + 150$ е делител на 4046. Но, $4046 = 2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 17$, па затоа единствена можност е $y + 150 = 289$, т.е. $y = 139$. Тогаш $x = 4046 : 289 = 14$ и заработувачката од билетите кои биле продадени без попуст е $14 \cdot 139 = 1946$ евра.

32. Андреј, Филип и Горјан поделиле определена сума пари. Андреј добил 56 евра и четвртина од остатокот на парите. Потоа Филип од преостанатите пари добил 78 евра и четвртина од новиот остаток. На крајот Горјан добил 90 евра и четвртина од новиот остаток. Како Андреј, Филип и Горјан треба да ги поделат преостанатите 108 евра за да секој од нив добие иста сума пари?

Решение. *Прв начин*. Преостанатите 108 евра се $\frac{3}{4}$ од остатокот кога Горјан зел 90 евра. Според тоа, третиот остаток е $108 \cdot \frac{4}{3} = 144$ евра и Горјан добил $90 + \frac{1}{4} \cdot 144 = 126$ евра.

Понатаму, $\frac{3}{4}$ од вториот остаток е $90+144=234$ евра, па затоа вториот остаток е $234\cdot\frac{4}{3}=312$ евра и Филип добил $78+\frac{1}{4}\cdot 312=156$.

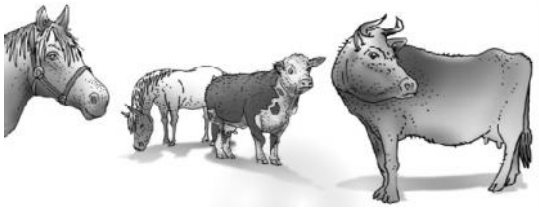
Сега, $\frac{3}{4}$ од првиот остаток е $78+312=390$ евра, па затоа првиот остаток е $390\cdot\frac{4}{3}=520$ евра и Андреј добил $56+\frac{1}{4}\cdot 520=186$ евра.

Значи, Андреј добил 186 евра, Филип добил 156 евра и Горјан добил 126 евра, а преостанале 108 евра. На Горјан му недостасуваат $186-126=60$ евра за да има колку Андреј, а на Филип му недостасуваат $156-126=30$ евра за да има колку Андреј. Преостанатите $108-(60+30)=18$ евра ќе ги поделиме поедначкво. Значи, Андреј треба да добие 6 евра, Филип треба да добие 36 евра и Горјан треба да добие 66 евра.

Втор начин. Нека на почетокот имало x евра. Од вкупната сума Андреј добил $56+\frac{1}{4}(x-56)=\frac{1}{4}x+42$ и останале $x-(\frac{1}{4}x+42)=\frac{3}{4}x-42$ евра. Понатаму, Филип добил $78+\frac{1}{4}(\frac{3}{4}x-42-78)=\frac{3}{16}x+48$ и останале $\frac{3}{4}x-42-(\frac{3}{16}x+48)=\frac{9}{16}x-90$ евра. Конечно, Горјан добил $90+\frac{1}{4}(\frac{9}{16}x-90-90)=\frac{9}{64}x+45$ евра и останале $\frac{9}{16}x-90-(\frac{9}{64}x+45)=$ $\frac{27}{64}x-135$ евра. Значи, $\frac{27}{64}x-135=108$, од каде добиваме $x=576$.

Значи, Андреј добил $\frac{1}{4}\cdot 576+42=186$, Филип добил $\frac{3}{16}\cdot 576+48=156$ и Горјан добил $\frac{9}{64}\cdot 576+45=126$ евра. Бидејќи $576:3=192$, Андреј треба да добие $192-186=6$, Филип треба да добие $192-156=36$ и Горјан треба да добие $192-126=66$ евра.

33. Трговец купува неколку коњи и бикови за сума од 1770 талири. Платил 31 талир за секој бик и 21 талир за секој коњ. Колку бикови и коњи купил трговецот?



Решение. Ако со b го означиме бројот на биковите и со k бројот на коњите, тогаш од условот на задачата следува Диофантовата равенка $31b+21k=1770$. Последната равенка е еквивалентна на равенката

$k = 84 - b + \frac{6-10b}{21}$, каде $\frac{6-10b}{21} = t$ е природен број. Последната равенка е еквивалентна со равенката $6 - 10b = 21t$, односно со равенката $b = -2t + \frac{6-t}{10}$, каде $u = \frac{6-t}{10}$ е природен број. Според тоа, $t = -10b + 6$, па затоа

$$b = -2(-10u + 6) + u = 21u - 12 \text{ и}$$
$$k = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u .$$

Броевите b и k се природни броеви, па затоа мора да важи

$$21u - 12 > 0 \text{ и } 102 - 31u > 0 ,$$

од каде добиваме $\frac{12}{21} < u < \frac{102}{31}$ и како u е природен број, следува дека $u = 1, 2, 3$. За $u = 1$, добиваме $b = 9, k = 71$, за $u = 2$ добиваме $b = 30$, $k = 40$ и за $u = 3$ добиваме $b = 51, k = 9$.

34. Еден петел чини 5 евра, една кокошка чини 3 евра и три пилиња чинат 1 евро. Дедо Марко купил 100 птици за 100 евра. Колку петли, кокошки и пилиња купил дедо Марко?

Решение. Нека дедо Марко купил x петли, y кокошки и z пилиња. Тогаш

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100. \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $x = 100 - y - z$ и со замена во втората равенка наоѓаме

$$5(100 - y - z) + 3y + \tfrac{1}{3}z = 100 .$$

По средувањето на последната равенка добиваме $y = 200 - \frac{7}{3}z$, па затоа $x = 100 - (200 - \frac{7}{3}z) - z = \frac{4}{3}z - 100$. Броевите x и y мора да се природни, од каде добиваме $200 - \frac{7}{3}z > 0$ и $\frac{4}{3}z - 100 < 0$, односно $75 < z < \frac{600}{7}$. Понатаму, z е природен број, па затоа z е некој број од множеството $\{76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85\}$ и бидејќи x и y се природни броеви мора да е бројот z делив со 3. Значи, $z = 78, 81, 84$.

За $z = 78$, добиваме $x = 4, y = 18$, за $z = 81$, добиваме $x = 8, y = 11$ и за $z = 84$ добиваме $x = 12, y = 4$.

7. ЗАДАЧИ СО РАБОТА

1. Ако 40 деца садат 160 дрвца за еден ден ден, колку дрвца ќе посадат 60 деца за 5 дена? (Секое дете секој ден сади еднаков број дрвца.)
Решение. *Прв начин*. Едно дете за еден ден сади $160:40=4$ дрвца. Значи, 60 деца за еден ден садат $60\cdot 4=240$ дрвца. Според тоа, за 5 дена 60 деца ќе посадат $5\cdot 240=1200$ дрвца.
Втор начин. Дваесет деца за 1 ден садат $160:2=80$ дрвца. Значи 20 деца за 5 дена ќе посадат $5\cdot 80=400$ дрвца. Сега, бидејќи $60:20=3$, добиваме деа 60 деца за 5 дена ќе посадат $3\cdot 400=1200$ дрвца.

2. Три мајстори за 5 часа покриле со еднакви квадратни плочки правоаголен под $6\times 5,2\,m$. Мајсторите ги избрале најголемите можни плочки, со кои може да го покријат подот, без да има потреба да ги сечат плочките. За колку часа двајца мајстори ќе залепат 104 плочки од истиот вид?
Решение. Бидејќи $\text{NZD}(60,52)=4$, мајсторите избрале плочки со страна $4\,dm$. Тие залепиле $(60:4)\cdot(52:4)=195$ плочки. Ако за 5 часа тројца мајстори залепиле 195 плочки, еден мајстор за еден час ќе залепи $195:(3\cdot 5)=13$ плочки. Според тоа, двајца мајстори за 1 час ќе залепат $13\cdot 2=26$ плочки од истиот вид. Конечно, двајца мајстори 104 плочки ќе залепат за $104:26=4$ часа.

3. Петар еден ѕид може да сосида за 6 дена, а Мирко истиот ѕид може да го сосида за 12 дена. За колку дена ќе биде сосидан ѕидот, ако Петар и Мирко работат заедно?

Решение. За еден ден Петар ќе сосида $\frac{1}{6}$ од ѕидот, а Мирко ќе сосида $\frac{1}{12}$ од ѕидот. Според тоа, ако двајцата работат заедно тие за еден ден ќе сосидаат $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ од ѕидот. Конечно, ако двајцата работат заедно, Петар и Мирко ѕидот ќе го сосидаат за 4 дена.

4. Шеснаесет работници за 5 дена завршиле $\frac{4}{9}$ од некоја работа. Колку работници треба уште да се ангажираат за да преостанатиот дел од работата, ако работниците работат со исто темпо, се заврши за 4 дена?

   Решение. За еден ден 16 работници завршуваат $\frac{4}{45}$ дел од работата. За да работниците за 4 дена завршат $\frac{5}{9}$ од работата, тие дневно треба да сработуваат $\frac{5}{36}$ делови од работата. Ако со x го означиме бројот на работниците за да преостанатата работа се заврши за 4 дена, тогаш $16 : x = \frac{4}{45} : \frac{5}{36}$, од каде добиваме $x = 25$. Значи, потребно е да се ангажираат уште $25 - 16 = 9$ работници.

5. Базен со волумен 18500 литри се полни од три отворени цевки. Од првата ценка во една минута истекува 32 литри вода. Од втората цевка во две минути истекува онолку вода колку што од првата цевка истекува вода за три минути. Од третата цевка за 5 минути истекува онолку вода колку што истекува од втората вода за 4 минути. Ако сите три цевки се отворат истовремено, за колку минути ќе се наполни целиот базен?

   Решение. Од првата цевка за една минута истекуваат 32 литри вода, од втората цевка за една минута истекуваат $(3 \cdot 32) : 2 = 48$ литри вода, а од третата цевка за една минута истекуваат $(4 \cdot 48) : 5 = 38,4$ литри вода. Според тоа, од третите цевки за една минута истекуваат $32 + 48 + 38,4 = 118,4$ литри вода. Значи, базенот ќе се наполни за

   $$18500 : 118,4 = 156,25 \text{ min} = (120 + 36 + \tfrac{1}{4}) \text{ min} = 2\ h\ 36 \text{ min } 15\ s\ .$$

6. Базен се полни од неколку еднакви цевки. Ако имаше два пати повеќе цевки, базенот ќе се наполнеше за 5 часа пократко време, а ако цевките беа за 2 повеќе, базенот ќе се наполнеше за 6 часа. Колку цевки го полнат базенот?

   Решение. Два пати повеќе цевки го полнат базенот за два пати пократко време. Бидејќи тоа време е 5 часа, со дадените цевки базенот се полни за 10 часа.

   Понатаму, за 6 часа со дадените цевки се полни $\frac{6}{10}$ од базенот, што значи дека додадените 2 цевки за 6 часа ги полнат преостанатите $\frac{4}{10}$

од базенот. Оттука, 1 цевка за 1 час полни $\frac{4}{10}:(2\cdot 6)=\frac{1}{30}$ од базенот. Значи, за 10 часа една цевка полни $\frac{1}{30}\cdot 10=\frac{1}{3}$ од базенот. Конечно, базенот се полни со 3 цевки.

7. За да изора дадена површина во определен рок, тракторист требало да ора по 20 декари на ден. Тој решил да работи 20% повеќе од определената норма, па така 3 дена пред определеното време изорал $\frac{4}{5}$ од целата површина. Определи ја плоштината на површината која требало да ја изора трактористот.

Решение. Нека трактористот според планот требало да ора x дена. Тој требало да ора 20 декари на ден, но орал 20% повеќе, што е 24 декари на ден, па за $x-3$ дена изорал $24(x-3)$ декари. Целата површина е $20x$ декари, па како трактористот за $x-3$ дена изорал $\frac{4}{5}$ од површината, добиваме $24(x-3)=\frac{4}{5}\cdot 20x$, т.е. $24(x-3)=16x$, односно $x=9$ дена. Значи, површината која требало да ја изора трактористот има плоштина $20\cdot 9=180$ декари.

8. Дедо Стојан може сам да ја окоси ливадата за 8 часа, а неговиот внук Матеј може сам да ја окоси ливадата за 13 часа. Дали двајцата заедно може да ја окосат ливадата за 5 часа?

Решение. За 1 час дедо Стојан може да окоси $\frac{1}{8}$ од ливадата, а неговиот внук Матеј може сам да окоси $\frac{1}{13}$ од ливадата. Двајцата заедно за 1 час може да окосат $\frac{1}{8}+\frac{1}{13}=\frac{21}{104}$ дел од ливадата. Според тоа, за 5 часа двајцата заедмо може да окосат $5\cdot\frac{21}{104}=\frac{105}{104}=1\frac{1}{104}$ делови од ливадата. Конечно, бидејќи $1\frac{1}{104}>1$, дедо Стојан и неговиот внук Матеј за 5 часа може да ја окосат целата ливада.

9. Еден работник завршува дадена работа за 12 дена, а друг работник

истата работа ја завршува за $\frac{2}{3}$ од времето на првиот работник. Двајцата работници почнале истовремено да работат, но по неколку дена првиот работник бил преместен на друга работа, а вториот работник ја доврпил работата за три дена. За колку дена е завршена целата работа?

Решение. Вториот работник целата работа ја завршува за $\frac{2}{3}\cdot 12 = 8$ дена. Бидејќи по преместување на првиот работник, вториот работник ја завршил работата за 3 дена, тој сам завршил $\frac{3}{8}$ од работата. Значи, двајцата работници работејќи заедно завршиле $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ од работата. Но, кога тие заедно работат дневно завршуваат $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$ од работата, што значи дека заедно работеле $\frac{5}{8}:\frac{5}{24}=3$ дена. Конечно, целата работа била завршена за $3+3=6$ дена.

10. Двајца работници работат заедно и изработуваат определен број исти делови, при што првиот работник изработил 40 делови помалку од вториот. Ако првиот работник од почетокот го зголеми својот производен капацитет за $\frac{100}{3}\%$, работејќи едновремено, двајцата ќе ја исполнат порачката, при што ќе изработат еднаков број делови. Колку делови била порачката?

Решение. Со t да го означиме времето на работење на двајцата работници. Ако производниот капацитет на првиот работник е x, тогаш производниот капацитет на вториот работник е $\frac{4}{3}x$ (имено $x+\frac{100\%}{3}x=\frac{4}{3}x$). Сега, од условите на задачата следува $xt+40=\frac{4}{3}xt$, од каде добиваме $xt=120$. Според тоа, првиот работник изработил 120 делови, а вториот 160 делови или заедно изработиле 280 делови.

11. Во една печатница има три машини за печатење. За потребите на изборна кампања Методија добил порачка да отпечати флаери. На првата машина за 3,5 часа може да се отпечати 42% од порачката. На втората машина за 9 часа може да се отпечати 60% од порачката, а брзините на печатење на третата и втората машина се однесуваат како $6:5$. За колку време Методија може да ги отпечати флаерите ако трите машини започнат истовремено да печатат?

Решение. Првата машина за 1 час печати $\frac{42}{100}:\frac{7}{2}=\frac{3}{25}$ од целата порачка. Втората машина за 1 час завршува $\frac{60}{100}:9=\frac{1}{15}$ од порачката. Понатаму, третата машина за 1 час завршува $\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{15}=\frac{2}{25}$ од порачката. Според тоа, ако трите машини работата истовремено, тие за 1 час ќе завршат $\frac{3}{25}+\frac{1}{15}+\frac{2}{25}=\frac{9+5+6}{75}=\frac{4}{15}$ од порачката. Значи, за да ја завршат целата порачка трите машини треба истовремено да работа $\frac{15}{4}=3\,h\,45\,\min$.

12. Ана, Билјана и Цветанка молерисуваат соба. Ана може да ја молерира собата за 15 часа, Билјана за 10 часа, а Цветанка два пати побрзо од Ана. Ана почнала да молерисува сама час и половина, потоа и се придружила Билјана и заедно молерисувале додека не била молерисана половина од собата. Потоа им се придружила и Цветанка и сите три работеле заедно додека не ја молерисале целата соба. Колку вкупно минути траело молерисувањето на собата?

Решение. Ана за 60 минути молерисува $\frac{1}{15}$ од собата, а за 90 минути таа молерисува $1{,}5\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{10}$ од собата. Ана и Билјана заедно треба да молерисаат $\frac{4}{10}$ од собата. Тие заедно за 60 минути заедно молерисуваат $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$ од собата, па затоа $\frac{4}{10}$ од собата ќе молерисаат за $\frac{4}{10}:\frac{1}{6}=\frac{12}{5}\,h=144\,\min$. Ана, Билјана и Цветанка заедно треба да молерисаат половина соба. Трите заедно за 60 минути молерисуваат $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{2}{15}=\frac{3}{10}$ од собата, па затоа $\frac{1}{2}$ од собата ќе молерисаат за $\frac{1}{2}:\frac{3}{10}=\frac{5}{3}\,h=100\,\min$.

Конечно, молерисувањето на собата трае $90+144+100=334\,\min$.

13. Двајца работници, работејќи едновремено, завршуваат дадена работа за 5 дена. Ако првиот работник работи два пати побрзо, а вториот работник работи два пати побавно, тогаш тие работата ќе ја завршат за 4 дена. За колку дена секој работник самостојно ја завршува работата?

Решение. Нека првиот работник само ја завршува работата за x

денови, а вториот работник само ја завршува работата за y денови. Од условите на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{5}{y}=1, \\ \frac{4\cdot 2}{x}+\frac{4}{2y}=1. \end{cases}$$

Воведуваме смени $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$ и по средувањето го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 5u+5v=1, \\ 8u+2v=1. \end{cases}$$

Оттука наоѓаме $u=\frac{1}{10}, v=\frac{1}{10}$, односно $x=10, y=10$. Според тоа, секој работник самостојно работата може да ја заврши за 10 дена.

14. Одреден број на момчиња и девојчиња отишле на кампување за време на летниот распуст. Тие испланирале еколошка акција, што би ја завршиле за 29 дена ако секое дете работи рамномерно – во кои било денови сработува ист дел од работата. Момчињата работеле нешто побрзо; за исто време 2 момчиња работат исто колку што работат 3 девојчиња. За среќа, по три дена од почнување со работата, им се придружила поголема група деца, и тоа: момчиња – 8 пати повеќе од првичниот број на девојчиња, и девојчиња – 18 пати повеќе од првичниот број на момчиња. Новодојдените деца работат со иста динамика како и прводојдените. Колку вкупно денови биле работни?

Решение. Да претпоставиме дека на почетокот биле a момчиња и b девојчиња. Дневно тие завршуваат $\frac{1}{29}$-тина од работата. Затоа, првите три дена е завршено $\frac{3}{29}$-тини од работата. Бидејќи момчињата работат 1,5 пати побрзо, ситуацијата е иста како наместо овие a момчиња да имало $1,5a$ девојчиња, т.е. вкупно $1,5a+b$ девојчиња. Значи, секое девојче дневно завршува $\frac{1}{29(1,5a+b)}$ дел од работата.

Потоа дополнително доаѓаат $8b$ момчиња, што е исто како да работат $1,5\cdot 8b=12b$ девојчиња и $18a$ девојчиња. Сега сите деца дневно завршуваат работа како да има

$$1,5a+b+12b+18a=19,5a+13b=13(1,5a+b)$$

девојчиња. Оттука, ако по трите дена се потребни уште x денови за да се заврши акцијата, тогаш добиваме $\frac{3}{29}+\frac{13(1{,}5a+b)}{29(1{,}5a+b)}x=1$, од каде добиваме $3+13x=29$, т.е. $x=2$. Според тоа, целата акција траела $3+2=5$ дена.

15. Дончо има определено количество сено, со кое храни коњ, коза и крава. Сеното е доволно само кравата и коњот да се хранат 12 месеци, само кравата и козата да се хранат 15 месеци и само коњот и козата да се хранат 20 месеци. Колку месеци со сеното кое го има Дончо може да ги храни коњот, кравата и козата?

Решение. За еден месец само кравата и коњот изедуваат $\frac{1}{12}$ од сеното, само кравата и козата изедуваат $\frac{1}{15}$ од сеното и само коњот и козата изедуваат $\frac{1}{20}$ од сеното. Според тоа, за два месеца коњот, кравата и козата изедуваат $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{5+4+3}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ од сеното. Значи, целото сено е доволно за пет пати подолго време, односно за $5\cdot 2=10$ месеци.

16. За 4 седмици 12 говеда испасуваат $3\frac{1}{3}$ декари пасиште, а за 9 седмици 21 говедо испасуваат 10 декари пасиште. Ако тревата расте секогаш со иста брзина, колку говеда се потребни да испасат 24 декари пасиште во период од 18 седмици?

Решение. Нека x е почетното количество трева на еден декар пасиште, y е количеството трева кое едно говедо испасува за една седмица, z е количеството трева која израстува за една седмица на еден декар пасиште и g е непознатиот број говеда. Од првиот услов ја добиваме равенката

$$\tfrac{10}{3}(x+4z)=12\cdot 4y,$$

од вториот услов ја добиваме равенката

$$10(x+9z)=21\cdot 9y,$$

а од барањето на задачата следува равенката

$$24(x+18z)=18yg\,.$$

Ако ги поделиме првите две равенки, добиваме

$$\frac{\frac{10}{3}(x+4z)}{10(x+9z)}=\frac{12\cdot 4y}{21\cdot 9y},$$

од каде по средувањето наоѓаме $x=12z$. Сега со замена во за x во втората равенка добиваме $10(12z+9z)=21\cdot 9y$, од каде следува $y=\frac{10}{9}z$. Конечно, со замена во третата равенка наоѓаме

$$24(12z+18z)=18\cdot\frac{10}{9}zg\,,$$

од каде следува $g=36$. Значи, 36 говеда за 18 недели ќе испасат 24 декари пасиште.

8. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Во корпата на бабата на Андреј, Пабло и Филип имало ореви. Андреј изел 1 орев, половина од преостанатите ореви и уште 2 ореви. Пабло изел 2 ореви, половина од преостанатите ореви и уште 3 ореви. На крајот Филип изел 3 ореви, половина од останатите ореви и уште 4 ореви, по што во корпата останале 6 ореви. Колку ореви имало на почетокот во корпата?

   Решение. Филип изел $3+(6+4)+4=17$ ореви. Пред тој да земе ореви во корпата имало $17+6=23$ ореви. Пабло изел $3+(23+3)+3=31$ орев. Пред тој да земе ореви во корпата имало $23+31=54$ ореви. Значи, Андреј изел $1+(54+2)+2=59$ ореви. Конечно, на почетокот во корпата имало $17+31+59+6=113$ ореви.

2. Бојан и Ангел имале по 64 џамлии. Секој ден еден од нив му давал половина од своите џамлии на другиот. По 6 дена Бојан имал 61 џамлија, а Ангел имал 67 џамлии. Во колку од овие шест дена Ангел ги поделил своите џамлии со Бојан?

   Решение. Секој ден бројот на џамлиите е 128. Пред шестото делење Бојан или Ангел имал 2 пати повеќе џамлии, одколку на крајот. Бидејќи $2\cdot 67>128$, заклучуваме дека Бојан имал два пати повеќе џамлии и тој имал $2\cdot 61=122$ џамлии, а Ангел имал 6 џамлии. На истиот начин добиваме дека петтиот ден Ангел имал $2\cdot 6=12$ џамлии, а Бојан имал 116 џамлии. Четвртиот ден Ангел имал $2\cdot 12=24$ џамлии, третиот ден имал $2\cdot 24=48$ џамлии, а вториот ден имал $2\cdot 48=96$ џамлии. Вториот ден Бојан имал 32 џамлии, што значи дека првиот ден тој своите џамлии ги поделил со Ангел. Значи, Ангел своите џамлии со Бојан ги поделил вториот, третиот, четвртиот и петтиот ден, односно во 4 дена.

3. Во еден магацин има 360 гајби со јаболка и 384 гајби со круши. Гајбите со овошје треба да се испорачаат во различни продавници, во пратки во кои секогаш има еднаков број гајби со овошје и во секоја пратка има еднаков број гајби со јаболка. Камионите со кои се пренесуваат пратките со овошје може да носат најмногу 60 гајби. По

колку гајби со јаболка и колку гајби со круши има во секоја пратка?

Решение. Нека x е бројот на пратките кои треба да се испорачаат. Бидејќи секоја пратка содржи еднаков број гајби со овошје, но и еднаков број гајби со јаболка, заклучуваме дека секоја пратка содржи еднаков број гакби со круши. Според тоа, $x \mid 360$ и $x \mid 384$, од каде заклучуваме дека $x \mid \mathrm{NZD}(360,384) = 24$. Ако $x = 24$, тогаш во секоја пратка има $260 : 24 = 15$ гајби со јаболка и $384 : 24 = 16$ гајби со круши и како $15 + 16 = 31 < 60$ ваквата испорака на овошјето е можна. Првиот помал делител на 24 е 12, па ако $x \le 12$, тогаш во секоја пратка мора да има по $360 : x \ge 360 : 12 = 30$ гајби со јаболка и $384 : x \ge 384 : 12 = 32$ гајби со круши, што не е можно бидејќи бројот на гајбите во една пратка ќе биде поголем или еднаков на $32 + 30 = 62 > 60$, а секој камион може да носи најмногу 30 гајби овошје.

Конечно, овошјето ќе биде испорачано со 24 пратки, а во секоја пратка ќе има по 15 гајби со јаболка и 16 гајби со круши.

4. Теодор и Теодора береле сливи, секој во својата кошница. Теодора изела 5 сливи од својата кошница. Потоа Теодор и дал половина од неговите сливи. Теодора изела уште 5 сливи и му дала 7 сливи на Теодор, по што двајцата имале еднаков број сливи. Колку сливи имала Теодора на почетокот?

   Решение. Нека Теодора набрала x сливи. На крајот таа имала половина од сливите на Теодор и уште $x - (5 + 7 + 5) = x - 17$ сливи. Теодор имал половина од сливите кои тој ги набрал и уште 7 сливи. Бидејќи на крајот двајцата имале еднаков број сливи, добиваме $x - 17 = 7$, односно $x = 24$. Според тоа, Теодора набрала 24 сливи.

5. Една држава вкупно има 4080 жители, секој од кои е математичар или поет. Секој седми математичар е и поет, а секој деветти поет е и математичар. Колку жители на оваа држава се истовремено поети и математичари?

   Решение. Нека x жители се и математичари, и поети. Бидејќи $\frac{1}{7}$ од математичарите се и поети, заклучуваме дека сите математичари се $7x$, а само математичари се $6x$. На ист начин, $\frac{1}{9}$ од сите поети се математичари, па затоа сите поети се $9x$, а само поети се $8x$. Според тоа, $6x + x + 8x = 4080$, од каде добиваме $x = 272$. Значи, 272 жители

на оваа држава се и поети и математичари.

6. Пабло и Матео треба да преведат 70 страници текст од македонски на германски јазик. Пабло ги поделил страниците меѓу двајцата, но Матео се побунил, дека тој има премногу страници за превод, па му дал една третина од неговиот дел на Пабло. Сега, делот на Пабло се зголемил три пати. По колку страици ќе преведе секој по втората распределба?

   Решение. Ако во првата распределба Пабло имал x страници за превод, тогаш Матео имал $70-x$ страници за превод. Матео му дал на Пабло $\frac{1}{3}(70-x)$ страници, и тогаш делот на Пабло се зголемил за три пати, т.е. важи $x+\frac{1}{3}(70-x)=3x$, од каде добиваме $x=10$. Значи, по втората распределба Пабло ќе има 30 страници, а Матео 40 страници за превод.

7. Бројот на пензионерите во еден град е 25% од населението со право на глас и 20% од целото население. Колку проценти од населението нема право на глас?

   Решение. Нека градот има x пензионери. Бидејќи тие се 25% од населението со право на глас, заклучуваме дека со право на глас се $4x$ жители на градот. Но, пензионерите се 20% од целото население на градот, што значи дека градот има $5x$ жители. Конечно, $5x-4x=x$ жители на градот немаат право на глас, што значи дека 20% од целото население нема право на глас.

8. На една прослава 20% од гостите облекле сини пантолони, при што 60% од гостите со сини пантолони носеле бели чевли. Меѓу гостите кои не носеле сини пантолони 30% носеле бели чевли. Определи колку проценти од гостите кои носеле бели чевли облекле сини пантолони.

   Решение. Нека x е бројот на гостите на прославата. Според условот на задачата $\frac{1}{5}x$ од гостите носеле сини пантолони, што значи дека $\frac{4}{5}x$ од гостите не носеле сини пантолони. Во групата гости со сини пантолони $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}x=\frac{3}{25}x$ носеле бели чевли, додека меѓу гостите кои не носеле сини пантолони имало $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5}x=\frac{6}{25}x$ гости кои нослее бели

чевли. Значи, вкупниот број гости кои носеле бели чевли бил $\frac{3}{25}x+\frac{6}{25}x=\frac{9}{25}x$, а меѓу нив учеството на оние гости кои носеле сини пантолони е $(\frac{3}{25}x):(\frac{9}{25}x)=\frac{1}{3}$, што е $33\frac{1}{3}\%$.

9. Во една голема компанија на комјутерите се проширил нов вирус. Во јануари со вирусот се заразени 30% од сите комјутери. Во февруари од 30% од заразените комјутери е отстранет вирусот, а 30% од во тој момент незаразените комјутери се заразиле со вирусот. Во март од 30% од заразените комјутери е отстранет вирусот, а 30% од во тој момент незаразените комјутери се заразиле со вирусот. Колкав процент од компјутерите во компанијата не е заразен со вирусот на почетокот на април?

   Решение. Комјутерите во компанијата се или заразени или не се заразени со вирусот. Нека во компанијата има x комјутери.

   Во јануари се заразени $0,3x$ комјутери и не се заразени $0,7x$ комјутери.

   Во февруари се заразени $0,3x-0,3\cdot 0,3x+0,3\cdot 0,7x=0,42x$ комјутери и не се заразени $x-0,42x=0,58x$ комјутери.

   Во март се заразени $0,42x-0,3\cdot 0,42x+0,3\cdot 0,58x=0,468x$ комјутери и не се заразени $x-0,468x=0,532x$ комјутери.

   Според тоа, на почетокот на април во компанијата со вирусот не се заразени 53,2% од компјутерите.

10. Една компанија минатата година го реализирала производствениот план со 112%. Колку проценти од реализираното производство е планираното производство?

    Решение. Нека a е планираното производство, а b е реализираното производство. Од условот на задачата следува

$$b=\frac{112}{100}a=\frac{28}{25}a,$$

    од каде добиваме $a=\frac{25}{28}b$. Сега, ако p е бараниот процент, тогаш $a=\frac{p}{100}b$, па затоа $\frac{p}{100}=\frac{25}{28}$, од каде добиваме

$$p=\frac{2500}{28}=\frac{625}{7}=89\frac{2}{7}\%\approx 89,29\%.$$

11. Вкупниот број момчиња во едно одделение е еднаков на 60% од

вкупниот број девојчиња во тоа одделение. Определи го процентот на момчињата во вкупниот број ученици во тоа одделение.

Решение. Ако во одделението има d девојчиња, тогаш бројот на момчињата во тоа одделение е $m = 0,6d$. Според тоа, во одделението има $d + m = d + 0,6d = 1,6d$ ученици од кои $m = 0,6d$ се момчиња. Конечно, бидејќи $\frac{m}{m+d} \cdot 100 = \frac{0,6d}{1,6d} \cdot 100 = 37,5$, заклучуваме дека во ова одделение процентот на момчињата во вкупниот број ученици е 37,5%.

12. На еден остров $\frac{2}{3}$ од сите мажи се женети, а $\frac{3}{5}$ од сите жени се мажени. Колкав дел од населението не е во брак?

Решение. Бројот на женетите мажи е еднаков на бројот на мажените жени. Ако на островот има m мажи и z жени, тогаш важи $\frac{2}{3}m = \frac{3}{5}z$, од каде добиваме $m = \frac{9}{10}z$. Според тоа, ако на островот има $z = 10k$ жени, тогаш бројот на мажите е $m = 9k$, а вкупниот број мажи и жени е $m + z = 19k$. Сега, $\frac{2}{3}m = \frac{2}{3} \cdot 9k = 6k$ мажи се женети и $\frac{3}{5} \cdot 10k = 6k$ жени се мажени, што значи дека $6k + 6k = 12k$ мажи и жени се во брак. Конечно, $19k - 12k = 7k$ мажи и жени не се во брак, т.е. $\frac{7k}{19k} = \frac{7}{19}$ од населението не е во брак.

13. Павел, Томи и Ангела поделиле кутија бомбони на следниов начин: Ангела зела 20% од бомбоните и уште 12 бомбони, потоа Томи зел 25% од преостанатите бомбони и уште 15 бомбони и на крајот Павел зел 30% од преостанатите бомбони и последните 21 бомбона. Колку бомбони зело секое дете?

Решение. По Томи Павел ги зел 30% од преостанатите бомбони и последните 21 бомбона, што значи дека 70% од преостанатите бомбони по Томи се 21 бомбона. Значи, по Томи преостанале $21 : 0,7 = 30$ бомбони.

Томи зел 25% од преостанатите бомбони по Ангела и уште 15 бомбони и преостанале 30 бомбони. Според тоа, 75% од бомбоните кои преостанале по Ангела се $15 + 30 = 45$. Значи, по Ангела преостанале $45 : 0,75 = 60$ бомбони.

Ангела зела 30% од бомбоните и уше 12 бомбони и преостанале 60

бомбони. Според тоа, 80% од бомбоните во кутијата се $12+60=72$ бомбони. Значи, во кутијата имало $72:0,80=90$ бомбони и секој зел по 30 бомбони.

14. На Охридското езеро бројот на белите лебеди спрема бројот на црните лебеди се однесува како $5:2$. Од езерото одлетале 27 лебеди и останале 40% од белите и 25% од црните лебеди. Колку лебеди останале на езерото?
Решение. Нека на почетокот имало $5x$ бели и $2x$ црни лебеди. Одлетале 60% бели и 75% црни лебеди, па затоа $\frac{60\cdot 5x}{100}+\frac{75\cdot 2x}{100}=27$, од каде добиваме $x=6$. Според тоа, на езерото останале $7\cdot 6-27=15$ лебеди.

15. На крајот од учебната година седмооделенците од едно училиште ги добиле следниве оценки: 80% од сите ученици биле оценети со петки по македонски јазик, 50% по македонски јазик и математика, а со петка по математика биле 84 ученици. Колку ученици во седмо одделение има во ова училиште и колку од нив имаат петки по математика, но немаат петки по македонски јазик, а колку имаат петки по македонски јазик, но немаат петки по математика?
Решение. Со x да го означиме бројот на сите ученици во седмо одделение во ова училипте. Тогаш $0,8x-0,5x=0,3x$ имаат петки по македонски јазик, но немаат петки по математика, а $84-0,5x$ имаат петки по математика, но немаат по македонски јазик. Оттука ја добиваме равенката $0,3x+0,5x+84-0,5x=x$, од каде добиваме дека $x=120$. Значи,во училиштето вкупно има 120 ученици, од кои $84-120\cdot 0,5=24$ имаат петка по математика и немаат петка по македонски јазик, а $0,3\cdot 120=36$ имаат петка по македонски јазик и немаат петка по математика.

16. Во училишната книжарница донесле определен број збирки по математика. Првиот ден се продале 18 збирки, а следниот ден се продал една третина од остатокот и уште 18 збирки, по што во книжарницата останале половината од збирките. Колку збирки биле донесени во книжарницата?
Решение. Да го означиме бројот на збирките со x. Првиот ден се

продале 18 збирки, а вториот ден $\frac{1}{3}(x-18)+18$, т.е. $\frac{x}{3}+12$ збирки: Значи, првите два дена се продале $\frac{x}{3}+12+18=\frac{x}{3}+30$ збиркии тоа е половина од сите збирки, т.е.

$$\frac{x}{3}+30=\frac{x}{2},$$

од каде добиваме $x=180$. Значи, во книжарницата донесле 180 збирки по математика.

17. Во едно училиште 40% од учениците се девојчиња. Ако само 69 ученици имаат петка по математика, а 75% од девојчињата и 40% од момчињата имаат пониска оценка, колку момчиња имаат петка по математика?
Решение. Бидејќи 40% од учениците се девојчиња, добиваме дека 60% од учениците се момчиња. Петка по математика имаат 25% од девојчињата и 60% од момчињата. Нека во ова училиште има x ученици. Тогаш $0,6x$ се момчиња, па затоа кај момчињата имаме $0,6\cdot 0,6x=0,36x$ петки, а $0,4x$ се девојчиња, па затоа кај девојчињата имаме $0,25\cdot 0,4x=0,1x$ петки по математика. Значи, имаме $0,46x$ петки по математика, од каде добиваме $0,46x=69$, односно $x=150$. Според тоа, во училиштето има 150 ученици, од кои 90 се момчиња и од нив $0,36\cdot 150=54$ добила петка по математика.

18. Иван собрал 20% повеќе јаболки од Стефан, но 20% јаболки помалку од Кирил. За колку проценти повеќе јаболки собрал Кирил од Стефан?
Решение. Ако Стефан и Кирил собрале соодветно x и y јаболки, тогаш од условот на задачата следува, дека Иван собрал $1,2x=0,8y$ јаболки. Ова равенство е еквивалентно со равенството $y=\frac{1,2}{0,8}x=1,5x$, што значи дека Кирил собрал 50% повеќе јаболки од Стефан.

19. Атанас добил наследство и со добра зделка тој го зголемил за 60%. Потоа претрпел загува и му останала истата сума пари која ја наследил. Колку проценти е загубата на Атанас?
Решение. Ако наследството е x, тогаш на почетокот Атанас го зголемил за $\frac{60}{100}x=0,6x$, па сега тој има сума $x+0,6=1,6x$. Потоа тој загубил $y\%$ и сега имал сума $1,6x-\frac{y}{100}\cdot 1,6x$. Според условот на

задачата имаме $1,6x-\frac{y}{100}\cdot 1,6x=x$, од каде добиваме $1,6-\frac{y}{100}\cdot 1,6=1$, т.е. $y=\frac{1,6-1}{1,6}\cdot 100=37,5$. Значи, загубата на Атанас е 37,5%.

20. Во училиштето на Горјан се запишале нови ученици и тоа два пати повеќе момчиња од девојчиња. Од нив 25% од девојчињата и 20% од момчињата, вкупно 39 нови ученици учат германски јазик. Колку нови ученици се запишале во училиштето на Горјан?

Решение. *Прв начин*. Меѓу новите ученици на секои 20 девојчиња има $2\cdot 20=40$ момчиња. Во секоја група од $20+40=60$ нови ученици германски јазик учат вкупно $20:4+40:5=13$ ученици. Бидејќи германски јазик учат 39 ученици имаме $39:13=3$ групи по 13 ученици, што значи дека имаме 3 групи од по 60 новозапишани ученици. Значи, вкупно се $3\cdot 60=180$ новозапишани ученици.

Втор начин. Нека имаме y новозапишани девојчиња и $x=2y$ новозапишани момчиња. Тогаш Германски јазик учат $\frac{y}{4}+\frac{2y}{5}=39$ ученици, од каде добиваме $y=60$ девојчиња. Значи, $x=2y=120$ момчиња и бројот на новозапишани ученици е $x+y=180$.

21. Во две вреќи има соодветно a и b килограми шеќер. Познато е, дека $a-b$ е еднакво на $2a\%$ од b и на $a\%$ од a. Колку вкупно шеќер има во вреќите?

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$\frac{2a}{100}b=\frac{a}{100}a=a-b.$$

Од првото равенство добиваме $a=2b$. Сега од второто равенство следува $\frac{2b}{100}2b=2b-b$, од каде добиваме $b=25$. Според тоа, $a=2b=50$, па затоа $a+b=75kg$.

22. Пабло и Матео јаделе бонбони. Пабло изел $\frac{1}{3}$ од сите бонбони и уште 4 бонбони. Потоа Матео изел $\frac{1}{3}$ од преостанатите бонбони и уште една бонбона. Последните 7 бонбони останале за Филип. Колку бонбони изел Пабло?

Решение. *Прв начин*. Бидејќи откако Матео изел $\frac{1}{3}$ од бонбоните кои останале по Пабло, имало 1 бонбона која ја изел Матео и 7 бонбони за

Филип, заклучуваме дека $\frac{2}{3}$ од бонбоните кои останале по Пабло се $7+1=8$ бонбона. Значи, по Пабло останале $8\cdot\frac{3}{2}=12$ бонбони. Бидејќи откако Пабло изел $\frac{1}{3}$ од сите бонбони и уште 4 бонбони останале 12 бонбони, добиваме дека $\frac{2}{3}$ од сите бонбони се $12+4=16$ бонбони. Значи, на почетокот имало $16\cdot\frac{3}{2}=24$, а Пабло изел $\frac{24}{3}+4=12$ бонбони.

Втор начин. Нека на почетокот имало x бонбони. Пабло изел $\frac{x}{3}+4$ бонбони и останале $\frac{2x}{3}-4$ бонбони. Матео изел $\frac{1}{3}(\frac{2x}{3}-4)+1$ бонбона и останале $\frac{2x}{3}-4-\frac{1}{3}(\frac{2x}{3}-4)-1=\frac{1}{3}(\frac{4x}{3}+4)-5$ бонбони. Затоа

$$\frac{1}{3}(\frac{4x}{3}+4)-5=7,$$

од каде добиваме $x=24$. Значи, Пабло изел $\frac{24}{3}+4=12$ бонбони.

23. Четири села A,B,C,D имаат заедно 2009 жители и за бројот на жителите на селата важи $A:B=2:3, B:C=4:5, C:D=5:2$. Колку жители има секое село?

Решение. Бројот на жителите на селото B да го означиме со $12a$. Тогаш, бројот на жители на селот A е $8a$, бројот на жители на селото C е $15a$ и бројот на жители на селото D е $6a$. Според тоа,

$$8a+12+15a+6a=2009,$$

од каде добиваме $a=49$. Според тоа, селото A има 392 жители, селото B има 588 жители, селото C има 735 жители и селото D има 294 жители.

24. На фармата на дедо Марко вкупно има 1200 крави, овци и свињи. Определи го бројот на секој вид животни ако $\frac{2}{3}$ од бројот на кравите се еднакви на $\frac{1}{2}$ од бројот на овците и се еднакви на $\frac{2}{5}$ од бројот на свињите.

Решение. Нека на фармата има k крави, o овци и s свињи. Тогаш

$\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}o=\frac{2}{5}s=m$, од каде добиваме $k=1{,}5m, o=2m, s=2{,}5m$. Но, $k+o+s=1200$, па затоа $1{,}5m+2m+2{,}5m=1200$, т.е. $m=200$. Според тоа, на фармата на дедо Марко има $k=1{,}5\cdot 200=300$ крави, $o=2\cdot 200=400$ овци и $s=2{,}5\cdot 200=500$ свињи.

25. За определување на екипата за еден математички натпревар се правеле два теста. Првиот тест содржел 24 задачи, при што за секој точен одговор се добивале 5 поени, а за неточен или непотполнет одговор се одземал 1 поен од постигнатиот резултат. Вториот тест содржел 15 задачи, при што за секој точен одговор се добивале поени, а за секој неточен или непотполнет одговор се одземале по 2 поени од постигнатиот резултат. Филип решил вкупно 30 задачи, а реззултатот од првиот тест му бил за 10 поени подобар од резултатот на вториот тест. По колку задачи Филип решил на секој тест?

Решение. Нека Филип решил x задачи на првиот тест и y задачи на вториот тест. Тогаш тој добил $5x+(24-x)=6x-24$ поени на првиот и $8y-2(15-y)=10y-30$ поени на вториот тест. Според тоа,

$$\begin{cases} x+y=30, \\ 6x-24=10+10y-30. \end{cases}$$

Од првата равенка на системот имаме $y=30-x$, и ако замениме во втората равенка која по средувањето гласи $3x-5y=2$, добиваме $3x-5(30-x)=2$. Решението на последната равенка е $x=19$ и соодветно $y=30-19=11$.

26. На еден натпревар се натпреварувале вкупно 2400 ученици во пет различни категории. Вкупниот број на ученици од првата и втората категорија е еднаков на $\frac{3}{5}$ од вкупниот број на ученици од третата, четвртата и петтата категорија. Односот на бројот на учениците од првата и втората категорија е 2:3, а односот на бројот на учениците од третата, четвртата и петтата категорија е 5:4:6. По колку ученици се натпреварувале во секоја категорија.

Решение. *Прв начин*. Со a,b,c,d,e да го означиме бројот на учениците кои се натпреварувале во првата, втората, третата, четвртата и петтата категорија, соодветно. Нека $x=a+b$ и $y=b+c+d$. Тогаш

$$x = \frac{3}{5}y \text{ и } x + y = 2400,$$

од каде добиваме

$$\frac{3}{5}y + y = 2400, \text{ т.е. } y = 1500$$

и затоа $x = 2400 - 1500 = 900$. Понатаму,

$$\text{од } a : b = 2 : 3 \text{ и } a + b = 900$$

следува

$$a = \frac{900}{2+3} \cdot 2 = 360 \text{ и } b = \frac{900}{2+3} \cdot 3 = 540.$$

Од,

$$c : d : e = 5 : 4 : 6 \text{ и } c + d + e = 1500,$$

следува

$$c = \frac{1500}{5+4+6} \cdot 5 = 500,\ d = \frac{1500}{5+4+6} \cdot 4 = 400 \text{ и } e = \frac{1500}{5+4+6} \cdot 6 = 600.$$

Конечно, во првата категорија се натпреварувале 360 ученици, во втората 540 ученици, во третата 500, во четвртата 400 и во петтата 600 уеници.

Втор начин. Со a, b, c, d, e да го означиме бројот на учениците кои се натпреварувале во првата, втората, третата, четвртата и петтата категорија, соодветно. Од условите на задачата следува

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 2400, \\ a + b = \frac{3}{5}(c + d + e), \\ a : b = 2 : 3, \\ c : d : e = 5 : 4 : 6. \end{cases}$$

Од последните две равенства следува

$$a = 2k, b = 3k, c = 5m, d = 4m, e = 6m$$

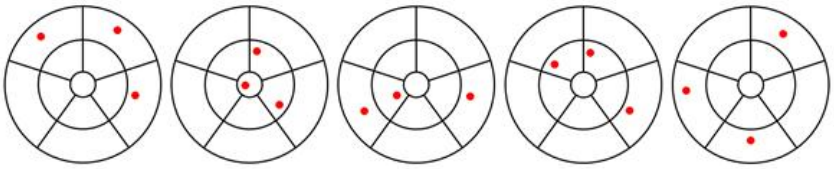
и ако замениме во првите две равенства, добиваме $5k + 15m = 2400$ и $5k = \frac{3}{5} \cdot 15m$, т.е. $5k + 15m = 2400$ и $5k = 9m$. Ако од втората равенка замениме во првата, добиваме $24m = 2400$, т.е. $m = 100$ и оттука $5k = 900$, т.е. $k = 180$. Сега, лесно се добива дека

$$a = 360, b = 540, c = 500, d = 400 \text{ и } e = 600.$$

Конечно, во првата категорија се натпреварувале 360 ученици, во втората 540 ученици, во третата 500, во четвртата 400 и во петтата 600 ученици.

27. Метата за пикадо е поделена на 11 делови: пет надворешни, пет внатрешни и еден централен. Погодоците во различните надворешни

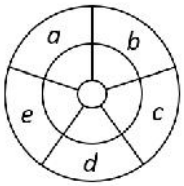
делови на метата донесуваат различен број бодови. Погодокот во внатрешниот дел на метата донесува двојно повеќе бодови од погодокот во соседниот надворешен дел на метата (соседни се деловите кои имаат заедничка линија). Погодокот во средниот круг се вреднува 36 бода.



40 бода 92 бода 56 бода 72 бода 53 бода

Горјан со стрелички ја гаѓал метата. Горните цртежи ги прикажуваат погодоците во пет серии со по три стрлички и збировите на бодовите кои притоа се остварени. Кој е најголемиот број бодови што Горјан може да го добие ако со секоја од три различни стрелички погоди различни полиња од метата?

Решение. Нека броевите на бодовите кои се добиваат со погодување на надворешните полиња на метата е како на цртежот десно. Тогаш, од цртежите во условот на здачата го имаме системот равенки



$$\begin{cases} a+b+c=40, \\ 2b+2c+36=92, \\ e+2e+c=56, \\ 2a+2b+c=72, \\ b+d+e=53. \end{cases}$$

Од втората равенка добиваме $b+c=28$, па ако замениме во првата равенка наоѓаме $a+28=40$, односно $a=12$. Сега со замена $c=28-b$ и $a=12$ во четвртата равенка на системот ја добиваме равенката $2\cdot 12+2b+28-b=72$, од каде наоѓаме $b=20$. Значи, $c=28-20=8$. Понатаму, од третата равенка на системот добиваме $3e+8=56$, од каде наоѓаме $e=16$. Конечно, од петтата равенка на системот добиваме $20+d+16=53$, па затоа $d=17$.

Конечно, најголем број бодови Горјан може да освои ако ги погоди централниот круг и соседните полиња на полињата со $b=20$ и $d=17$ бодови и притоа ќе освои $2\cdot 20+2\cdot 17+36=110$ бодови.

28. Во две одделенија имало 40 ученици. Минатата година поголем број од нив покажале одличен успех, додека во тековната учебна година, овој број значително се намалил. Така, ако бројот на ученици кои во тековната година покажале одличен успех се зголеми за 5 ученици, тогаш тој број сепак ќе биде 3 пати помал од половината од бројот на ученици кои имале одличен успех во минатата година. Определи го бројот на ученици со одличен успех во тековната и минатата година, ако нивниот вкупен број изнесува 37. Колку ученици не покажале одличен успех во тековната година?

Решение. Нека x е бројот на ученици со одличен успех во минатата година и y е бројот на ученици со одличен успех во тековната година. Од условот на задачата, ако бројот на ученици кои во тековната година покажале одличен успех се зголеми за 5 ученици, тогаш тој број ќе биде 3 пати помал од половината од бројот на ученици кои имале одличен успех во минатата година, имаме дека $3(y+5)=\frac{x}{2}$.

Вкупниот број ученици со одличен успех во тековната и минатата година е еднаков на 37, па затоа $x+y=37$. Така го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 3(y+5)=\frac{x}{2}, \\ x+y=37. \end{cases}$$

Решението на горниот систем е $x=36, y=1$. Значи, минатата учебна година бројот на одличните ученици бил 36, а оваа учебна година тој број е 1. Значи, бројот на учениците кои оваа година не покажале одличен успех е еднаков на $40-1=39$.

29. Во фудбалот победникот добива 3 бода, а поразениот 0 бодови. Ако натпреварот заврши нерешено, тогаш двете екипи добиваат по 1 бод. Една екипа одиграла 68 натпревари и освоила 170 бодови. Колку најмногу натпревари можела да загуби оваа екипа?

Решение. Со x, y, z соодветно да го означиме бројот на натпреварите кои оваа екипа ги победила, играла нерешено и изгубила. Тогаш важи

$$3x+y=170 \text{ и } x+y+z=68.$$

Бројот на загубените натпревари е најголем кога збирот $x+y$ има најмала вредност. Збирот $x+y$ е најмал ако x е најголемиот можен број, бидејќи ако за 1 го намалиме x потребно е за 3 да го зголемиме y. Бидејќи $170=3\cdot 56+2$, заклучуваме дека $x=56$ и $y=2$. Според

тоа, најголемиот број натпревари кои можела да ги загуби оваа екипа е $z = 68 - (56 + 2) = 10$.

30. Вкупно 24 лица поделиле 48 кроасани. Секое дете добило по 8 кроасани, секоја жена по 2 кроасани, а секој маж добил по 1 кроасан. Колку деца, жени и мажи учествувале во поделбата, ако секое лице добило барем по еден кроасан?

Решение. Со d да го означиме бројот на децата, со z бројот на жените и со m бројот на мажите. Од условот на здачата следува дека $8d + 2z + m = 48$ и $d + z + m = 24$. Ако од првата равебнка ја одземеме втората добиваме $7d + z = 24$. Бидејќи $d, z \geq 1$, од последната равенка следуваат решенијата

$$d = 1, z = 17, m = 6;\ d = 2, z = 10, m = 12 \text{ и } d = 3, z = 3, m = 18.$$

31. Група од 27 планинари меѓу себе поделиле 13 леба. Секој маж добил по два леба, секоја жена добила по половина леб и секое дете добило по третина леб. Колку мажи, жени и деца имало во групата?

Решение. Со m, z и d соодветно да го означиме бројот на мажите, жените и децата во групата. Од условот на здачата следува

$$\begin{cases} m + z + d = 27, \\ 2m + \frac{z}{2} + \frac{d}{3} = 12. \end{cases}$$

Ако втората равенка на системот ја помножиме со 6, ја добиваме равенката

$$12m + 3z + 2d = 78.$$

Сега, првата равенка на системот ја множиме со 2 и ја одземаме од последната равебка, по што добиваме

$$10m + z = 24.$$

Од последната равенка следува $z = 2k$, за $k \geq 0$. Заменуваме во горната равенка и по скратувањето со 2 ја добиваме равенката

$$5m + k = 12.$$

Понатаму, бидејќи m е ненегативен цел број, можни се следниве случаи:

1) $m = 0$, од каде следува $k = 12$, т.е. $z = 24$ и затоа $d = 3$.
2) $m = 1$, од каде следува $k = 7$, т.е. $z = 14$ и затоа $d = 12$.
3) $m = 2$, од каде следува $k = 2$, т.е. $z = 4$ и затоа $d = 21$.

Конечно, задачата има три решенија и тоа:

$$(m, z, d) = (0, 24, 3), (1, 14, 12), (2, 4, 21).$$

32. Во една бочва има мешавина на вода и оцет таква што односот на водата и оцетот е $2:1$. Во друга бочва, со двапати поголем волумен од првата бочва, има мешавина на вода и оцет таква што односот на водата и оцетот е $3:1$. Содржините на двете бочви се прелеани во трета бочва. Каков е односот на водата и оцетот во третата бочва?

Решение. Нека волуменот на првата бочва е $v = 3k$. Бидејќи односот на водата и оцетот во првата бочва е $2:1$, во неа има $2k$ вода и k оцет. Понатаму, втората бочва е со два пати поголем волумен, што значи дека нејзиниот волумен е $v' = 2v = 6k$. Но, во втората бочва односот на водата и оцетот е $3:1$, што значи дека ако делот на оцетот го означиме со m, тогаш делот на водата е $3m$. Затоа $m + 3m = 6k$, од каде добиваме $m = \frac{3}{2}k$ и $3m = \frac{9}{2}k$. Според тоа, по прелевањето во третата бочва делот на оцетот ќе биде $k + m = k + \frac{3}{2}k = \frac{5}{2}k$, а делот на водата ќе биде $2k + 3m = 2k + \frac{9}{2}k = \frac{13}{2}k$. Конечно, во третата бочва односот на водата и оцетот ќе биде $\frac{13}{2}k : \frac{5}{2}k = 13:5$.

33. Дедо Марко има две ниви чии плоштини се однесуваат како $2:3$. На двете ниви тој сака да засади малини и јагоди така што плоштината на која ќе засади јагоди ќе биде еднаква на плоштината на која ќе засади малини. Помалата нива ја засадил со јагоди и малини во однос $3:5$. Во кој однос треба да ја засади поголемата нива?

Решение. Нека плоштината на помалата нива е $8k$. Бидејќи плоштините на нивите се однесуваа како $2:3$, добиваме дека за плоштината P на поголемата нива важи $8k : P = 2:3$, од каде добиваме $P = 12k$. Значи, вкупната плоштина е $12k + 8k = 20k$, па дедо Марко треба со малини и јагоди да засади плоштини еднакви на $20k : 2 = 10k$. Бидејќи помалата нива ја засадил со јагоди и малини во однос $3:5$, тој со јагоди засадил $3k$ од плоштината на нивата, а со малини засадил $5k$ од плоштината на нивата. Според тоа, на поголемата нива со јагоди треба да засади $10k - 3k = 7k$ од плоштината, а со малини треба да засдади $10k - 5k = 5k$ од плоштината. Конечно, бараниот однос е

$7k:5k=7:5$ во полза на јагодите.

34. Девет ученици се натпреварувале во решавање на пет математички задачи, секоја од кои се вреднува со по 10 бода. Осум ученици освоиле еднаков број бодови, а Матео освоил повеќе бодови од преостанатите ученици. Ако просекот на освоените бодови на сите натпреварувачи е еднаков на 24, колку бодови можел да освои Матео?

Решение. Нека x е бројот на бодовите кои ги освоил секој од осумте ученици, а y е бројот на бодовите кои ги освоил Матео. Од условот на здачата следува $y>x$, па затоа $y>0$. Максималниот број бодови кои може да се освојат е $5\cdot 10=50$, па затоа $y\le 50$. Просекот на освоените бодови на сите натпреварувачи е 24, па затоа $\frac{8x+y}{9}=24$, односно $8x+y=216$. Бидејќи $8x$ и 216 се деливи со 8, мора и y да е делив со 8. Можни се следниве случаи:

- $y=8$ и тогаш $x=26$, што не е можно бидејќи треба да е $y>x$,
- $y=16$ и тогаш $x=25$, што не е можно бидејќи треба да е $y>x$,
- $y=24$ и тогаш $x=24$, што не е можно бидејќи треба да е $y>x$,
- $y=32$ и тогаш $x=23$, што е можно,
- $y=40$ и тогаш $x=22$, што еможно, и
- $y=48$ и тогаш $x=21$, што е можно.

Значи, Матео можел да освои 32, 40 или 48 бодови.

35. Филип, Кирил и Никола си испраќаат писма меѓу себе при што не добиваат писма од други луѓе. Притоа писмата се испраќаат според следниве правила:
    - Филип му испраќа писмо на Кирил секој втор ден, а на Никола секој петти ден,
    - Кирил му испраќа писмо на Филип одма по секои две добиени писма, а на Никола секој чртврт ден,
    - Никола му испраќа писмо на Филип одма по секои четири добиени писма, а на Кирил секој осми ден.

    Секое писмо патува еден ден, т.е. секое писмо стигнува следниот ден од денот кога е испратено. Кој е најмалиот број денови по кои Филип ќе добие 68 писма?

    Решение. Со x да го означиме бројот на денови за кои Филип ќе добие 68 писма. Тоа значи дека Кирил и Никола заклучно со $(x-1)-$

од ден на Филип му испратиле 68 писма. Со k и n да го означиме бројот на писмата кои соодветно ги добиле Кирил и Никола заклучно со $(x-1)-$ од ден. Од условите на задачата следува дека заклучно со $(x-1)-$ од ден Кирил до Филип вкупно испратил $\frac{k}{2}$ писма, а Никола до Филип испратил вкупно $\frac{n}{4}$ писма. Според тоа, $\frac{k}{2}+\frac{n}{4}=68$, т.е. $2k+n=272$.

Од друга страна, заклучно со $(x-1)-$ од ден Кирил вкупно добил онолку писма колку што испратиле Филип и Никола заклучно со $(x-2)-$ од ден. Бидејќи, Филип му испраќа писмо на Кирил секој втор ден, а Никола му испраќа писмо на Кирил секој осми ден добиваме дека $k=\frac{x-2}{2}+\frac{x-2}{8}=\frac{5(x-2)}{8}$. Слично бидејќи Филип му испраќа писмо на Никола секој петти ден, а Кирил му испраќа писмо на Никола секој четврт ден, добиваме дека $n=\frac{x-2}{5}+\frac{x-2}{4}=\frac{9(x-2)}{20}$. Сега, ако за k и n замениме во $2k+n=272$, добиваме

$$2\cdot\frac{5(x-2)}{8}+\frac{9(x-2)}{20}=272,$$
$$25(x-2)+9(x-2)=5440,$$
$$34x=5508,$$
$$x=162.$$

Значи, Филип ќе добие 68 писма по најмалку 162 дена.

36. На еден остров има само црвени сини и жолти камелеони. Во даден момент бројот на жолтите бил еднаков на 25% од бројот на сините, а бројот на сините бил еднаков на 25% од бројот на црвените камелеони. Потоа помалку од 1000 црвени камелеони ја сменила бојата: некои во сини, некои во жолти. Така бројот на сините камелеони станал 20% поголем од бројот на жолтите, а бројот на црвените станал 20% помал од бројот на сините. Колку црвени камелеони останале на островот?

Решение. На почетокот имало x црвени, $\frac{1}{4}x$ сини и $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x=\frac{1}{16}x$ жолти камелеони. Значи, вкупно имало $\frac{21}{16}x$ камелеони. Бидејќи сите броеви се природни, заклучуваме дека $16\mid x$, т.е. $x=16x'$ и бројот на камелеоните е еднаков на $21x'$.

По промената на боите имало y жолти, $\frac{6}{5}y$ сини и $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}y=\frac{24}{25}y$ црвени камелеони. Значи, вкупно имало $\frac{79}{25}y$ камелеони. Бидејќи сите броеви се природни, заклучуваме дека $25\mid y$, т.е. $y=25y'$ и бројот на камелеоните е еднаков на $79y'$.

Според тоа, вкупниот број камелеони $21x'=79y'$ е делив со 21 и со 79, што значи дека е делив со $\text{NZS}(21,79)=1659$. Според тоа, ако вкупниот број камелеони е $1659a$, тогаш $x'=79a$ и $y'=21a$. Оттука добиваме дека пред промената на боите имало $x=16\cdot 79a=1264a$ црвени камелеони, а потоа имало $24y'=24\cdot 21a=504a$ црвени камелеони. Според тоа, бројот на црвените камелеони се променил за $1264a-504a=760a$. Но, овој број е помалод 1000, па затоа $a=1$. Значи, на островот останале 504 црвени камелеони.

37. Откако ги прегледал патничките билети на сите патници во три вагони, кондуктерот Мирко заклучил: Ако во првиот вагон се качеа 55 патници повеќе, тогаш во првиот вагон ќе имаше еднаков број на патници како во вториот и третиот вагон заедно. Ако во вториот вагон се качеа 33 патници повеќе, тогаш во вториот вагон ќе имаше еднаков број патници како во првиот и третиот вагон заедно. Бројот на патниците во првиот вагон е помал од четвртината на бројот на патниците во третиот вагон. Кој е најголемиот можен број патници во трите вагони заедно?

Решение. Со x,y и z редоследно да ги означиме броевите на патниците во првиот, вториот и третиот вагон. Сега важи $x+55=y+z$ и $y+33=x+z$. Ако ги собереме добиените равенства, наоѓаме

$$x+55+y+33=y+z+x+z,$$

од каде следува $2z=88$, односно $z=44$. Ако замениме во првата равенка, добиваме

$$x+55=y+44,$$

односно $y=x+11$. Понатаму, од $\frac{1}{4}\cdot 44=11$ и условот дека бројот на патниците во првиот вагон е помал од една четвртина од бројот на патниците во третиот вагон, заклучуваме дека во првиот вагон има $x<11$ патници, односно може да има најмногу $x=10$ патници. Значи, во вториот вагон може да има најмногу $y=10+11=21$ патни, а во

трите вагони најмногу може да има $44+21+10=75$ патници.

38. Во едно училиште има помалку од 300 ученици. Во шест одделенија има еднаков број ученици. Вкупниот број ученици во овие шест одделенија е поголем од 90. Преостанатите ученици се за 20% повеќе од вкупниот број ученици во овие шест одделенија. Колку ученици има во ова училиште?

Решение. Нека x е еднаквиот број ученици во шесте одделенија. Значи, во овие шест одделенија вкупно има $6x$ ученици. Според тоа, $6x>90$, т.е. $x>15$. Во другите одделенија има $6x+0,2\cdot 6x=7,2x$ ученици. Значи, во училиштето има $6x+7,2x=13,2x$ ученици и затоа важи $13,2x<300$, односно $x<22,73$. Понатаму, бројот x мора да е природен, па затоа $x\in\{16,17,18,19,20,21,22\}$. Исто така, производот $13,2x$ мора да е природен број, што е можно само ако x е делив со 5, од каде добиваме $x=20$. Конечно, во ова училипте има $13,2\cdot 20=264$ ученици.

39. На еден маратон учествувале меѓу 510 и 550 ученици. Ако бројот на девојчињата кои учествувале на маратонот е за 100 помал од трикратниот број на момчињата кои учествувале на маратонот, кој е најмалиот, а кој најголемиот можен број девојчиња кои учествувале на маратонот?

Решение. Нека на маратонот учествувале x мочиња. Тогаш, бројот на девојчињата е $3x-100$, што значи дека на маратонот вкупно учествувале $x+3x-100=4x-100$ ученици. Од неравенствата

$$510\le 4x-100\le 550,$$

добиваме $152,5\le x\le 162,5$. Значи, на маратонот учествувале најмалку 153, а најмногу 162 девојчиња.

40. Сите неоправдани изостаноци во едно одделение се повеќе од 25% од сите изостаноци во одделението. Ако секој ученик во одделението имал 3 пати повеќе неоправдани изостаноци и за 2 повеќе оправдани изостаноци, тогаш бројот на сите неоправдани изостаноци ќе беше 5 пати помал од бројот на сите оправдани изостаноци. Докажи, една третина од учениците во одделението немаат изостаноци.

Решение. Нека во одделението учат n ученици и нека вкупно има a оправдани и b неоправдани изостаноци. Бидејќи неоправданите изо-

станоци се повеќе од 25% од сите изостаноци, добиваме дека

$$b > \tfrac{1}{4}(a+b)\text{, т.е. } 3b > a\,.$$

Понатаму, ако секој ученик имал три пати повеќе неоправдани изостаноци и за 2 повеќе оправдани изостаноци, тогаш ќе имаме $3b$ неоправндани изостаноци и $a+2n$ оправдани изостаноци. Сега, од условот на задачата следува дека $5\cdot 3b = a+2n$, па затоа ако го искористиме неравенството $3b > a$, добиваме

$$15b = a+2n < 3b+2n\text{, т.е. } b < \tfrac{n}{6}\,.$$

Според тоа, $a < 3b < 3\cdot\frac{n}{6} = \frac{n}{2}$ и за вкупниот број изостаноци добиваме

$$a+b < \tfrac{n}{6}+\tfrac{n}{2} = \tfrac{2}{3}n\,,$$

од каде следува дека најмалку една третина од сите ученици немаат изостаноци.

41. Од 605 топчиња со еднаков радиус се направени „исправена пирамида“ чија основа е квадрат и „исправена пирамида“ чија основа е рамностран триаголник. Двете тела во висина имаат еднаков број хоризонтални редови топчиња. По колку топчиња има во секоја пирамида?

Решение. Со n да го означиме бројот на хоризонталните редови топчиња во секоја пирамида.

Четириаголната пирамида, гледајќи одгоре надолу, во редовите има $1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2$ топчиња, што значи дека таа е составена од

$$S_4 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$$

топчиња. Тристраната пирамида, гледајќи одгоре надолу, во редовите има $1, 1+2, 1+2+3, ..., 1+2+3+...+n$ топчиња, што значи дека таа е составена од

$$\begin{aligned}
S_3 &= 1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+n)\\
&= n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+...+(n-(n-1))\cdot n\\
&= n+2n+3n+...+n\cdot n-(1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)\cdot n)\\
&= (1+2+...+n)n-(1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+...+(n-1)((n-1)+1))\\
&= n\cdot\tfrac{n(n+1)}{2}-(1^2+1+2^2+2+...+(n-1)^2+(n-1))\\
&= \tfrac{n^2(n+1)}{2}-(1^2+2^2+...+(n-1)^2+n^2)+n^2-(1+2+...+(n-1))\\
&= \tfrac{n^2(n+1)}{2}-S_4+n^2-\tfrac{(n-1)n}{2}.
\end{aligned}$$

Сега, од последното равенство добиваме

$$S_3 + S_4 = \frac{n^2(n+1)}{2} + n^2 - \frac{(n-1)n}{2}$$

и како $S_3 + S_4 = 605$, наоѓаме

$$\frac{n^2(n+1)}{2} + n^2 - \frac{(n-1)n}{2} = 605,$$

од што по средувањето добиваме

$$n(n+1)^2 = 1210.$$

Сега, од $1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$, добиваме

$$n(n+1)^2 = 10 \cdot 11^2,$$

па затоа во множеството природни броеви решението на последната равебка е $n = 10$. Сега лесно се добива дека бројот на топќињата во двете пирамиди е

$S_4 = 1^2 + 2^2 + ... + 10^2 = \frac{10 \cdot (10+1) \cdot (2 \cdot 10+1)}{6} = 385$ и $S_3 = 605 - 385 = 220$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brashara II: Lilavati, Indija
2. D. Popović: Sustavi jednadžbi, 12/45, Zagreb
3. D. Zubović, Š. Arslanagić: O diofantskim jednadžbama, Matka 31/122, Zagreb
4. S. Sruk: Tucet zadataka iz prošlosti, Matka 30/120, Zagreb
5. Ž. Brčić: Crtežom do rešenja, Matka 20/80, Zagreb
6. Ž. Brčić: Pola radnika i krumpir, Matka 19/73, Zagreb
7. Ž. Brčić: Zanimljivi parovi brojeva, Matka 20/78, Zagreb
8. Е. Колев: Задачи за фудболни турнири, Математика 3/2015, София
9. И. Шаркова: Часовникот и времето ..., Математика+, София
10. Л. Любенов: Една задача за пресмятане на сбор ... и още няколко такива, Математика 6/2012, София
11. Р. Малчески, А. Малчески, А., К. Аневска: Решавање на текстуални задачи (четврто издание), Армаганка, Скопје,2019
12. Р. Малчески, А. Малчески, К. Аневска: Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје, 2020
13. Р. Малчески, К. Аневска: Подготвителни задачи за математички натпревари - текстуални задачи, Математички талент, Скопје, 2023
14. Р. Малчески: Времето е важно или задачи поврзани со часовникот, Математички талент, Скопје, 2022
15. Р. Малчески: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
16. Р. Малчески: Мала збирка решени текстуални задачи, Математички талент, Скопје, 2021
17. Р. Малчески: Решаваме текстуални задачи, Математички талент, Скопје, 2021
18. Х. Лесов: Огледални числа, Математика+, София