XXXV РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Кога во Скопје е 18:00 часот, во Москва е 16:00 часот. Авион кој лета на линија Москва-Скопје во Скопје слетал на пладне. Ако летот траел 2 часа и 40 минути, во колку часот авионот полетал од Москва (по Московско време)?

Решение. Авионот слетал во Скопје на пладне и како летот траел 2 часа и 40 минути, тој од Москва по Скопско време полетал во 9 часот и 20 минути. Бидејќи времињата се разликуваат за 2 часа, по Московско време било 7 часот и 20 минути.

Задача 2. *Дуорите* се суштества кои имаат два рога, а *хепторите* имаат 7 рогови. Во едно стадо имало и од двата вида суштества. Сите заедно имаат 16 рогови. Колку дуори и хептори имало во тоа стадо?

Решение. Ако стадото се состои од 8 дуори, тогаш тие имале $8 \cdot 2 = 16$ рогови, што не е можно бидејќи според условот во стадото има барем еден един хептор. Затоа бројот на дуорите во него е помал или еднаков на 7. Вкупниот број на дуорите не може да е еднаков или поголем од 5, бидејќи $16 - 2 \cdot 5 = 6,$ а по според услов хепторот има 7 рогови. Значи, бројот на доурите во стадото може да е 1, 2, 3 или 4. Со последователна проверка се добива дека во тоа стадо има точно 1 дуор и два хептора.

Задача 3. Запиши ги сите четирицифрени броеви коишто се запишани со две петки и две седумки. Пресметај ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот број од добиените броеви.

Решение. Бараните броеви се: 5577, 5757, 5775, 7557, 7575, 7755. Најголем од овие шест боеви е бројот 7755, а најмал е бројот 5577. Нивната разлика е $7755 - 5577 = 2178$.

Задача 4. На отсечката AB избрана е точка C. Отсечката AB е 4 пати подолга од отсечката AC. Определи ги должините на отсечките AB и AC, ако должината на отсечката CB е $24cm$.

Решение. *Прв начин*. Ако отсечката AB ја поделиме на 4 еднакви делa, бидејќи таа е 4 пати подолга од отсечката AC, тоа значи дека отсечката AC е еден од четирите еднакви дела на отсечката AB. Тоа пак значи дека отсечката CB ги содржи останатите три дела од отсечката AB. Бидејќи должината на отсечката CB е $24cm$, значи дека еден од четирите дела на отсечката AB е долг $24:3=8cm$. Значи, отсечката AC е долга $8cm$, а отсечката AB е долга $8\cdot 4=32cm$.

Втор начин. Ако должината на отсечката AC ја обележиме со x, тогаш за должината на отсечката AB важи:

$$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$$
$$x+24=4x$$
$$4x-x=24$$
$$3x=24$$
$$x=8cm$$

Отсечката AB е долга $8\cdot 4=32cm$

Задача 5. Ако Маре купи од пазар 20 јајца, ќе и останат 30 денари од сумата што ја понела, а за да купи 30 јајца, и недостасуваат 20 денари. Колку денари понела Маре на пазар?

Решение. *Прв начин.* Разликата во јајца е 10, а тие би чинеле 30+20=50 денари. Значи, едно јајце чинело 5 денари. Па, сумата пари што ја понела Маре со себе на пазар е $20\cdot 5+30=130$ денари.

Втор начин. Ако едно јајце чинело x денари, тогаш имаме:

$$20x+30=30x-20$$
$$10x=50$$
$$x=5$$

Значи, едно јајце чинело 5 денари. Конечно, сумата пари што ја понела Маре со себе на пазар е $20\cdot 5+30=130$ денари.

V одделение

Задача 1. Зграда има три ката. На вториот и третиот кат живеат 20 лица, а на првиот и вториот кат живеат 22 лица. Колку луѓе вкупно живеат во зградата, ако бројот на лицата кои живеат на вториот кат е еднаков на вкупниот број лица кои живеат на првиот и третиот кат?

Решение. Со P,V и T да го означиме бројот на лицата кои живеат на првиот, вториот и третиот кат соодветно. Од условот на задачата имаме $P+V=22,\ V+T=20$, па затоа $P+V+V+T=42$. Меѓутоа, $P+T=V$, па затоа $3V=42$, од каде наоѓаме $V=14$. Конечно, од $P+V=22$ следува $P=8$, а од $V+T=20$ следува $T=6$.

Задача 2. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB, при што должината на основата a е двапати помала од должината на кракот b.

а) Пресметај ги должините на основата a и кракот b, ако периметарот на триаголникот е $150mm$.

б) Пресметај ја должината на страната на рамностраниот триаголник чиј периметар е еднаков на периметарот на дадениот триаголник.

Решение. а) За должината на основата a и должината на кракот b важи $b=2a$. Бидејќи периметарот е $O=150mm$, со замена во формулата $O=a+b+b$ добиваме $150=a+2a+2a$, па затоа $5a=150$, од каде наоѓаме $a=150:5=30mm$. Значи, $b=2a=2\cdot 30=60mm$.

б) Страните на рамностраниот триаголник се со еднаква должина, т.е. $a=b=c$ и како неговиот периметар е $O=150mm$, со замена во формулата $O=3a$, добиваме $3a=150$, односно $a=150:3=50mm$.

Задача 3. На еден концерт на отворено присуствувале 950 посетители, мажи и жени. Колку посетители биле мажи, а колку жени, ако на секои 9 мажи присуствувале 10 жени.

Решение. Со a да го означиме бројот на групите од 9 мажи и 10 жени.

Од условот на задачата следува

$$9a+10a=950$$
$$19a=950$$
$$a=50.$$

Значи, на концертот имало $9a=9\cdot 50=450$ мажи и $10a=10\cdot 50=500$ жени.

Задача 4. Која цифра треба да стои на местото на буквата a така што збирот на броевите $\overline{2017a}$ и 211 да биде делив со 2, а која цифра треба да стои на местото на буквата a за овој збир да биде делив со 5. (Испиши ги сите решенија)

Решение. За да збирот на двата броја е делив со 2, тој треба да е парен, односно да завршува на една од цифрите 2, 4, 6, 8 и 0. Но, бидејќи 211 е непарен број, заклучуваме дека бројот $\overline{2017a}$ треба да е непарен, т.е. на местото на a треба да стои непарен број. Според тоа, на местото на буквата a треба да биде запишана една од цифрите 1, 3, 5, 7 или 9.

Еден број е делив со 5, ако цифртата на единиците му е 0 или 5. Значи, за да збирот на двата броја е делив со 5, на местото на буквата a треба да е 4 или 9.

Задача 5. Билјана, Марија и Елена често одат во библиотека. Билјана оди на секои 3 дена, Марија на секои 8 дена, а Елена на секои 15 дена. На кој следен датум сите ќе се сретнат во библиотека, ако претходно во библиотеката се сретнале на 11 април?

Решение. Најмалиот заеднички содржател на броевите 3, 8, и 15 е 120. Тоа значи дека сите три повторно ќе се сретнат во библиотеката после 120 денови. Имајќи во предвид дека април и јуни имаат 30 денови, а мај и јули по 31 ден, и се сретнале на 11 април, заедно ќе се сретнат на $11+120-(2\cdot 30+2\cdot 31)=131-122=9$ -ти август.

VI одделение

Задача 1. Должините на страните на рамнокрак триаголник се изразени во природни броеви во сантиметри. Колку различни рамнокраки триаголници може да се конструираат ако периметарот на триаголникот е $22cm$.

Решение. Збирот на должините на двете страни на триаголникот мора да биде поголем од должината на третата страна. Понатаму,

$$a+2b=22 \qquad (1)$$

и бидејќи $2b$ и 22 се парни броеви, мора и a да биде парен број. Од неравенството $2b>a$ и од (1) следува табелата

a	2	4	6	8	10
b	10	9	8	7	6

Според тоа, постојат пет различни рамнокраки триаголници кои го задоволуваат условот на задачата.

Задача 2. Производот на природните броеви m и n, $m>n$ е еднаков на 2016 и важи $\text{NZS}(m,n)=504$. Определи ги броевите m и n.

Решение. Од $mn=2016$, $\text{NZS}(m,n)=504$ и $\text{NZS}(m,n)\cdot\text{NZD}(m,n)=mn$ добиваме $504\cdot\text{NZD}(m,n)=2016$, односно $\text{NZD}(m,n)=4$. Понатаму,

$$\text{NZD}(m,n)=4=2\cdot 2,\quad \text{NZS}(m,n)=504=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$$

и $m > n$, па затоа можни се следниве случаи:

1) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504, n = 2 \cdot 2$,
2) $m = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$,
3) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56, n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$,
4) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72, n = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$.

Задача 3. Пешачка патека со правоаголна форма има должина 3030 *m* и ширина 180 *cm*. Патеката треба да се покрие со квадратни плочки чија плоштина е 9 dm^2. Колку такви плочки се потребни?

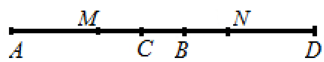
Решение. *Прв начин*. Сите димензии ќе ги претвориме во дециметри. Така, должината на патеката е еднаква на е $3030 \cdot 10 = 30300 dm,$ ширината е $180 : 10 = 18 dm,$ а плоштината на патеката е

$$P = 30300 \cdot 18 = 545400 dm^2.$$

Секоја плочка покрива $9 dm^2$, од каде следува дека вкупно се потребни $545400 : 9 = 60600$ плочки.

Втор начин. Должината на патеката е $3030 \cdot 10 = 30300 dm,$ ширината е $180 : 10 = 18 dm.$ **(6)** Од $3 \cdot 3 = 9 dm^2$ следува дека должината на страната на плочката е $3 dm$. Значи, во еден ред на ширината на патеката треба да поставиме $18 : 3 = 6$ плочки, а по должината на патеката треба да се поставиме $30300 : 3 = 10100$ редови од по 6 плочки. Според тоа, за поплочување на патеката се потребни $10100 \cdot 6 = 60600$ плочки.

Задача 1. На права се означени отсечките AB, CD за кои $\frac{1}{4}$ од нивните должини е заедничка. Определи ги должините на отсечките, ако растојанието меѓу нивните средини е еднакво на 6 *cm*.



Решение. Отсечките имаат заедничка четвртина од својата должина, односно се совпаѓаат на една четвртина од должината, па заклучуваме дека двете отсечки имаат еднакви должини. На цртежот се означени средините *M* на *AB* и *N* на *CD*. Ќе ја означиме четвртината од должината на отсечките со *x*. Тогаш според цртежот, за растојанието меѓу средините имаме $\overline{MN} = 3x = 6cm$, па затоа $x = 2cm.$ Значи $\frac{1}{4}$ од должината на едната отсечка е еднаква на $2cm$, па затоа $\overline{AB} = \overline{CD} = 4x = 8cm.$

Задача 1. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2017.$$

Решение. Во дадениот збир сите собирци, освен првите четири, како множители ги имаат броевите 2 и 5. Тоа значи, дека цифрата на единиците на сите собирци, освен на првите четири е 0, па затоа цифрата на единиците на збирот се совпаѓа со цифрата на единиците на

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=1+2+6+24=33,$$

т.е. таа е еднаква на 3.

VII одделение

Задача 1. Учениците од седмо одделение на едно училиште одат на зимување. Се пријавиле $\frac{2}{9}$ повеќе од планираните ученици. Пред поаѓањето се откажале $\frac{3}{11}$ од пријавените ученици, па на зимување отишле 5 ученици помалку отколку што било планирано. Колку ученици отишле на зимување?

Решение. Се пријавиле $1+\frac{2}{9}=\frac{11}{9}$ од планираниот број ученици. Се откажале $\frac{3}{11}$ од $\frac{11}{9}$, што значи дека се откажале $\frac{3}{11}\cdot\frac{11}{9}=\frac{1}{3}$ од планираниот број. На зимување отишле $\frac{11}{9}-\frac{1}{3}=\frac{11-3}{9}=\frac{8}{9}$ од планираниот број ученици. Значи, $\frac{1}{9}$ од планираниот број се 5 ученици, од каде следува дека било планирано на зимување да одат $9\cdot 5=45$ ученици. Според тоа, на зимување отишле $45-5=40$ ученици.

Задача 2. Збирот на растојанијата меѓу три точки е $12\ cm$. Тие растојанија се изразуваат со три последователни природни броеви. Дали тие точки лежат на иста права? Одговорот да се образложи!

Решение. Бидејќи растојанијата се последователни броеви имаме $a+a+1+a+2=12$, од каде $3a=9$, па $a=3cm$. Значи растојанијата меѓу точките се 3, 4 и $5cm$. Бидејќи важи $3+4>5,\ 4+5>3,\ 3+5>4$, точките се темиња на триаголник, што значи дека не лежат на иста права.

Задача 3. Збирот на два броја е 836. Цифрата на единиците на еден од броевите е 0. Ако на овој број се избрише цифрата на единиците, т.е. се избрише цифрата 0, тогаш се добива вториот број. Кои се тие броеви?

Решение. Од условот на задачата следува дека бараните броеви се $\overline{xy0}$ и $\overline{xy}$. Сега, $\overline{xy0}+\overline{xy}=836$ заклучуваме дека $y=6$, т.е. бровите се $\overline{x60}$ и $\overline{x6}$. Понатаму, од $\overline{x60}+\overline{x6}=836$ следува $x=7$. Значи, броевите се 760 и 76.

Задача 4. Даден е остроаголен триаголник $\triangle ABC$. Симетралата на аголот $\measuredangle BAC$, симетралата на страната AC и висината повлечена од темето C се сечат во една точка. Определи го аголот $\measuredangle BAC$.

Решение. Нека $\measuredangle BAC=\alpha$. Бидејќи точката S припаѓа на симетралата на страната AC, добиваме дека $\overline{AS}=\overline{CS}$, што значи дека $\triangle ASC$ е рамнокрак. Тоа значи дека $\measuredangle SCA=\measuredangle CAS$. Триаголникот $\triangle AEC$ е правоаголен, па оттука $\measuredangle ECA+\measuredangle CAE=90^\circ$, од каде следува $\frac{\alpha}{2}+\alpha=90^\circ$, односно $\alpha=60^\circ$.

Задача 5. Во една просторија има столчиња со 3 и 4 ногарки. Кога на секое столче ќе седне по еден човек, тогаш во просторијата има вкупно 69 нозе. Колку столчиња има во просторијата кои се со 3 ногарки, а колку се со 4 ногарки?

Решение. Бројот на столчињата со 3 ногарки да го означиме со a , а бројот на столчиња со 4 ногарки со b. Тогаш, според условот на задачата имаме: $3a+4b+2(a+b)=69$ После средувањето се добива $5a+6b=69$ т.е. $5a=69-6b$. Десната страна на оваа равенка треба да даде природен број кој е делив со 5, односно број кој завршува на цифрата 0 или на цифрата 5.

Бројот $69-6b$ не може да заврши на 0, бидејќи бројот $6b$ може да завршува само на некој од броевите 6,2,8,4 или 0.

Останува бројот $69-6b$ да завршува на цифрата 5, т.е. $6b$ да завршува на 4. Последното е можно ако $b=4$, $b=9$, $b=14$,.. Јасно $b<12$, бидејќи $69-6b$ е природен број.

Конечно, $b=4$ или $b=9$, па затоа $a=9$ или $a=3$, соодветно.

VIII одделение

Задача 1. Плоштините на ѕидовите на квадар се $16, 20$ и 45. Пресметај го волуменот на квадарот.

Решение. Нека страните на квадарот ги означиме со a, b и c. Тогаш од условот на задачата добиваме $ab=16$, $ac=20$ и $bc=45$. Со множење на трите равенки се добива $a^2b^2c^2=16\cdot 20\cdot 45=14400$ **(7)** од каде наоѓаме $V=abc=\sqrt{14400}=120$.

Задача 2. Брат и сестра сакале да купат топка. Сам да ја купи топката, на братот му недостасувало $\frac{5}{19}$ од цената на топката, а на сестрата $\frac{1}{4}$ од цената на топката. Тие, заедно имале 185 денари повеќе од цената на топката. Топката ја купиле заедно така што братот платил 45%, а сестрата го платила остатокот од цената на топката. Колку пари му останале на братот, а колку на сестрата?

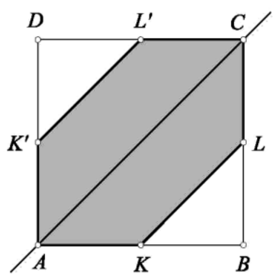
Решение. Ако цената на топката е x денари, тогаш од условот на задачата следува дека братот има $\frac{14}{19}x$, а сестрата има $\frac{3}{4}x$ денари. Според тоа,

$$\frac{14}{19}x+\frac{3}{4}x=x+185 \Leftrightarrow \frac{14}{19}x+\frac{3}{4}x-x=185 \Leftrightarrow \frac{56+57-76}{76}x=185 \Leftrightarrow$$
$$\frac{37}{76}x=185 \Leftrightarrow x=380.$$

Братот имал $\frac{14}{19}\cdot 380=280$ денари, а сестрата имала $\frac{3}{4}\cdot 380=285$. За топката братот платил $\frac{45}{100}\cdot 380=171$ денар, а сестрата платила $380-171=209$ денари. Според тоа, на братот му останале $280-171=109$ денари, а на сестрата и останале $285-209=76$ денари.

Задача 3. Нека отсечките AB и BC се заемно нормални и $\overline{AB}=\overline{BC}=a$. Нека K и L се средините на отсечките AB и BC, а K' и L' се нивните осносиметрични слики во однос на правата AC како оска на симетрија, соодветно. Колку изнесува плоштината на шестаголникот $AKLCL'K'$.

Решение. Нека сликата на $\triangle ABC$ при осната симетрија зададена со правата AC е триаголникот $\triangle ACD$. Од $\overline{AB}=\overline{BC}=a$ и $AB\perp BC$ следува дека $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен, па затоа и триаголникот $\triangle ACD$ е рамнокрак правоаголен. Според тоа, четириаголникот $ABCD$ е квадрат.



Бидејќи K и L се средини на отсечките AB и

BC, добиваме дека нивните осносиметрични слики K' и L' се средини на отсечките AD и CD, соодветно. Очигледно, триаголниците $\triangle KBL$ и $\triangle K'L'D$ се рамнокраки и правоаголни. Од досега изнесеното следува дека

$$P_{\triangle KBL}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2}=\frac{a^2}{8}, P_{\triangle K'L'D}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2}=\frac{a^2}{8}, P_{\square ABCD}=a^2$$

па затоа

$$P_{AKLCL'K'}=P_{\square ABCD}-P_{\triangle KBL}-P_{\triangle K'L'D}=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{8}=\frac{3}{4}a^2.$$

Задача 4. Најди ги сите прости броеви p за кои $p^2+2p+11$ и p^2+p+13 се прости броеви.

Решение. За $p=2$ имаме $4+4+11=19$ и $4+2+13=19$. Значи, едно решение е $p=2$.

За $p=3$ имаме $9+6+11=26=2\cdot 13$, па затоа $p=3$ не е решение на задачата.

Ако $p>3$, тогаш p е од облик $p=6k\pm 1$. Нека $p=6k+1$. Тогаш

$$p^2+p+13=(6k+1)^2+6k+1+13=36k^2+18k+15=3(12k^2+6k+5)$$

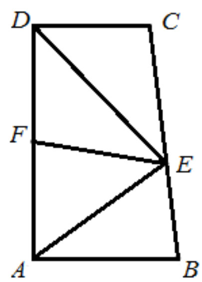
и како $12k^2+6k+5\geq 23$ заклучуваме дека p^2+p+13 е сложен број. Нека $p=6k-1$. Тогаш

$$p^2+2p+11=(6k-1)^2+2(6k-1)+11=36k^2+10=2(18k^2+5)$$

и како $18k^2+5\geq 23$ заклучуваме дека $p^2+2p+11$ е сложен број.

Следува $p=2$ е единствено решение.

Задача 5. Во трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ симетралите на внатрешните агли во темињата A и D се сечат во точка која лежи на кракот $\overline{BC}$. Докажи дека $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}$.



Решение. Нека E е пресечната точка на симетралите и нека $F\in\overline{AD}$ така што $\angle CED=\angle DEF$ (таква точка постои бидејќи $\measuredangle AED=90^\circ$ и $\measuredangle CED$ е остар). Од тоа што $\triangle CDE\cong\triangle FDE$ ($\overline{CD}$ заедничка, $\measuredangle CED=\measuredangle DEF$ и $\measuredangle FDE=\measuredangle FDE$) следува дека $\measuredangle DCE=\measuredangle DFE$ и

$$\overline{DF} = \overline{CD}. \qquad (1)$$

Од друга страна, од

$$\measuredangle ABE = 180^\circ - \measuredangle DCE = 180^\circ - \measuredangle DFE = \measuredangle AFE,$$

и од

$$\measuredangle FEA = 180^\circ - (\measuredangle AFE + \measuredangle FAE) = 180^\circ - (\measuredangle ABE + \measuredangle EAB) = \measuredangle BEA,$$

следува дека $\triangle ABE \cong \triangle AFE$. Оттука следува дека

$$\overline{AB} = \overline{AF} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\overline{AD} = \overline{AF} + \overline{FD} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

IX одделение

Задача 1. Воз се движи со брзина $4m/s$. Птица лета со брзина $12m/s$. За 60 секунди птица прелетала од крајот до почетокот на возот и назад. Колку е долг возот?

Решение. Кога птицата лета во насоката на движење на возот нејзината брзина во однос на возот изнесува $12-4=8m/s$. Кога птицата лета во насока спротивна од насоката на движење на возот, нејзинта брзина во однос на возот изнесува $12+4=16m/s$. Нека x е должината на возот во метри. Тогаш

$$\begin{aligned} &\tfrac{x}{8} + \tfrac{x}{16} = 60 \\ &3x = 960 \\ &x = 320. \end{aligned}$$

Значи, возот е долг $320m$.

Задача 2. Должините на соседните страни на еден правоаголник се $\sqrt{404}cm$ и $\sqrt{909}cm$. Најди ја плоштината на кругот и должината на кружницата која е опишана околу квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на дадениот правоаголник.

Решение. Плоштината на дадениот правоаголник е

$$P_1 = \sqrt{404} \cdot \sqrt{909} = \sqrt{4 \cdot 101} \cdot \sqrt{9 \cdot 101} = 2\sqrt{101} \cdot 3\sqrt{101} = 606cm^2.$$

Ако со a ја означиме должината на страната на квадратот кој има еднаква плоштина како и правоаголникот, тогаш $a^2 = 606$, што значи дека $a = \sqrt{606}cm$. Оттука должината на дијагоналата на квадратот е

$$d = a\sqrt{2} = \sqrt{606} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{606 \cdot 2}cm = \sqrt{303 \cdot 2 \cdot 2} = 2\sqrt{303}.$$

Според тоа, радиусот на кружницата опишана околу квадратот е

$$r=\frac{d}{2}=\frac{2\sqrt{303}}{2}=\sqrt{303}cm.$$

Конечно, должината на кружницата е $O=2r\pi=2\sqrt{303}\pi cm$, а плоштината е $P=\pi r^2=(\sqrt{303})^2\pi=303\pi cm$.

Задача 3. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-(1\cdot 3+2\cdot 4+...+2016\cdot 2018).$$

Решение. За секој природен број n важи $(n-1)(n+1)=n^2-1$. Со примена на последното равенство за $n=2,3,...,2017$ добиваме

$(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-(1\cdot 3+2\cdot 4+...+2016\cdot 2018)=$

$(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-((2-1)(2+1)+(3-1)(3+1)+...+(2017-1)(2017+1))=$

$(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-((2^2-1)+(3^2-1)+...+(2017^2-1)=$

$(1^2+2^2+3^2+...+2017^2)-(1^2+2^2+3^2+...+2017^2-2017)=2017$

Задача 4. Темето A на триаголникот ABC е пресекот на линеарната функција $y=\frac{3}{4}x+12$ со $x-$оската, а темето B е пресекот на линеарната функција $y=-\frac{4}{3}x+12$ со $x-$оската. Темато C е пресечната точка на графиците на овие две линеарни функции.

а) Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен

б) Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Од $\frac{3}{4}x+12=0$ следува $x=-16$, па затоа $A(-16,0)$. **(3)** Од $-\frac{4}{3}x+12=0$ следува $x=9$, па затоа $B(9,0)$. Од $\frac{3}{4}x+12=-\frac{4}{3}x+12$ добиваме $x=0$, па затоа $y=12$. Значи, $C(0,12)$. Должините на страните на триаголникот ABC се

$$a=\sqrt{9^2+12^2}=15, b=\sqrt{12^2+16^2}=20, c=9+16=25.$$

Сега, од $a^2+b^2=15^2+20^2=625=25^2=c^2$ следува дека триаголникот ABC е правоаголен.

б) Периметарот на триаголникот ABC е

$$L=15+20+25=60,$$

а плоштината е

$$P=\frac{15\cdot 20}{2}=150.$$

Задача 5. Дадени се четири броја: $\overline{abbcd}, \overline{bac}, \overline{ac}, c$ (a,b,c се различни цифри). Почнувајќи од вториот, секој број е еднаков на производот од цифрите на претходниот. Определи ги броевите $\overline{abbcd}, \overline{bac}, \overline{ac}, c$.

Решение. Од $a \cdot c = c$ следува дека $c = 0$ или $a = 1$. Ако $c = 0$, тогаш $a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot d = 0$, што не е можно. Значи, $a = 1$. Од $b \cdot c = \overline{1c}$ добиваме $(b-1)c = 10$. Оттука добиваме дека $c \in \{1,2,5\}$. Јасно е дека $c \neq 1$ (бидејќи $a = 1$). Ако $c = 2$, тогаш $b = 6$. Но, тогаш $a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot d = 612$, што не е можно бидејќи $17 | 612$. Ако $c = 5$, тогаш $b = 3$. Следува дека $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot d = 315$, односно $d = 7$. Значи бараните броеви се 13357, 315, 15, 5.