Самоил Малчески
Скопје

НЕКОЛКУ ИРАЦИОНАЛНИ И ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ И СИСТЕМИ РАВЕНКИ

Решавањето на ирационалните и тригонометриските равенки и системи равенки не е секогаш едноставно. Токму затоа во оваа статија ќе разгледаме неколку задачи при чие решавање ќе презентираме повеќе нестандардни методи за решавање на задачи од споменаите видови.

1. Нека $n>1$ е природен број. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sqrt[n]{1+x}+\sqrt[n]{1-x}=a$$

има единствен реален корен.

Решение. Јасно, ако x_0 е корен на равенката, тогаш и $-x_0$ е корен на равеката. Но, равенката треба да има единствен корен, па затоа $-x_0=x_0$, од каде добиваме $x_0=0$ и $a=2$. За $a=2$, ако $x<-1$ или $x>1$ (n е непарен), лесно се гледа дека $\sqrt[n]{1+x}+\sqrt[n]{1-x}<2$, а ако $x\in[-1,1]$, тогаш за $u=\sqrt[n]{1+x}, v=\sqrt[n]{1-x}$, од $\frac{u+v}{2}\leq\sqrt[n]{\frac{u^n+v^n}{2}}$ следува дека само $x=0$ е решение. Според тоа, $a=2$.

2. Реши ја равенката

$$\frac{3x}{\sqrt{2-|1-2x|}}=1. \qquad (1)$$

Решение. Да забележиме дека ако дадената равенка има решение, тогаш тоа е позитивно, т.е. $x>0$. Така, по квадрирањето, во дефиниционата област на (1), ја добиваме еквивалентната равенка

$$9x^2=2-|1-2x|,$$

каде $x>0$. Ќе разгледаме два случаја:

Прв случај. Ако $1-2x\geq 0$, т.е. $x\leq\frac{1}{2}$, ја добиваме равенката

$$9x^2-2x-1=0$$

чии решенија се $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{9}$, од кои само $x=\frac{1+\sqrt{10}}{9}\in(0,\frac{1}{2}]$. Лесно се проверува дека за најденото решение именителот на (1) е определен.

Втор случај. Ако $1-2x<0$, т.е. $x>\frac{1}{2}$, ја добиваме равенката

$$9x^2+2x-3=0$$

чии решенија се $x_{3,4}=\frac{-1\pm2\sqrt{7}}{9}$ и ниту едно од нив не е во интервалот $(\frac{1}{2},+\infty)$.

Конечно, задачата има единствено решение $x=\frac{1+\sqrt{10}}{9}$.

3. Реши ја равенката

$$\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x=\frac{1}{32}.$$

Решение.Бидејќи $x=k®, k\in\mathbb{Z}$ не се решенија на дадената равенка, можеме дадената равека да ја помножиме со $\sin x$ и последователно добиваме

$$\begin{aligned}&32\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x=\sin x\\&\sin 32x=\sin x,\\&\sin 32x-\sin x=0,\\&2\sin\frac{32x-x}{2}\cos\frac{32x+x}{2}=0.\end{aligned}$$

Оттука следува $\sin\frac{31x}{2}=0$ или $\cos\frac{33x}{2}=0$, што значи $x=\frac{2k®}{31}, k\in\mathbb{Z}$ или $x=\frac{(2m+1)®}{33}, m\in\mathbb{Z}$. Од добиените решенија ги исклучуваме решенијата од видот $x=n®, n\in\mathbb{Z}$.

Од $\frac{2k®}{31}\neq n®, n\in\mathbb{Z}$ добиваме $x=\frac{2k®}{31}, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 31t, t\in\mathbb{Z}$.

Од $\frac{(2m+1)®}{33}\neq n®, n\in\mathbb{Z}$ следува $x=\frac{(2m+1)®}{33}, m\in\mathbb{Z}, m\neq 33s+16, s\in\mathbb{Z}$.

4. Реши ја равенката

$$\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 4x.$$

Решение. Дадената равенка има смисла за $x\neq\frac{®}{2}+n®$, $x\neq\frac{®}{4}+n®$, $x\neq\frac{®}{6}+n®$ и $x\neq\frac{®}{8}+n®$, $n\in\mathbb{Z}$ и истата последователно е еквивалентна со равенките

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x+1=\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 4x+1,\\&\frac{\cos x}{\cos x\cos 2x}=\frac{\cos x}{\cos 3x\cos 4x}.\end{aligned}$$

Последната равенка ја делиме со $\cos x\neq 0$ и последователно ги добиваме равенките

$$\cos x\cos 2x=\cos 3x\cos 4x,$$
$$\cos x+\cos 3x=\cos 7x+\cos x,$$
$$\cos 7x-\cos 3x=0,$$
$$\sin 2x\sin 5x=0,$$

кои се еквивалентни меѓу себе. Решенија на последната равенка се $x=\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi}{5}t, t\in\mathbb{Z}$. Од првото множество решенија само решенијата $x=m\pi, m\in\mathbb{Z}$ припаѓаат на дефиниционата област на равенката, но овие решенија се содржат во второто множество решенија $x=\frac{\pi}{5}t, t\in\mathbb{Z}$. Лесно се проверува дека $x=\frac{\pi}{5}t, t\in\mathbb{Z}$ се во дефиниционата област на равенката, што значи дека тие се решенија на дадената равенка.

5. Реши ја равенката

$$\sin(x-\frac{\pi}{6})+2\cos^2 x=1.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\sin(x-\frac{\pi}{6})+\cos 2x=0,$$
$$\cos(\frac{2\pi}{3}-x)+\cos 2x=0,$$
$$\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})\cos(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})=0.$$

Понатаму, од $\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})=0$ и $\cos(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})=0$ добиваме

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \text{ и } x=\frac{5\pi}{9}+\frac{2n\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}.$$

6. Реши ја равенката

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2+3\cos^2(2x+\frac{\pi}{6}).$$

Решение. Дадената равенка е последователно еквивалентна со равенките

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1+\frac{3}{2}\cos^2(2x+\frac{\pi}{6}),$$
$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=1+\frac{3}{2}\cos^2(2x+\frac{\pi}{6}),$$
$$\sin(x+\frac{\pi}{3})=1+\frac{3}{2}\cos^2(2x+\frac{\pi}{6}).$$

Сега, бидејќи $\sin(x+\frac{®}{3})\le 1$ и $\cos^2(2x+\frac{®}{6})\ge 0$, од последното равенство следува

$$\sin(x+\frac{®}{3})=1,$$
$$\cos(2x+\frac{®}{6})=0.$$

Од првата равенка добиваме $x+\frac{®}{3}=\frac{®}{2}+2k®, k\in\mathbb{Z}$, а од втората добиваме $2x+\frac{®}{6}=\frac{®}{2}+n®, n\in\mathbb{Z}$, односно

$$x=\frac{®}{6}+2k®, k\in\mathbb{Z} \text{ и } x=\frac{®}{6}+n®, n\in\mathbb{Z},$$

па затоа решенија на почетната равенка се $x=\frac{®}{6}+2k®, k\in\mathbb{Z}$.

7. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sin 2x\sin 4x-\sin x\sin 3x=a$$

има единствено решение во интервалот $[0,®)$.

Решение. Да забележиме дека ако $\sim$ е решение на дадената равенка, тогаш $®-\sim$ исто така е нејзино решение. Значи, ако $\sim_0\in[0,®)$ е единствено решение на равенката во интервалот $[0,®)$, тогаш $\sim_0=0$ или $\sim_0=\frac{®}{2}$. Ако $t=\cos 2x$, тогаш равенката последователно е еквивалентна на

$$\cos 2x-\cos 6x-(\cos 2x-\cos 4x)=2a,$$
$$\cos 4x-\cos 6x=2a,$$
$$2t^2-1-(4t^3-3t)=2a,$$
$$4t^3-2t^2-3t+2a+1=0,$$

За $\sim_0=0$, добиваме $a=0$ и добиваме $(t-1)(4t^2+2t-1)=0$. Квадратниот трином во заградите има две реални решенија во интервалот $(-1,1)$, па затоа $a=0$ не е решение на задачата.

За $\sim_0=\frac{®}{2}$ имаме $a=1$ и добиваме $(t+1)(4t^2-6t+3)=0$. Квадратниот трином во заградите нема реални решенија, па затоа $a=1$ е решение на задачата.

8. Реши ја равенката

$$x^3-3x=\sqrt{x+2}.$$

Решение. Допустливите вредности се $x\ge -2$, а при $x>2$ имаме

$$x^3-3x=x(x^2-3)>x>\sqrt{x+2}\,,$$

бидејќи последното неравенство е еквивалентно со неравенството $(x-2)(x+1)>0$. Според тоа, $x\in[-2,2]$, па затоа постои $\sim\in[0,®]$ таков што $x=2\cos\sim$. Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$8\cos^3\sim-6\cos\sim=\sqrt{2\cos\sim+2}\,.$$

Сега, ако ги искористиме формулите за $\cos 3\sim$ и $\cos 2\sim$, добиваме дека дадената равенка е еквивалентна со равенката $\cos 3\sim=\cos\frac{\sim}{2}$. Според тоа, $3\sim\pm\frac{\sim}{2}=2k®$ за некој $n\in\mathbb{Z}$. Од $\sim\in[0,®]$ следува дека $3\sim\pm\frac{\sim}{2}\in[-\frac{®}{2},\frac{7®}{2}]$ и затоа $n=0$ или $n=1$. Сега, лесно се добива дека решенијата се $x=2,\ x=2\cos\frac{4®}{5}$ и $x=2\cos\frac{4®}{7}$.

9. Реши ја равенката

$$x^2+xy+y^2=a\,.$$

Решение. Да ја разгледаме равенката $p^2+pq+q^2=1$. Оваа равенка е квадратна по p и нејзини решенија се

$$p=\frac{-q\pm\sqrt{4-3q^2}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{1-(\frac{q\sqrt{3}}{2})^2}\,.$$

Ако $|\frac{q\sqrt{3}}{2}|\le 1$, ставаме $\frac{q\sqrt{3}}{2}=\sin t$, за $t\in[0,2®]$. Тогаш со точност до пермутација решенијата на равенката се

$$p=-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}\pm\cos t\,,\ q=\frac{2\sin t}{\sqrt{3}}\,.$$

Ако $|\frac{q\sqrt{3}}{2}|>1$, ставаме $\frac{q\sqrt{3}}{2}=i\cdot\mathrm{tg}\,t$, за $t\in[-\frac{®}{2},\frac{®}{2}]$. Тогаш со точност до пермутација решенијата на равенката се

$$p=-\frac{i\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}\,t\pm\frac{1}{\cos t}\,,\ q=\frac{2i\,\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{3}}\,.$$

Да се вратиме на почетната равенка. Воведуваме смени $x=p\sqrt{a}$, $y=q\sqrt{a}$ и ја добиваме равенката $p^2+pq+q^2=1$. Сега најдените решенија на оваа равенка ги заменуваме во $x=p\sqrt{a}$, $y=q\sqrt{a}$ и ги добиваме решенијата на почетната равенка.

10. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 3(x+\frac{1}{x}) = 4(y+\frac{1}{y}) = 5(z+\frac{1}{z}), \\ xy+yz+zx=1. \end{cases}$$

Решение. Во ведуваме смени $x=\mathrm{tg}\frac{\sim}{2}$, $y=\mathrm{tg}\frac{}{2}$, $z=\mathrm{tg}\frac{¥}{2}$ и добиваме

$$\frac{\sin\sim}{3}=\frac{\sin}{4}=\frac{\sin ¥}{5}. \qquad (1)$$

Заменуваме во во втората равенка и добиваме

$$\mathrm{ctg}\frac{¥}{2}=\mathrm{tg}\frac{\sim+}{2}.$$

Оттука следува дека $\sim$, , ¥ се агли на триаголник и од (1) добиваме дека триаголникот е правоаголен. Сега лесно добиваме дека $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$ и $z=1$.

11. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \sqrt{x}+y=3 \\ \sqrt{y}+z=3-\sqrt{2} \\ \sqrt{z}+x=\sqrt{2}. \end{cases}$$

Решение. Од условот на задачата следува дека $x,y,z\in[0,+\infty)$. На интервалот $[0,+\infty)$ функциите $f(t)=\sqrt{t}$ и $g(t)=t$ се монотоно растечки. Нека претпоставиме дека системот има две различни решенија (x_0,y_0,z_0) и (x_1,y_1,z_1). Нека без ограничување на општоста мземеме дека $x_0<x_1$. Бидејќи $\sqrt{x}$ и y се истовремено растечки следува дека $y_0>y_1$. Повторувајќи ги овие аргументи добиваме $z_0<z_1$ и $x_0>x_1$, што е противречност. Според тоа, системот има единствено решение.

Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} \sqrt{x}+y=\sqrt{1}+2 \\ \sqrt{y}+z=\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)^2 \\ \sqrt{z}+x=(\sqrt{2}-1)+1 \end{cases}$$

од што лесно се гледа дека единственото решение на системот е $x=1$, $y=2$ и $z=(\sqrt{2}-1)^2$.