Алекса Малчески, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВАТА ПРИРОДНИ И ЦЕЛИ БРОЕВИ

Фунционалните равенки се неодминлива тема на секој посериозен математички натпревар, што може да се види со анализа на задачите кои се задаваат на Меѓународната математичка олимпијада (ИМО), Балканската математичка олимпијада (БМО), Азиско-пацифистичката математика олимпијада (АПМО), Европскиот математички куп (ЕМК), како и на повеќето национални олимпијади на државите кои според постигањата на учениците се на врвот на листата на ИМО, БМО, АПМО и ЕМК. Имајќи ја предвид тежината на задачите од оваа област, а особено на функционалните равенки чии решенија се бараат во множествата природни и цели броеви, каде покрај знаењата од множествата и пресликувањата, најчесто за решавање на овие задачи се потребни и знаења од теоријата на броеви, во продолжение ќе разгледаме неколку функционални равенки чии решенија се бараат во множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$.

Задача 1. Определи ги сите цели броеви k такви што постои функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ за која важи:

а) $f(1997)=1998$,

б) $f(ab)=f(a)+f(b)+kf(\mathrm{NZD}(a,b))$, за секои $a,b\in\mathbb{N}$.

Решение. За $a=b$ добиваме $f(a^2)=(k+2)f(a)$. Оттука важи

$$f(a^4)=f((a^2)^2)=(k+2)f(a^2)=(k+2)^2 f(a).$$

Од друга страна добиваме:

$$\begin{aligned} f(a^4)&=f(a^3a)=f(a^3)+f(a)+kf(a)\\ &=f(a^2)+f(a)+kf(a)+f(a)+kf(a)\\ &=(k+2)f(a)+2f(a)+2kf(a)\\ &=(3k+4)f(a). \end{aligned}$$

Значи $(k+2)^2 f(a)=(3k+4)f(a)$ и за $a=1997$ од последното равенство добиваме $1998(k+2)^2=1998(3k+4)$, па затоа $(k+2)^2=3k+4$, т.е. $k=0$ или $k=-1$. ■

Задача 2. Нека S е множеството од сите природни броеви поголеми од 1. Дали постои функција $f:S\to S$ таква што

$$f(a)f(b)=f(a^2b^2)\text{, за секои } a,b\in S, (a\neq b)\text{ ?}$$

Решение. За $c>a,b$ важи $a\neq bc$ и $b\neq ac$, па затоа имаме

$$f(a^2)f(b)f(c) = f(a^2)f(b^2c^2) = f(a^4b^4c^4)$$
$$= f(b^2)f(a^2c^2) = f(b^2)f(a)f(c),$$

па затоа $\frac{f(a^2)}{f(a)} = \frac{f(b^2)}{f(b)}$.

Според тоа, постои константа k таква што важи $f(x^2) = kf(x)$ за секој x. Сега почетната равенка го добива обликот

$$f(a)f(b) = kf(ab), \text{ за секои } a,b \in S, (a \neq b).$$

Сега имаме

$$f(a)f(a^2) = f(a^6) = \frac{1}{k} f(a)f(a^5)$$
$$= \frac{1}{k^2} f(a)f(a)f(a^4)$$
$$= \frac{1}{k} f(a)f(a)f(a^2),$$

од каде што следува $f(a) = k$ за секој a. Сега со замена во почетната равенка добиваме $k = 1$, што е противречност. Според тоа, не постои функција со саканите својства. ■

Задача 3. Функцијата $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ги задоволува условите

1) $f(1) = p+1$,
2) $f(n+1) = f(1)f(2)...f(n) + p$

каде p е прост број. Определи го p така што постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $f(k)$ е точен квадрат.

Решение. Прво да провериме кога $f(1)$ е точен квадрат. Тогаш $p+1 = m^2$, од каде добиваме $p = (m-1)(m+1)$, па затоа $m-1 = 1$, т.е. $m = 2$ и $p = 3$.

Понатаму, бидејќи $f(2) = f(1) + p = 2p+1$ и равенката $2p+1 = m^2$ нема решение, заклучуваме дека $f(2)$ не е точен квадрат за ниту еден прост број p. Понатаму,

$$f(3) = f(1)f(2) + p = (p+1)(2p+1) + p = 2p^2 + 4p + 1$$

и равенката $2p^2 + 4p + 1 = m^2$ нема решение, што е очигледно за $p = 2$, а за $p > 2$ левата страна дава остаток 2 при делење со 4, а остатокот на квадрат на природен број при делење со 4 може да биде 0 или 1.

Сега, да разгледаме $f(n), n \geq 4$. Јасно, $f(n-1) > 2p^2$, $f(n) > p^4$ и

$$f(n) = f^2(n-1) - pf(n-1) + p.$$

Нека претпоставиме дека $f(n) = k^2$. Тогаш

$$f^2(n-1)-pf(n-1)+p-k^2=0,$$
$$4f^2(n-1)-4pf(n-1)+p^2-4k^2=p^2-4p,$$
$$(2f(n-1)-p)^2-4k^2=p^2-4p,$$
$$(2f(n-1)-p-2k)(2f(n-1)-p+2k)=p^2-4p.$$

За $p>3$ десната страна во последното равенство е позитивен број, па затоа мора да важи $2f(n-1)-p-2k\geq 1$. Според тоа,

$$(2f(n-1)-p-2k)(2f(n-1)-p+2k)\geq 2f(n-1)-p+2k$$
$$\geq 4p^2-p+2p^2>p^2-4p,$$

што е противречност. За $p=3$ видовме дека $f(1)$ е точен квадрат, а за $p=2$ лесно се докажува дека нема точни квадрати. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Задача 4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секои природни броеви m и n целиот број $f(m)+f(n)-mn$ е различен од 0 и е делител на $mf(m)+nf(n)$.

Решение. За $m=n=1$ добиваме $2f(1)-1\,|\,2f(1)$, од каде следува дека важи $2f(1)-1\,|\,2f(1)-(2f(1)-1)=1$, па затоа $f(1)=1$. Нека $p\geq 7$ е прост број. Ако земеме $m=p$ и $n=1$ добиваме $f(p)-p+1\,|\,pf(p)+1$, па затоа

$$f(p)-p+1\,|\,pf(p)+1-p(f(p)-p+1)=p^2-p+1. \qquad (1)$$

Ако $f(p)-p+1=p^2-p+1$, тогаш $f(p)=p^2$. Сега да претпоставиме дека

$$f(p)-p+1\neq p^2-p+1.$$

Бидејќи p^2-p+1 е непарен број, од (1) следува

$$3(f(p)-p+1)\leq p^2-p+1,$$

односно

$$f(p)\leq \tfrac{1}{3}(p^2+2p-2). \qquad (2)$$

За $m=n=p$ од условот на задачата следува $2f(p)-p^2\,|\,2pf(p)$, па затоа

$$2f(p)-p^2\,|\,2pf(p)-p(2f(p)-p^2)=p^3. \qquad (3)$$

Од (2) и фактот дека $f(p)\geq 1$, бидејќи $p\geq 7$ следува

$$-p^2<2f(p)-p^2\leq \tfrac{2}{3}(p^2+2p-2)-p^2<-p.$$

Последното шротивречи на (3). Според тоа, $f(p)=p^2$ за секој прост број $p\geq 7$.

Сега, нека n е произволен природен број и p е доволно голем прост број. Земаме $m=p$ и добиваме

$$f(p)+f(n)-pn \mid pf(p)+nf(n)-n(f(p)+f(n)-pn)=pf(p)-nf(p)+pn^2 .$$

Бидејќи $f(p)=p^2$, добиваме $p^2+f(n)-pn \mid p(p^2-pn+n^2)$. Бидејќи p е доволно голем прост број важи

$$\mathrm{NZD}(p, p^2+f(n)-pn)=1 ,$$

па затоа важи $p^2+f(n)-pn \mid p^2-pn+n^2$. Сега добиваме

$$p^2+f(n)-pn \mid p^2-pn+n^2-(p^2+f(n)-pn)=n^2-f(n) ,$$

за секој доволно голем прост број p. Последното е можно само ако $n^2-f(n)=0$, односно $f(n)=n^2$ за секој природен број n. Јасно, оваа функција го задоволува условите на задачата, бидејќи

$$f(m)+f(n)-mn=m^2-mn+n^2 \mid m^3+n^3=mf(m)+nf(n) .$$

Конечно, функцијата $f(n)=n^2$ е единствено решение на задачата. ■

Задача 5. Испитај дали постои функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за која за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$f(n)f(\tfrac{1}{2015}nf(n))f(\tfrac{1}{2015^2}nf(n)f(\tfrac{1}{2015}nf(n))=2\cdot 2015^3 . \qquad (1)$$

Решение. Со воведување на ознаката $g(n)=\frac{1}{2015}nf(n)$ равенката го добива обликот

$$g(n)f(g(n))f(\tfrac{1}{2015}g(n)f(f(n)))=2\cdot 2015^2 n$$

од каде следува $g(g(n))f(g(g(n)))=2\cdot 2015n$, т.е. $g(g(g(n)))=2n$. Според тоа, треба да конструираме функција $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за која важи $g(g(g(n)))=2n$ и $n \mid 2015g(n)$. Јасно, една таква функција е следнава: за $n=2015^r m$, каде $r\in\mathbb{N}_0$, $m\in\mathbb{N}$ и $2015 \nmid m$, ставаме $g(n)=\frac{n}{2015}$ ако $3\nmid r$ и $g(n)=2\cdot 2015^2 n$ ако $3\mid r$. Навистина, на пример, за $r\equiv 1 \pmod 3$ имаме

$$g(n)=\tfrac{n}{2015},\ g(g(n))=2\cdot 2015n \text{ и } g(g(g(n)))=2n .$$

Слично се проверуваат и останатите случаи.

Во овој случај

$$f(n)=\begin{cases}1, & 3\nmid n\\ 2\cdot 2015^2, & 3\mid n.\end{cases}$$

Задача 6. Нека $S(k)$ е збирот на цифрите на природниот број k. За природниот број a ќе велиме дека е $n-$добар, ако постои низа природни броеви $a_0,a_1,...,a_n$ за која $a_n=a$ и $a_{i+1}=a_i-S(a_i)$ засекој $i=0,1,2,...,n-1$. Дали е точно тврдењето: за секој природен број n постои природен број b кој е $n-$добар, но не е $(n+1)-$добар.

Решение. *Одговор*: ДА.

За природните броеви n и k да означиме

$$f(n)=n-S(n) \text{ и } f^k(n)=f(f^{k-1}(n)).$$

Кога n се зголемува за 1, тогаш бројот $S(n)$ или се зголемува за 1 (ако n нема цифра на единици 9) или се намалува. Според тоа, функцијата f не е строго растечка, при што важи $f(n+10)>f(n)$ за секој n.

Нека природниот број d е таков што $10^d>20d(n+1)$ и да ставиме $k=10^d$. Ставаме $b_0=10^k-1$, $c_0=10^k-k$, $b_i=f^i(b_0)$ и $c_i=f^i(c_0)$. Ќе докажеме дека

$$b_n>c_n>b_{n+1}. \tag{1}$$

Бидејќи $S(c_i)\le 9k$ со индукција добиваме $c_i\ge 10^k-k-9ki$. За $i\le n+1$ имаме $(9i+1)k\le 10ki\le 10^{d+1}(n+1)<10^{2d}$, па значи во записот на бројот c_i првите $k-2d$ цифри се деветки. Оттука $S(c_i)\ge 9(k-2d)$, од каде повторно по индукција добиваме $c_i\le 10^k-k-9(k-2d)i$. Значи,

$$10^k-(9i+1)k\le c_i\le 10^k-k-9(k-2d)i.$$

Аналогно за b_i добиваме

$$10^k-9ki-1\le b_i\le 10^k-1-9(k-2d)i.$$

Сега неравенството $b_n>c_n$ следува од

$$10^k-k-9(k-2d)n<10^k-9kn-1,$$

т.е. $10^d=k>18dn+1$, кое е точно заради изборот на d.

Неравенството $c_n>b_{n+1}$ ќе следува од

$$10^k-1-9(k-2d)(n+1)<10^k-(9n+1)k,$$

т.е. $8k+1>18d(n+1)$, кое е точно. Со тоа ги докажавме неравенствата (1).

Со помош на неравенствата (1) сега можеме да провериме дека бројот c_n е $n-$добар, но не е $(n+1)-$добар. Првото следува од $c_n=f^n(c_0)$. Останува да докажеме дека $c_n\ne f^{n+1}(x)$ за секој природен број x. Ако $x\le 10^k-1=b_0$, тогаш

$$f^{n+1}(x)\le f^{n+1}(b_0)=b_{n+1}<c_n.$$

Ако $x\ge 10^k$, тогаш $f(x)\ge f(10^k)=b_0$, па затоа

$$f^{n+1}(x)\ge f^n(b_0)=b_n>c_n.$$

Задача 7. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е функција таква што $af(a)+bf(b)+2ab$ е точен квадрат за секои $a,b\in\mathbb{N}$. Докажи дека $f(a)=a$ за секој $a\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека p е непарен прост број и да земеме $a=b=p$, Тогаш бројот $2p(f(p)+p)$ е точен квадрат, па затоа $p\mid f(p)$ и затоа $p\le f(p)$.

Прво ќе докажеме дека $af(a)$ е точен квадрат за секој $a\in\mathbb{N}$. Нека го претпоставиме спротивното и нека за некој $a\in\mathbb{N}$ бројот $af(a)$ не е течен квадрат. Тогаш постои прост број p за кој $p^{2k-1}\parallel af(a)$, $k\in\mathbb{N}$, т.е. $af(a)=p^{2k-1}s$, каде $\mathrm{NZD}(p,s)=1$. Ставаме $b=p^{2k}$ и добиваме дека бројот

$$x=p^{2k-1}s+p^{2k}(f(b)+2a)$$

е точен квадрат. Последното не е можно, бидејќи очигледно е дека $p^{k-1}\parallel x$.

Нека $p>f(1)$ е непарен прост број. Тогаш за $a=p$ и $b=1$ добиваме дека бројот $y=pf(p)+f(1)+2p$ е точен квадрат. Очигледно $y>pf(p)=(\sqrt{pf(p)})^2$. Од друга страна, бидејќи $f(1)<p$ и $p\le f(p)$ добиваме дека важи

$$f(1)+2p<p+2f(p)\le 2\sqrt{2pf(p)}<4\sqrt{pf(p)}+4,$$

па затоа

$$y=pf(p)+f(1)+2p<pf(p)+4\sqrt{pf(p)}+4=(\sqrt{pf(p)}+2)^2.$$

Сега од $(\sqrt{pf(p)})^2<y<(\sqrt{pf(p)}+2)^2$ следува $y=(\sqrt{pf(p)}+1)^2$, па затоа

$$f(1)+2p=2\sqrt{pf(p)}+1. \qquad (1)$$

Бидејќи $pf(p)$ е точен квадрат, имаме $f(p)=t^2p, t\in\mathbb{N}$. Ако $t\ge 2$, тогаш $p>f(1)$ и од (1) добиваме

$$3p>f(1)+2p=2\sqrt{pf(p)}+1=2tp+1\ge 4p+1,$$

што не е можно. Според тоа, $t=1$ и $f(p)=p$ за секој непарен прост број $p>f(1)$. Уште повеќе, сега од (1) следува дека $f(1)=1$, па затоа $f(p)=p$ за секој непарен прост број p.

Сега да претпоставиме дека за некој $a\in\mathbb{N}$ важи $f(a)\ne a$. Во условот ставаме $b=p$, каде p е непарен прост број и добиваме дека бројот $z=af(a)+p^2+2ap$ е точен квадрат, кој е различен од $(a+p)^2$, заради претпоставката $f(a)\ne a$. Тогаш

$$|z-(a+p)^2|\ge 2(a+p)-1=\min_{x\ne a+p}|x^2-(a+p)^2|.$$

Но, $z-(a+p)^2=af(a)-a^2$, па затоа

$$|af(a)-a^2|\ge 2(a+p)-1,$$

што не е можно за фиксиран број a и произволен прост број p. Конечно, од добиената противречност следува дека $f(a)=a$ за секој $a\in\mathbb{N}$.

Задача 8. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што $f(n!)=f(n)!$ за секој $n\in\mathbb{N}$ и $m-n$ е делител на $f(m)-f(n)$ за секои $m,n\in\mathbb{N}, m\neq n$.

Решение. *Прв начин.* Нека f е функција која ги задоволува условите на задачата. Нека претпоставиме дека постои $a>2$ таков што $f(a)=a$. Тогаш $a!,(a!)!,...$ се неподвижно точки за f. Според тоа, постои растечка низа $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ од неподвижни точки на f. За секој n бројот a_k-n е делител на $f(a_k)-f(n)=a_k-f(n)$ за секој k. Но, од $a_k-n=f(a_k)-n$ следува дека a_k-n children делител на $f(a_k)-n$ за секој k. Според тоа, a_k-n е делител на $f(n)-n$ за секој k, од каде следува дека $f(n)=n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Сега, да претпоставиме дека f нема фиксни точки поголеми од 2. За прост број $p>3$ од теоремата на Вилсон следува дека $(p-2)!\equiv 1(\text{mod}\, p)$, па затоа

$$f(p-2)!-f(1)=f((p-2)!)-f(1)$$

е делив со p. Јасно е дека $f(1)=1$ или 2. Бидејќи $p>3$ и p е делител на $f(p-2)!-f(1)$ добиваме $f(p-2)<p$. Сега, повторно од теоремата на Вилсон следува дека $(p-1)!-f(1)$ не е делив со p, па затоа $f(p-2)\le p-2$. Но, $p-2>2$, а f нема фиксни точки поголеми од 2, па затоа $f(p-2)<p-2$. Од друга страна $p-3$ е делител на $f(p-2)-f(1)$ и како $f(p-2)<p-2$, заклучуваме дека $f(p-2)=f(1)$ за секој прост број $p>3$. За произволен природен број n добиваме дека $p-2-n$ е делител $f(n)-f(p-2)$ и како $p-2-n$ е делител на $f(p-2)-f(1)=0$, заклучуваме дека $p-2-n$ е делител на $f(n)-f(1)$ и тоа е точно за сите големи прости броеви p. Според тоа, $f(n)=f(1)$, т.е. f е константа.

Непосредно се проверува дека функциите $f(n)=1$ или $f(n)=2$ се решенија на задачата.

Втор начин. Ако $f(n_0)=n_0$ за некој $n_0\ge 3$ добиваме дека $f(n_k)=n_k$ за секој цел број $k\ge 0$, каде $n_k=n_{k-1}!$. Од друга страна,

$$m-n_k \mid f(m)-f(n_k)=f(m)-n_k=f(m)-m+m-n_k,$$

па затоа $m-n_k \mid f(m)-m$. Според тоа, $f(m)-m$ има бесконено многу делители, па затоа $f(m)=m$ за секој $m\in\mathbb{N}$.

Од $f(1)=f(1!)=f(1)!$ и $f(2)=f(2!)=f(2)!$ следува дека $f(1),f(2)\in\{1,2\}$. Оттука и од $4=3!-2\mid f(3!)-f(2)=f(3)!-f(2)$ следува дека $f(3)\le 3$.

Ако $f(3)=3$, тогаш од претходните разгледувања следува $f(m)=m$ за секој $m\in\mathbb{N}$.

Нека $f(3)\in\{1,2\}$ и $n>3$ е произволен број. Тогаш

$$n!-3\,|\,f(n!)-f(3)=f(n)!-f(3)$$

следува дека $f(n)!$ не е делив со 3, па затоа $f(n)\in\{1,2\}$.

Ако f не е константа, тогаш постојат природни броеви m и n за кои $f(n)=1$ и $f(m)=2$. Тогаш за $k=2+\max\{m,n\}$ од $k-m\,|\,f(k)-f(m)\in\{-1,0,1\}$ следува дека $f(k)=f(m)=2$ и аналогно $f(k)=1$, штом е противречност.

Според тоа, решение на задачата се функциите $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$, $f\equiv 1$ и $f\equiv 2$.

Литература

1. Бойваленков, П., Димитров, С., Маринов, М., Тодоров, Т.: Национални олимпиади по математика 2015-2016, УНИМАТ СМБ, София, 2018
2. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
3. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
4. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средљошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2012
5. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012
6. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019