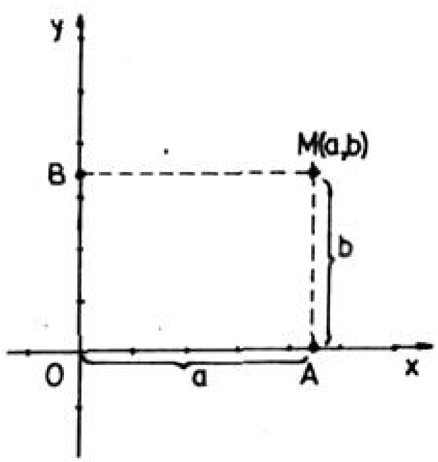
Мр Мирјана Ђорић

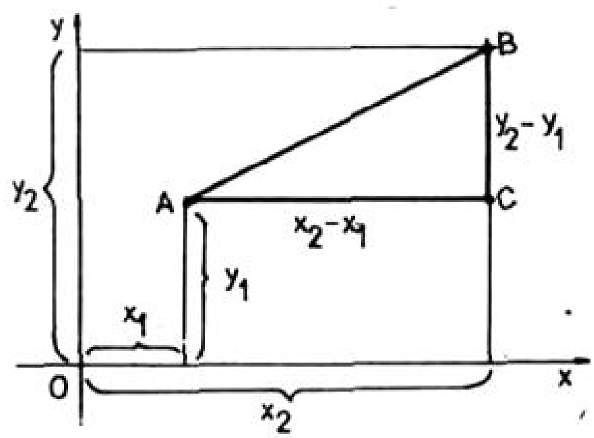
# РЕШАВАЊЕ ПЛАНИМЕТРИЈСКИХ ЗАДАТАКА ПОМОЋУ ДЕКАРТОВИХ ПРАВОУГЛИХ КООРДИНАТА

Познато нам је да се помоћу Декартовог правоуглог координатног система може одредити положај сваке тачке у равни у којој се налази. У овом чланку ћемо показати како се то (погодним избором координатног система) може искористити за решавање неких планиметријских задатака.

Декартов правоугли координатни систем бирамо на следећи начин. Прво изаберемо две узајамно нормалне праве (координатне осе), чији пресек називамо координатни почетак. Затим на свакој оси изаберемо позитиван смер и јединицу дужине. Тада је положај сваке тачке $M$ једнозначно одређен двема координатама: апсцисом $a = |BM| = |OA|$ и ординатом $b = |AM| = |OB|$, сл. 1, при чему су $A$ и $B$ подножја нормала из тачке $M$ на осе $Ox$ и $Oy$.




Сл. 1




Сл. 2

Нека су дате две тачке својим координатама: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, сл. 2. Праве које садрже тачке $A$ и $B$ и паралелне су осама $Ox$ и $Oy$ секу се у тачки $C$. Како је добијени троугао $ABC$ правоугли, користећи Питагорину теорему добијамо врло корисну формулу за растојање две тачке у равни:

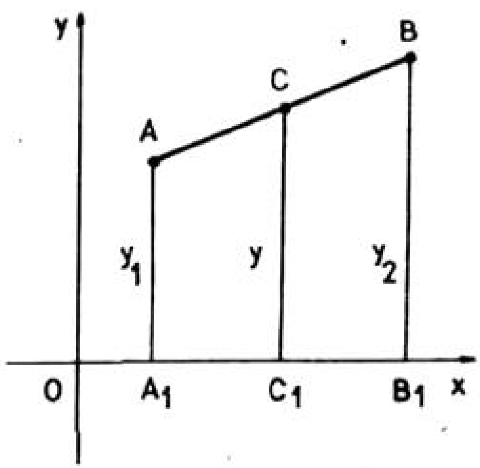
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

Не мање корисна је и формула за одређивање координата средишта дужи. Размотримо две произвољне тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и одредимо координате $x$ и $y$ тачке $C(x, y)$ која је средиште дужи $AB$. Означимо са $A_1$, $C_1$, $B_1$ подножја нормала конструисаних редом из тачака $A$, $C$, $B$ на осу $Ox$, сл. 3. Како је $CC_1$ средња линија трапеза $A_1B_1BA$ и $|AA_1| = y_1$, $|BB_1| = y_2$, то је

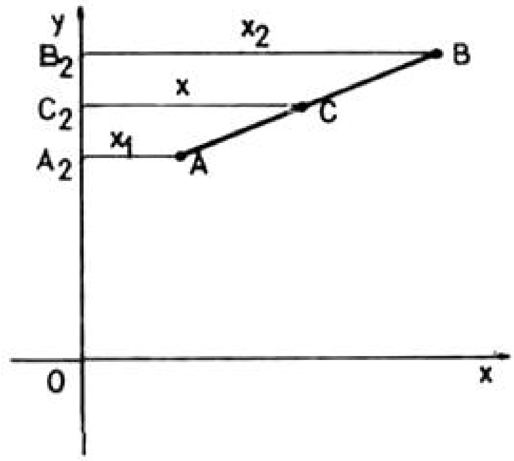
$$y = |CC_1| = \frac{|AA_1| + |BB_1|}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2}$$

Слично конструишући из тачака $A$, $C$, $B$ нормале на осу $Oy$, сл. 4 и расуђујући на исти начин, добијамо

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3}$$




Сл. 3




Сл. 4

На сликама 2, 3, 4 координате тачака $A$ и $B$ су позитивне (тј. тачке се налазе у првом квадранту). Међутим, наведени поступак се може применити на било које две тачке у равни $Oxy$, па и формуле (1), (2), (3) важе за произвољне тачке.

Решимо неколико задатака користећи изведене формуле.

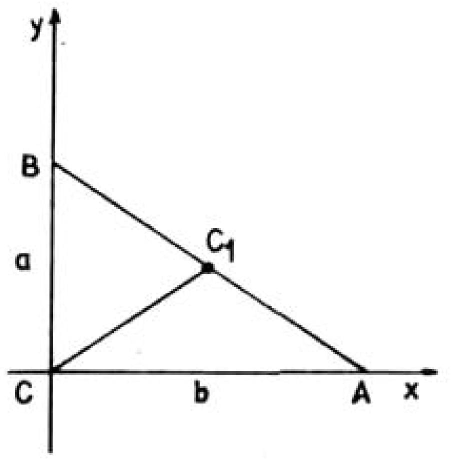
Пример 1. У правоуглом троуглу хипотенузина тежишна линија једнака је половини хипотенузе. Доказати.

Нека је дат правоугли троугао $ABC$ са правим углом код темена $C$ и катетама дужине $a$ и $b$. Изаберимо координатни систем чије су осе одређене катетама овог троугла, сл. 5. Тада су координате темена $A(b,0)$, $B(0,a)$, $C(0,0)$, а на основу формула (2) и (3) добијамо и координате средишта хипотенузе $C_1\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$. Уз помоћ формуле (1) лако израчунавамо

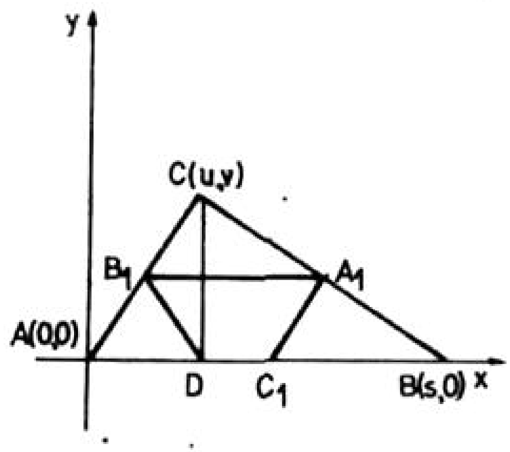
$$|C_1A| = \sqrt{\left(b-\frac{b}{2}\right)^2+\left(0-\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

$$|CC_1| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a}{2}-0\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

одакле следи $|C_1A| = |CC_1|$, што је и требало доказати.




Сл. 5




Сл. 6

Пример 2. Доказати да су средишта страница произвољног троугла и подножје висине темена једнакокраког трапеза.

Уочимо правоугли Декартов координатни систем чији је почетак теме $A$, а оса $Ox$ је одређена страницом $AB$, сл. 6. Тада темена троугла имају координате $A(0,0)$, $B(s,0)$, $C(u,v)$. Користећи формуле (2) и (3) добијамо средишта страница:

$$A_1\left(\frac{u+s}{2},\frac{v}{2}\right),\quad B_1\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right),\quad C_1\left(\frac{s}{2},0\right).$$

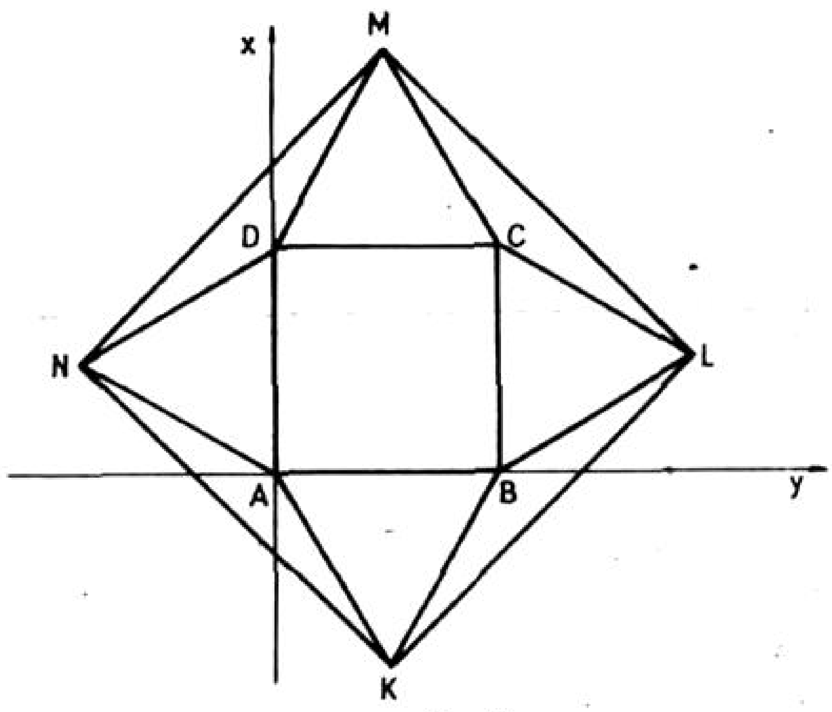
Из услова да је $A_1B_1$ средња линија троугла $ABC$ добијамо $A_1B_1 \parallel AB$, тј. четвороугао $A_1B_1DC_1$ је трапез (при чему је тачка $D$ подножје висине из темена $C$). Тачка $D$ има координате $D(u, 0)$. Да бисмо још доказали да је трапез једнакокраки, довољно је да докажемо да је $|B_1D| = |A_1C_1|$. Заиста, користећи формулу (1) добијамо:

$$|B_1D| = \sqrt{\left(u - \frac{u}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{v}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2},$$

$$|A_1C_1| = \sqrt{\left(\frac{s}{2} - \frac{u + s}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{v}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2}.$$

Приметимо да смо до чињенице да је четвороугао $A_1B_1DC_1$ трапез могли доћи закључујући да праве одређене страницама $A_1B_1$ и $C_1D$ имају једначине $y = 0$ и $y = \frac{v}{2}$, тј. паралелне су, јер имају исти коефицијент правца $k = 0$.

Пример 3. Над страницама квадрата, ван њега, конструисани су једнакостранични троуглови. Доказати да темена ових троуглова (која нису темена квадрата), такође образују квадрат.




Сл. 7

Изаберимо Декартов правоугли координатни систем чији је почетак теме $A$ квадрата $ABCD$, а координатне осе су одређене страницама $AB$ и $AD$. Нека је дужина странице квадрата једнака $a$. Користећи чињеницу да је висина једнакостраничног троугла чија је страница једнака $a$ дата са $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, лако одређујемо координате темена квадрата и троуглова, сл. 7:

$$A(0,0), \quad B(a,0), \quad C(a,a), \quad D(0,a), \quad K\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\sqrt{3}\right),$$
$$L\left(a+\frac{a}{2}\sqrt{3}, \frac{a}{2}\right), \quad M\left(\frac{a}{2}, a+\frac{a}{2}\sqrt{3}\right), \quad N\left(-\frac{a}{2}\sqrt{3}, \frac{a}{2}\right).$$

Применом формуле (1) добијамо:

$$|ML| = \sqrt{\left(a+\frac{a}{2}\sqrt{3}-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}-a-\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2},$$
$$|KL| = \sqrt{\left(a+\frac{a}{2}\sqrt{3}-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2},$$

тј. $|ML| = |KL|$. Како је још и $|KM| = a + 2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = a(1+\sqrt{3})$, следи да је $|KM|^2 = |ML|^2 + |KL|^2$, тј. $ML \perp KL$. Слично се доказује да су и остале суседне странице четвороугла $KLMN$ једнаке и међусобно нормалне, тј. овај четвороугао је квадрат.

## Задаци

**1.** Урадити примере из чланка без коришћења координата.

**2.** Дат је оштроугли троугао $ABC$, код кога су страница $AB$ и њој одговарајућа висина једнаке датој дужи $c$. У тај троугао уписан је правоугаоник чија два темена припадају страници $AB$. Одредити обим тог правоугаоника.

**3.** Дат је једнакостранични троугао $ABC$. На правој $AB$ дата је тачка $C_1$, таква да је $AB = BC_1$ и да је тачка $B$ између тачака $A$ и $C_1$; на правој $BC$ дата је тачка $A_1$, таква да је $BC = CA_1$ и да је тачка $C$ између тачака $B$ и $A_1$; на правој $CA$ дата је тачка $B_1$, таква да је $CA = AB_1$ и да је тачка $A$ између тачака $C$ и $B_1$. Доказати да је троугао $A_1B_1C_1$ једнакостраничан. (Тврђење важи и ако су дужи $BC_1$, $CA_1$ и $AB_1$ подударне, али не обавезно једнаке страници троугла $ABC$.)

**Мр Мирјана Ђорић (Београд)**

# РЕШАВАЊЕ ПЛАНИМЕТРИЈСКИХ ЗАДАТАКА ПОМОЋУ ДЕКАРТОВИХ ПРАВОУГЛИХ КООРДИНАТА

**— други део —**

У првом делу овог чланка (види МЛ XXVI-5) користили смо само две формуле:

— за растојање двеју тачака $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{1}$$

— за одређивање координата средишта $C(x, y)$ дужи $AB$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2}$$

Употпунимо мало наше знање користећи чињеницу да две разне тачке потпуно одређују једну праву и испитујући узајамни однос две праве.

Нека је дат Декартов правоугли координатни систем $Oxy$. Представљајући график линеарне функције $y = kx + n$ ($k$ и $n$ су реални бројеви), дошли смо до закључка (на редовној настави) да је то права линија. При томе, ова права пресеца осу $Oy$ у тачки $(0, n)$, а број $k$ назива се коефицијент правца праве $y = kx + n$. Кроз касније школовање ћемо научити нешто више о коефицијенту $k$, а сада наведимо само две важне чињенице:

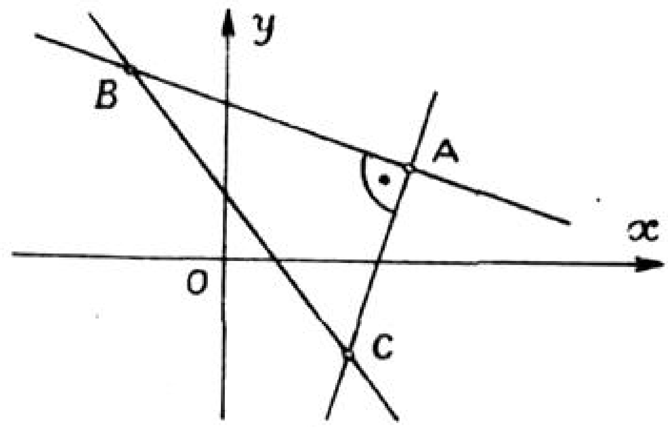
— прво, у VII разреду смо показали (али не и доказали!) *да су праве* $y = k_1x + n_1$ *и* $y = k_2x + n_2$ *паралелне ако су им коефицијенти правца једнаки и обрнуто, коефицијенти правца паралелних правих су међусобно једнаки;*

— друго, *праве* $y = k_1x + n_1$ *и* $y = k_2x + n_2$ *су нормалне ако је* $k_1k_2 = -1$ *и обрнуто, производ коефицијената правца двеју нормалних правих (од којих ниједна није паралелна некој координатној оси) једнак је* $-1$.

Покажимо на примеру да је производ коефицијената правца нормалних правих једнак $-1$. У правоуглом Декартовом координатном систему $Oxy$ уочимо тачке $A(6,3)$, $B(-3,6)$, $C(4,-3)$, сл. 1. Користећи формулу (1) налазимо да је

$$|AB| = \sqrt{90}, \quad |AC| = \sqrt{40}, \quad |BC| = \sqrt{130}.$$

Према томе, важи једнакост $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, па на основу Питагорине теореме следи да је троугао $ABC$ правоугли.




Сл. 1

Даље, нека темена $A$ и $B$ одређују праву $y = k_1x + n_1$. Како координате тачака $A$ и $B$ задовољавају ову једначину, добијамо систем од две линеарне једначине по непознатим $k_1$ и $n_1$:

$$\begin{aligned} 3 &= \phantom{-}6k_1 + n_1, \\ 6 &= -3k_1 + n_1. \end{aligned}$$

Решавањем овог система добијамо $k_1 = -\frac{1}{3}$, $n_1 = 5$, тј. права одређена катетом $AB$ има једначину $y = -\frac{1}{3}x + 5$. Поступајући на сличан начин са тачкама $A$ и $C$ добијамо $k_2 = 3$, $n_2 = -15$, тј. права одређена катетом $AC$ има једначину $y = 3x - 15$ и заиста важи

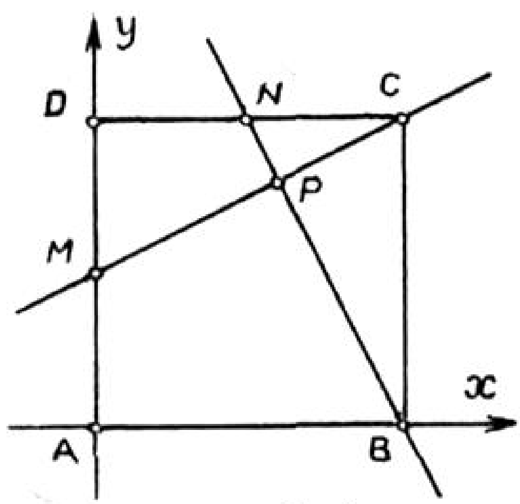
$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{3}$$

Искористимо наведене чињенице при решавању неколико планиметријских проблема.

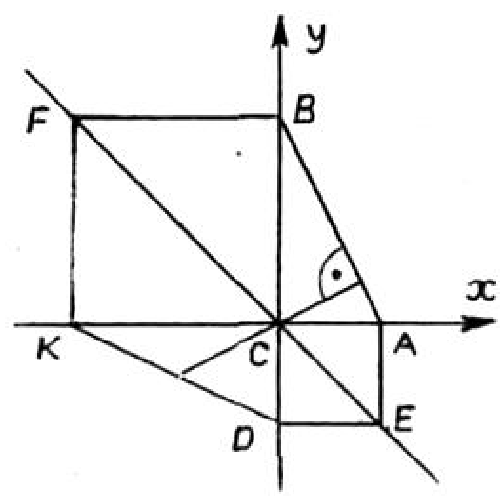
Пример 1. Нека су $M$ и $N$ средишта страница $AD$ и $CD$ квадрата $ABCD$. Дужи $BM$ и $CM$ секу се у тачки $P$, сл. 2. Доказати да су ове дужи нормалне и да је дуж $PA$ једнака страници квадрата.

Нека је теме $A$ почетак Декартовог правоуглог координатног система чије су осе одређене страницама $AB$ и $AD$ квадрата $ABCD$. Ако је страница квадрата дужине $a$, темена имају координате $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$, $D(0,a)$, док средишта страница $AD$ и $CD$ имају редом координате $M\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ и $N\left(\dfrac{a}{2},a\right)$.

Поступајући на сличан начин као на почетку чланка (тј. решавајући систем по $k$ и $n$), добијамо да права одређена тачкама $C$ и $M$ има једначину $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{2}$, а једначина праве $BN$ је $y=-2x+2a$. Дакле, ове две праве су нормалне $\left(-2\cdot\dfrac{1}{2}=-1\right)$. Решавајући систем састављен од последње две једначине добијамо координате пресечне тачке ових правих: $P\left(\dfrac{3a}{5},\dfrac{4a}{5}\right)$. Користећи формулу (1) добијамо да је $|AP|=a$, што је и требало доказати.




Сл. 2



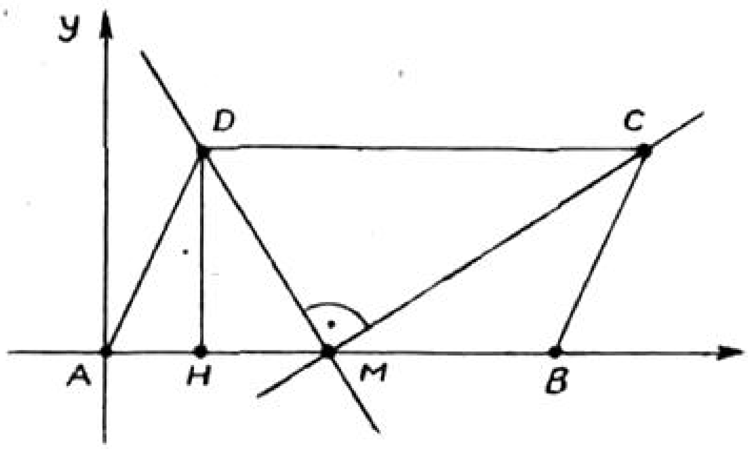

Сл. 3

Пример 2. Дат је правоугли троугао $ABC$. Над катетама $AC$ и $BC$, ван троугла, конструисане су тачке $D$, $E$, $F$ и $K$, такве да су четвороуглови $CDEA$ и $CBFK$ квадрати. Доказати да су тачке $C$, $E$, $F$ колинеарне (тј. припадају једној правој) и да права која садржи хипотенузину висину полови дуж $DK$.

Уочимо правоугли Декартов координатни систем чији је почетак теме $C$, а осе су одређене катетама $AC$ и $BC$ (чије су дужине редом једнаке $b$ и $a$). Тада, за координате темена троугла и квадрата добијамо ове вредности: $A(b,0)$, $B(0,a)$, $C(0,0)$, $D(0,-b)$, $E(b,-b)$,

$F(-a,a)$, $K(-a,0)$, сл. 3. Права одређена тачкама $C$ и $F$ пресеца осу $Cy$ у тачки $C(0,0)$, па је $n=0$ и права $CF$ има једначину $y=kx$. Како тачка $F$ припада овој правој, њене координате задовољавају горњу једначину, тј. $-a=k\cdot a$, па следи да права $CF$ има једначину $y=-x$. Очигледно је да и координате тачке $E$ задовољавају ову једначину, тј. тачке $C$, $E$, $F$ су колинеарне. Даље, рачунајући на сличан начин, добијамо да је једначина хипотенузе $AB$: $y=-\frac{b}{a}x+b$, а за хипотенузину висину $CC_1$ (користећи услов нормалности (3)) добијамо једначину $y=\frac{a}{b}x$. Користећи формуле (2) добијамо координате средишта дужи $DK$: $G\left(-\frac{b}{2},-\frac{a}{2}\right)$. Како координате тачке $G$ задовољавају једначину хипотенузине висине $CC_1$, то тачка $G$ припада тој висини.

Пример 3. Страница $AB$ паралелограма $ABCD$ два пута је дужа од странице $BC$. Ако је тачка $M$ средиште странице $AB$, доказати да су дужи $CM$ и $DM$ нормалне.




Сл. 4

Уведимо Декартов правоугли координатни систем тако да је теме $A$ почетак, да тачка $B$ припада $x$-оси, а да тачке $C$ и $D$ имају позитивне $y$-координате, сл. 4. Тада темена паралелограма $ABCD$ имају координате $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(c+a,h)$, $D(c,h)$, при чему је $|AB|=a$, $|AD|=b$ и $h^2+c^2=b^2=\frac{a^2}{4}$ (јер је троугао $AHD$ правоугли и $a=2b$). Координате средишта $M$ странице $AM$ су $M\left(\frac{a}{2},0\right)$. Тада права $MC$ има једначину $y = \frac{2h}{2c+a}x - \frac{ah}{2c+a}$, док права $MD$ има једначину $y = \frac{2h}{2c-a}x - \frac{ah}{2c-a}$. Како је

$$\frac{2h}{2c+a} \cdot \frac{2h}{2c-a} = \frac{4h^2}{4c^2-a^2} = -1,$$

то следи да су праве $MC$ и $MD$ међусобно нормалне.

**Задаци**

**1.** Урадити примере из чланка без коришћења координата.

**2.** У правоуглом троуглу $ABC$ (са правим углом код темена $C$) конструисана је висина $CD$. Тачка $M$ је средиште дужи $CD$, а тачка $N$ средиште дужи $BD$. Доказати да је права $AM$ нормална на правој $CN$.

**3.** Две узајамно нормалне праве секу странице $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ квадрата $ABCD$ редом у тачкама $E$, $F$, $K$, $L$. Доказати да је $EK = FL$.

**4.** У квадрату $ABCD$ означено је са $E$ средиште странице $CD$ и са $F$ подножје нормале из темена $B$ на дуж $AE$. Доказати да странице троугла $EFB$ стоје у односу $3 : 4 : 5$.

**Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија**