Jedno svojstvo logaritamske funkcije i njegova primjena

Petar Vranjković, Zadar

U ovom će članku biti govora o jednom manje poznatom svojstvu logaritamske funkcije i njegvoj učinkovitoj primjeni na rješavanje nekih logaritamskih nejednadžbi. To su one u kojima su baza logaritamske funkcije i njezin argument funkcije iste varijable. Znamo da se takve nejednadžbe rješavaju metodom razlikovanja slučajeva. Pokazat ćemo da se primjenom tog svojstva spomenute nejednadžbe rješavaju znatno lakše i jednostavnije.

Pođimo od definicije logaritamske funkcije. Funkcija $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ određena formulom

$$f(x) = \log_b x$$

je definirana za $b > 0$ i $b \neq 1$.

Primjer 1. Riješimo nejednadžbu

$$\log_{1+x}(2x-6) \geq 0 \quad x \in \mathbf{R}.$$

Rješenje. Ovu nejednadžbu ćemo riješiti metodom razlikovanja slučajeva.

$$
\begin{array}{llll}
1^\circ & 0 < 1 + x < 1 & 2^\circ & 1 + x > 1 \\
 & 2x - 6 > 0 & & 2x - 6 > 0 \\
 & 1 + x \neq 1 & & 1 + x \neq 1 \\
 & 2x - 6 \leq 1 & & 2x - 6 \geq 1 \\
 & x \in \emptyset & & x \geq \dfrac{7}{2}
\end{array}
$$

Prema tome, rješenje zadane nejednadžbe je $x \geq \dfrac{7}{2}$.

No, uočimo sljedeće nejednadžbe (ostale su u 1° i 2°):

$$
\begin{array}{ll}
1 + x < 1 & 1 + x > 1 \\
2x - 6 > 0 & 2x - 6 > 0 \\[6pt]
1 + x - 1 < 0 & 1 + x - 1 > 0 \\
2x - 6 - 1 \leq 0 & 2x - 6 - 1 \geq 0 \\[6pt]
(1 + x - 1)(2x - 6 - 1) \geq 0 & (1 + x - 1)(2x - 6 - 1) \geq 0.
\end{array}
$$

Dakle, u oba slučaja su umnošci istog predznaka. Na tom tragu se pojavila ideja o "novom" svojstvu logaritamske funkcije.

Poučak. Neka je $a > 0$, $a \neq 1$ i $b > 0$. (1)

Tada vrijedi

$$\log_a b \leq 0 \iff (a-1)(b-1) \leq 0 \quad \text{ili} \quad \log_a b \geqslant 0 \iff (a-1)(b-1) \geq 0 \quad (2)$$

Dokaz. Provedimo dokaz za slučaj $\log_a b \leq 0$.

Ako a i b zadovoljavaju (1) onda imamo:

$$\log_a b \leq 0 \iff ((0 < a < 1 \wedge b \geq 1) \vee (a > 1 \wedge 0 < b \leq 1))$$

$$\iff ((a-1<0 \wedge b-1 \geq 0) \vee (a-1>0 \wedge b-1 \leq 0))$$
$$\iff (a-1)(b-1) \leq 0.$$

Analogno se dokazuje ekvivalentnost nejedankosti

$$\log_a b \geq 0 \iff (a-1)(b-1) \geq 0.$$

Vratimo se sada primjeru 1 i riješimo ga pomoću ovog poučka. Prema (1) imamo

$$1+x>0, \quad 2x-6>0, \quad 1+x \neq 1.$$

Rješenje ovog sustava je $x>3$. (3)

Prema (2) imamo

$$(1+x-1)(2x-6-1) \geq 0,$$

odnosno $x(2x-7) \geq 0$ tj. $2x^2-7x \geq 0$.

Rješenje ove kvadratne nejednadžbe je $x \leq 0$ ili $x \geq \frac{7}{2}$, a zbog (3), konačno rješenje je $x \geq \frac{7}{2}$.

U slučaju kada je ili baza ili argument logaritamske funkcije konstanta, onda je postupak brži i lakši. Evo jednog primjera.

Primjer 2. Riješimo nejednadžbu

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+1) < 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Rješenje. Prema (1) je $4x+1>0$, pa je $x>-\frac{1}{4}$, a prema (2) imamo

$$\left(\frac{1}{3}-1\right)(4x+1-1) < 0,$$

odnosno $x>0$. Konačno rješenje je $x>0$.

Zadatak 1. Ako je $a>0$, $b>0$, $c>0$ i $a \neq 1$, onda vrijedi

$$\log_a b \geq \log_a c \iff (a-1)(b-c) \geq 0 \qquad (4)$$
$$\log_a b \leq \log_a c \iff (a-1)(b-c) \leq 0 \qquad (4^*)$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati prvu tvrdnju.

$$\log_a b \geq \log_a c \iff \log_a b - \log_a c \geq 0$$
$$\iff \log_a \frac{b}{c} \geq 0 \iff (a-1)\left(\frac{b}{c}-1\right) \geq 0 \iff (a-1)(b-c) \geq 0.$$

Pri čemu je korišteno (2).

Evo jednog primjera.

Primjer 3. Nađimo rješenje nejednadžbe

$$\log_{2x}(4x-1) \geq 2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Rješenje. Domenu rješenja ćemo dobiti rješavanjem sustava

$$2x>0, \quad 2x \neq 1, \quad 4x-1>0.$$

Dobijemo

$$x \in \left\langle \frac{1}{4}, +\infty \right\rangle, \quad x \neq \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Zadanu nejednadžbu ćemo transformirati tako da možemo primijeniti nejednakost (4). Dobijemo

$$(2x-1)(4x-1-(2x)^2) \geq 0,$$

odnosno, nakon sređivanja $(2x-1)^3 \leq 0$.

Odavde imamo $2x-1 \leq 0$, tj. $x \leq \frac{1}{2}$. Uzimajući u obzir domenu rješenja, konačno rješenje je $x \in \left\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Primjer 4. Riješimo nejednadžbu

$$\log_{|x|} \sqrt{x^2-9} \geq 1. \tag{6}$$

Rješenje. Odredimo domenu rješenja:

$$x \neq -1, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1, \quad x^2-9>0.$$

Ovi uvjeti su zadovoljeni za

$$x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle. \tag{7}$$

Nadalje, (6) možemo zapisati

$$\log_{|x|} \sqrt{x^2-9} \geq \log_{|x|} |x|.$$

Prema (4) imamo

$$(|x|-1)(\sqrt{x^2-9}-|x|) \geq 0. \tag{8}$$

Dalje, možemo rješavati na standardni način, ali ovdje ćemo koristiti drugu metodu.

U domeni rješenja sigurno vrijedi

$$\sqrt{x^2-9}+|x| \geq 0. \tag{9}$$

Pomnožimo li (8) s (9), dobivamo

$$(|x|-1)(x^2-9-x^2) \geq 0 \qquad \text{tj.} \qquad |x|-1 \leq 0.$$

Rješenje ove nejednadžbe je $-1 \leq x \leq 1$, a iz (7) imamo konačno rješenje $x \in \emptyset$, tj. nijedan realan broj x ne zadovoljava danu nejednadžbu.

Zadatak 2. Neka je

$$a>0, \quad b>0, \quad c>0, \quad d>0, \quad a \neq 1, \quad c \neq 1. \tag{10}$$

Tada je

1° $\quad \log_a b \cdot \log_c d \leq 0 \iff (a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \leq 0$ ili (11)

$\quad \log_a b \cdot \log_c d \geq 0 \iff (a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \geq 0$ (11∗)

2° $\quad \dfrac{\log_a b}{\log_c d} \leq 0 \iff (a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \leq 0, \quad d \neq 1$ ili (12)

$\quad \dfrac{\log_a b}{\log_c d} \geq 0 \iff (a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \geq 0, \quad d \neq 1$ (12∗)

Primjer 5. Riješimo nejednadžbu
$$\log_x(1-x)\cdot\log_{2-x}(2x)\geq 0,\quad x\in\mathbf{R}. \tag{13}$$

Rješenje. Prema (10) i (13) dobivamo
$$x>0,\quad x\neq 1,\quad 1-x>0,\quad 2-x>0,\quad 2-x\neq 1,\quad 2x>0.$$
Ovi uvjeti su zadovoljeni za
$$x\in\langle 0,1\rangle\,. \tag{14}$$
Primjenom (11) nejednadžba (13) je ekvivalentna sljedećoj
$$(x-1)(1-x-1)(2-x-1)(2x-1)\geq 0, \tag{15}$$
tj.
$$x(1-x)^2(2x-1)\geq 0. \tag{16}$$
Kako je $(1-x)^2>0$ za sve $x\in\langle 0,1\rangle$, (16) je ekvivalentno s nejednadžbom
$$x(2x-1)\geq 0,$$
čije je rješenje $x\in\langle -\infty,0]\cup\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right\rangle$, pa iz (14) dobivamo konačno rješenje $x\in\left[\frac{1}{2},1\right\rangle$.

Zadaci za vježbu

1. $\log_2(4x)>1$, *Rj.* $x>0$.

2. $\log_{3x}(4x-1)\geq\log_{3x}(9x^2-1)$, *Rj.* $x\in\left\langle\frac{1}{3},\frac{4}{9}\right\rangle$.

3. $\log_x 2\cdot\log_2(4x)>1$, *Rj.* $x>1$.

4. $\log_{2x+4}x^2<2$, *Rj.* $x\in\left\langle-\frac{3}{2},-\frac{4}{3}\right\rangle$.

5. $\log_{x+1}\dfrac{|x|-2}{|x|+3}<0$, *Rj.* $x>2$.

6. $\log_{\frac{1}{x}}\dfrac{x}{2}+\log_x\dfrac{x}{4}>0$, *Rj.* $x\in\langle 0,1\rangle$.

7. $\log_{\frac{3+x}{1-x}}\left(\dfrac{1+x}{2-x}\right)>0$, *Rj.* $x\in\left\langle\frac{1}{2},1\right\rangle$.

8. $\log_{\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x}\cos x\leq 0$, *Rj.* nema rješenja.

9. $\log_{\sin x}4\cdot\log_{\sin^2 x}2>0$, *Rj.* $k\pi<x<\pi+k\pi,\quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

10. $\dfrac{\log_{2+x}(1+x)}{\log_{1+x}x}\geq 0$, *Rj.* $x>1$.