Катерина Аневска, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

ПРИМЕНА НА ЦЕНТРАЛНАТА РОТАЦИЈА ВО РАМНИНАТА

Во оваа статија ќе се осврнеме на примената на ротацијата во решавање на неколку олимписки задачи. Притоа ќе сметаме дека читателот е запознаен со ротацијата и нејзините својства, па затоа истите нема детално да ги презентираме. Овде ќе напомниме дека читателите кои ги немаат потребните знаења за ротацијата и воопшто за движењата и сличностите, како и за нивните класификации потребно е да консултираат соодветна литература. За таа цел им препорачуваме да ги консултираат книгите [1], [2] и [3].

Да се потсетима на дефиницијата на ротацијата и нејзините својства.

Дефиниција. Нека O е точка во рамнината Π и $\alpha \neq 0^\circ, 360^\circ$ насочен агол. Пресликувањето $\rho_{O,\alpha} : \Pi \to \Pi$ определено со $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ и $\rho_{O,\alpha}(A) = A'$ ако и само ако $\measuredangle \overrightarrow{AOA'} = \alpha$ и $\overline{OA} = \overline{OA'}$ го нарекуваме *ротација (централна) за агол* α *со центар во точката* O.

За ротацијата се исполнети следните својства:

1) Единствена фиксна точка на ротацијата е центарот на ротација.
2) Две централни ротации $\rho_{O,\alpha}$ и $\rho_{O',\alpha'}$ се се еднакви ако и само ако $O \equiv O'$ и $\alpha = \alpha'$.
3) При секоја ротација $\rho_{O,\alpha}$ отсечка AB се пресликува во отсечка $A'B'$ таква што триаголниците OAB и $OA'B'$ се складни.
4) Слика на права p при ротација е права p' и притоа аголот меѓу правите p и p' е еднаков на аголот на ротација.
5) Сликата на агол при ротација е агол, еднаков со него.
6) Слика на многуаголник при ротација $\rho_{O,\alpha}$ е многуаголник складен на дадениот.
7) Слика на кружница $k(S,r)$ при ротација $\rho_{O,\alpha}$ е кружница $k'(S',r)$ таква, што $\rho_{O,\alpha}(S) = S'$. Притоа, ако $S \equiv O$, тогаш $\rho_{O,\alpha}(k) = k$.
8) Ако дирактната изометриска трансформација $\Im$ во рамнината има единствена фиксна точка, тогаш таа е централна симетрија.
9) Множеството $\Re_O$ кое се состои од идентичната трансформација (пресликување) и сите централни ротации на рамнината, кои имаат заеднички центар O е комутативна група.

10) Композицијата на двете осни симетрии со оски на симетрии p и q кои се сечат во точката O и $\measuredangle\overrightarrow{pOq}=\frac{\alpha}{2}$ е ротацијата $\rho_{O,\alpha}$.

11) Секоја ротација $\rho_{O,\alpha}$ може да се претстави како композиција на произволни осни симетрии чии оски p и q кои се сечат во точката O и $\measuredangle\overrightarrow{pOq}=\frac{\alpha}{2}$.

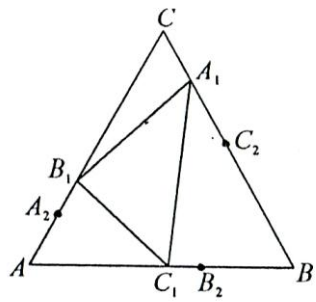
12) Нека $\rho_{A,\alpha}$ и $\rho_{B,\beta}$ се две ротации во иста рамнина, такви што $\alpha+\beta\neq 0^\circ$ и $\alpha+\beta\neq\pm 360^\circ$. Тогаш композицијата $\rho_{B,\beta}\circ\rho_{A,\alpha}$ е ротација за агол $\alpha+\beta$ со центар O каде $\measuredangle\overrightarrow{OAB}=\frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle\overrightarrow{ABO}=\frac{\beta}{2}$.

13) Ако $\rho_{O,\alpha}$ е щцентрална ротација и s_p е осна симетрија со оска на симетрија p која ја содржи точката O, тогаш композициите $\rho_{O,\alpha}\circ s_p$ и $s_p\circ\rho_{O,\alpha}$ се осни симетрии.

Сега ќе преминеме на разгледување на споменатите олимписки задачи.

1. На страните AB, BC, CA на рамностраниот $\triangle ABC$ соодветно се земени точки C_1, A_1, B_1 така што радиусите на кружниците впишани во триаголниците $C_1AB_1, B_1CA_1, A_1BC_1$ и $A_1B_1C_1$ се еднакви. Докажи дека точките C_1, A_1, B_1 се средини на соодветните страни.

Решение. Ќе докажеме дека $\overline{BA_1}=\overline{CB_1}=\overline{AC_1}$.



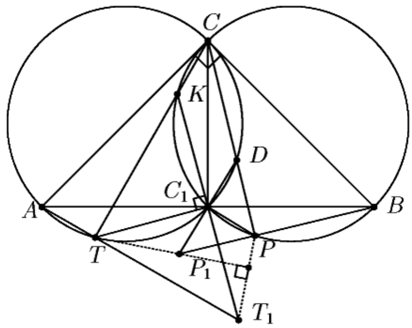
Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{BA_1}>\overline{CB_1}>\overline{AC_1}$ (ако во едно од неравенствата важи знак за равенство, тогаш разгледувањата се аналогни). Нека ρ е ротација за 120° со центар на ротација центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. При оваа ротација впишаните кружници во триаголниците C_1BA_1, A_1CB_1, B_1AC_1 се пресликуваат во впишаните кружници во триаголниците $A_1CB_1, B_1AC_1, C_1BA_1$. Нека $A_2=\rho(A_1), B_2=\rho(B_1)$ и $C_2=\rho(C_1)$. Од горните неравенства следува дека $\overline{BB_2}<\overline{BC_1}$ и $\overline{BC_2}<\overline{BA_1}$. Но, B_2C_2 е тангента на впишната кружница во $\triangle C_1BA_1$ (бидејќи е слика при ρ на впишаната кружница во $\triangle B_1AC_1$) што е противречност.

Со r да го означиме радиусот на впишаните кружници во триаголниците $C_1AB_1, B_1CA_1, A_1BC_1$ и $A_1B_1C_1$. Од триаголникот C_1AB_1 имаме $r=\frac{1-\overline{B_1C_1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$, а од триаголникот $A_1B_1C_1$ (кој е рамностран) имаме $r=\frac{\overline{B_1C_1}\sqrt{3}}{6}$. Оттука наоѓаме $\overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}$, што значи дека точките A_1, B_1, C_1 се средини на соодветните страни.

2. Даден е рамнокрак правоаголен $\triangle ABC, \measuredangle C=90^\circ$, со висина CC_1, $C_1\in AB$. Кружницата k_1 е опишана околу $\triangle ACC_1$, а кружницата k_2 е опишана околу $\triangle BCC_1$. Точката D е внатрешна за малиот лак CC_1 од k_1, а точката K е внатрешна за малиот лак CC_1 од k_2. Правата CK по втор пат ја сече k_1 во точката T, а правата CD по втор пат ја сече k_2 во точката P. Правите DC_1 и BP се сечат во точката P_1, а правите KC_1 и AT се сечат во точката T_1. Докажи дека $TP_1 \perp PT_1$.

Решение. Имаме $\measuredangle T_1TC_1=\measuredangle C_1CA=45^\circ$ и $\measuredangle C_1KT=\measuredangle C_1BC=45^\circ$. Според тоа, $\triangle C_1KT$ е рамнокрак правоаголен. Аналогно се докажува дека $\triangle C_1DP$ и $\triangle PP_1C_1$ се рамнокраки правоални триаголници.

Да разгледаме ротација ρ со центар C_1 и агол 90° во насока на движењето на стрелките на часовникот. Од погоре докажаното следува дека $\rho(P)=P_1$ и $\rho(T)=T$. Според тоа, $\rho(PT_1)=P_1T$ и од својствата на ротацијата следува дека $TP_1 \perp PT_1$., што и требаше да се докаже.



3. Точката M припаѓа на внатрешноста на конвексниот четириаголник $ABCD$ и е таква што триаголниците AMB и CMD се рамнокраки со агли при темето M еднакви на 120°. Докажи дека постои точка N таква што триаголниците BNC и DNA се рамнострани.

Решение. *Прв начин*. Нека дијагоналите AC и BD се сечат во точката E. Со ротација околу M за 120°, триаголникот AMC се пресликува во триаголникот BMD, па затоа $\overline{AC}=\overline{BD}$ и $\measuredangle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})=\measuredangle AEB=120^\circ$, т.е. $\measuredangle AED=60^\circ$ (направи цртеж).

Нека N е точка на кружницата AED таква што $\triangle AND$ е рамностран. Од $\overline{AC}=\overline{BD}$ и $\measuredangle NAC=\measuredangle NDB$ следува дека триаголниците ANC и DNB се складни, па затоа $\overline{NB}=\overline{NC}$ и $\measuredangle NCA=\measuredangle NBD$, од каде што следува дека точките B, C, N, E се конциклични и $\measuredangle BNC = \measuredangle BEC = 60^\circ$, па затоа триаголникот BNC е рамностран.

Втор начин. Да конструираме рамнострани триаголници AND и $BN'C$ кон внатрешноста на четириаголникот. Пресликувањето $I = \rho_{M,120^\circ} \circ \rho_{N,60^\circ}$ е изометрија има агол на ротација од 180° и ја пресликува точката A преку точката D во точката C, па затоа тоа е централна симетрија во однос на средината K на отсечката AC. Слично, пресликувањето $I' = \rho_{M,120^\circ} \circ \rho_{N',60^\circ}$ е централна симетрија во однос на K (ја пресликува C преку B во A). Оттука следува дека $N' \equiv N$.

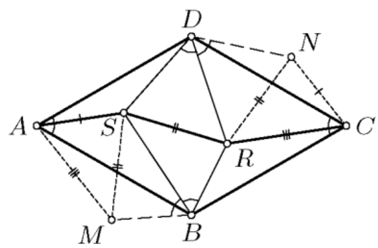
4. Даден е ромб $ABCD, \measuredangle BAD = 60^\circ$. Точките S и R соодветно лежат во внатрешноста на триаголниците ABD и DBC и важи $\measuredangle SBR = \measuredangle RDS = 60^\circ$. Докажи дека

$$\overline{SR}^2 = \overline{AS} \cdot \overline{CR}.$$

Решение. Нека M и N се редоследно симетричните точки на точките R и S во однос на правите BS и DR. Тогаш

$$\measuredangle RBM = 2\measuredangle RBS = 120^\circ \text{ и } \overline{BR} = \overline{BM},$$

па затоа триаголникот BMA е слика на триаголникот BRC при ротација за 120°. Според тоа, $\overline{AM} = \overline{CR}$. Слично, $\overline{CN} = \overline{AS}$,



а исто така и $\overline{MS} = \overline{RS} = \overline{RN}$, па затоа триаголниците ASM и CNR се складни. Значи, $\measuredangle MAS = \measuredangle NCR$. Од друга страна,

$$\measuredangle MAS = 60^\circ + \measuredangle BAM - \measuredangle DAS = 60^\circ + \measuredangle BCR - \measuredangle DAS$$

и аналогно $\measuredangle NCR = 60^\circ - \measuredangle BCR + \measuredangle DAS$. Оттука следува $\measuredangle BCR = \measuredangle DAS$, т.е. $\measuredangle MAS = 60^\circ$. Сега, од косинусната теорема следува

$$\overline{SR}^2 = \overline{SM}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{AM}^2 - \overline{AS} \cdot \overline{AM} \geq \overline{AS} \cdot \overline{AM} = \overline{AS} \cdot \overline{CR}.$$

5. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на опишаната кружница O. Кружница минува низ точките A и O и по втор пат ги сече правите AB и AC соодветно во точките P и Q. Ако $\overline{BC} = \overline{PQ}$, определи го остриот агол меѓу правите PQ и BC.

Решение. Со M и N да ги означиме соодветно средините на AB и AC. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AP} > \overline{AM}$, т.е. M е меѓу A и P (направи цртеж).

Четириаголникот $AMOP$ е тетивен, па затоа $\measuredangle MON = 180^\circ - \measuredangle BAC$. Освен тоа, $\measuredangle QOP = 180^\circ - \measuredangle BAC$, па затоа $\measuredangle MON = \measuredangle QOP$, од каде што следува $\measuredangle NOQ = \measuredangle MOP$. Значи, $\triangle MOP \sim \triangle NOQ$ и $\frac{\overline{MO}}{\overline{NO}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$. Од последното равенство и од $\measuredangle MON = \measuredangle QOP$ следува дека $\triangle MON \sim \triangle POQ$, при што коефициентот на сличност е $\frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$.

Според тоа, $2\overline{ON} = \overline{OQ}$, што значи дека $\measuredangle NOQ = 60^\circ$. Тогаш $\triangle OQP$ се добива од $\triangle ONM$ со ротација за 60° околу O и хомотетија со коефициент 2 и центар O. Во случајов остриот агол меѓу правите PQ и MN е еднаков на аголот на ротација, т.е. на 60°. Конечно, бидејќи $MN \| BC$ бараниот агол е еднаков на 60°.

6. Даден е $\triangle ABC$ со центар на опишаната кружница O. Точката B_1 е симетрична на точката B во однос на правата AC, точката C_1 е симетрична на точката C во однос на правата AB и точката O_1 е симетрична на точката O во однос на правата BC. Докажи дека правата AO_1 минува низ центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_1C_1$.

Решение. Да означиме $\measuredangle BAC = \alpha$. Тогаш
$$\measuredangle CAC_1 = \measuredangle BAB_1 = \measuredangle BOC = \measuredangle BO_1C = 2\alpha.$$
Нека ρ_1 е ротација со центар A и агол 2α, а ρ_2 е ротација со центар O_1 и агол 2α. Тогаш $\rho = \rho_1\rho_2\rho_1$ е ротација за агол 6α која C_1 ја пресликува во B_1. Со P да го означиме центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_1C_1$. Тогаш ротацијата со центар P и агол 6α ја пресликува C_1 во B_1. Според тоа, тоа е ротацијата ρ и затоа $\rho(P) = P$.

Нека $\rho_1(P) = P_1$ и $\rho_2(P_1) = P_2$. Тогаш
$$P = \rho(P) = \rho_1\rho_2\rho_1(P) = \rho_1\rho_2(P_1) = \rho_1(P_2).$$
Според тоа, $\overline{AP_1} = \overline{AP} = \overline{AP_2}$ и $\overline{O_1P} = \overline{O_1P_2}$, од каде следува $\triangle AP_1O_1 \cong \triangle AP_2O_1$. Добивме дека O_1 лежи на симетралата на $\measuredangle P_1AP_2$. Но, $\measuredangle PAP_1 = \measuredangle PAP_2 = 2\alpha$, што значи дека P лежи на оваа симетрала, со што доказот е завршен.

7. Конвексен многуаголник $\mathbb{M}$ се пресликува во себе со ротација за 90°. Докажи дека постојат две кружници со однос на радиуси $\sqrt{2}$ такви што едната е содржана во $\mathbb{M}$, а другата го содржи $\mathbb{M}$.

Решение. Нека O е центарот на ротација, а A_1 е едно од темињата на $\mathbb{M}$ кое е максимално оддалечено од O. Кружницата со центар во O и радиус $\overline{OA_1}$ го содржи $\mathbb{M}$. При ротација околу O за 90° темето A_1 се пресликува во A_2, понатаму A_2 се пресликува во A_3, A_3 се пресликува во A_4 и на крајот бидејќи имаме $4\cdot 90^\circ = 360^\circ$ темето A_4 се пресликува во темето A_1. Според тоа, $A_1A_2A_3A_4$ е квадрат кој исцело се содржи во $\mathbb{M}$, па затоа и неговата впишана кружница, со радиус $\frac{\overline{OA_1}}{2}$ исцело се содржи во $\mathbb{M}$.

Литература

1. Lopandić, D.: Geometrija, https://www.scribd.com/document/44667591/LopandicGeometrija
2. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazareveć, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
3. Малчески, Р., Гроздев, С., Аневска, К.: Геометрија на комплексен број, Армаганка, Скопје, 2019, https://matematickitalent.mk/
4. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002