

ММО 2011

1. Нека $a, b, c, d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{4a+3b+c} + \frac{1}{3a+b+4d} + \frac{1}{a+4c+3d} + \frac{1}{4b+3c+d} \geq 2.$$

Решение. Нека

$$m = 4a + 3b + c, n = 3a + b + 4d, p = a + 4c + 3d, q = 3b + 3c + d.$$

Имаме $m + n + p + q = 8$ и

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(m + n + p + q) \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{mnpq}} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{mnpq} = 16.$$

Според тоа,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{16}{m+n+p+q} = 2,$$

што и требаше да се докаже.

2. Даден е остроаголен триаголник ABC . Низ темето C е повлечена права l паралелна на AB . Симетралите на аглиите $\angle BAC$ и $\angle ABC$ ги сечат страните BC и AC во точките D и F , а правата l во точките E и G , соодветно. Докажи дека ако $\overline{DE} = \overline{GF}$, тогаш $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Решение. Лема. Ако во триаголникот ABC отсечката AD , $D \in BC$ е симетрала на $\angle BAC$, тогаш $\overline{CD} = \frac{ab}{b+c}$.

Доказ. Знаеме дека важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$. Оттука следува

$$\overline{CD} = \frac{b}{c} \overline{DB} = \frac{b}{c} (a - \overline{CD}) = \frac{ab}{c} - \frac{b}{c} \overline{CD},$$

од што следува бараното равенство. ■

Нека претпоставиме дека $\overline{AC} \neq \overline{BC}$.

Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $\angle BAC > \angle ABC$.

Од лемата следува

$$\overline{CD} = \frac{ab}{b+c} \text{ и } \overline{CF} = \frac{ab}{a+c}.$$

Нека $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$. То-

гаш $\angle FCG = 2\alpha$, $\angle FGC = \beta$, $\angle DCE = 2\beta$ и $\angle DEC = \alpha$. Од синусната

теорема за $\triangle CGF$ имаме $\frac{\overline{GF}}{\sin 2\alpha} = \frac{\overline{CF}}{\sin \beta}$, од синусната теорема за $\triangle CED$

имаме $\frac{\overline{ED}}{\sin 2\beta} = \frac{\overline{CD}}{\sin \alpha}$ и за $\triangle ABC$ имаме $\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin 2\beta}$, односно

$$b \sin 2\alpha = a \sin 2\beta.$$

Според тоа,

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \beta} \overline{CF} = \overline{GF} = \overline{ED} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \alpha} \overline{CD},$$

па затоа

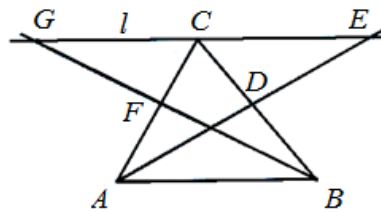
$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{ab}{a+c} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{ab}{b+c},$$

$$b \sin 2\alpha \sin \alpha + c \sin 2\alpha \sin \alpha = a \sin 2\beta \sin \beta + c \sin 2\beta \sin \beta,$$

$$a \sin 2\beta \sin \alpha + c \sin 2\alpha \sin \alpha = a \sin 2\beta \sin \beta + c \sin 2\beta \sin \beta,$$

$$a \sin 2\beta (\sin \alpha - \sin \beta) + c (\sin 2\alpha \sin \alpha - \sin 2\beta \sin \beta) = 0.$$

Но, $\angle BAC > \angle ABC$, односно $2\alpha > 2\beta$, па како триаголникот е остроаголен важи $\sin 2\alpha > \sin 2\beta$ и $\sin \alpha > \sin \beta$, што противречи на последното равенство. Конечно, од добиената противречност следува $\overline{AC} = \overline{BC}$.



3. Определи ги сите природни броеви n за кои секој број запишан со една седумка и $n-1$ единици е прост.

Решение. Број B запишан со една седумка и $n-1$ единици е од облик $B = A_n + 6 \cdot 10^k$ каде A_n е број со n единици и $0 \leq k < n$. Јасно, ако $3|n$ тогаш збирот на цифрите на бројот B е $n+6=3p+6$. Понатаму,

$$A_1 \equiv 1(\text{mod } 7), \quad A_2 \equiv 4(\text{mod } 7), \quad A_3 \equiv 6(\text{mod } 7),$$

$$A_4 \equiv 5(\text{mod } 7), \quad A_5 \equiv 2(\text{mod } 7), \quad A_6 \equiv 0(\text{mod } 7),$$

$$10^0 \equiv 1(\text{mod } 7), \quad 10^1 \equiv 3(\text{mod } 7), \quad 10^2 \equiv 2(\text{mod } 7), \quad 10^3 \equiv 6(\text{mod } 7),$$

$$10^4 \equiv 4(\text{mod } 7), \quad 10^5 \equiv 5(\text{mod } 7), \quad 10^6 \equiv 1(\text{mod } 7).$$

Нека $n > 6$. Тогаш $n = 6k + r, k \geq 0, 1 \leq r \leq 6$, па затоа

$$A_n = A_{6k+r} = A_{6k} + A_r \cdot 10^{6k} \equiv A_{6k} + A_r \equiv A_r(\text{mod } 7).$$

Ако $6|n$, тогаш $3|n$ и збирот на цифрите на бројот B е $3p+6$, што значи дека е сложен број. Нека 6 не е делител на n . Тогаш важи $A_n \equiv A_r(\text{mod } 7)$ и притоа A_r не е конгруентен со 0 по модул 7 . Нека ставиме $A_r \equiv k(\text{mod } 7)$. Од претходните разгледувања следува дека за тоа k можеме да избереме $t, 0 \leq t \leq 5$ таков што

$$6 \cdot 10^t \equiv -10^t \equiv -k(\text{mod } 7),$$

па затоа

$$B = A_n + 6 \cdot 10^t \equiv A_r + 6 \cdot 10^t \equiv k - k = 0(\text{mod } 7),$$

т.е. тој B е делив со 7 .

Останува да ги провериме случаите кога $n \leq 6$. Јасно, за $n=6$ и за $n=3$ сите броеви се сложени. За $n=5$ имаме

$$A_5 + 6 \cdot 10^2 \equiv 2 + 12 \equiv 0(\text{mod } 7),$$

за $n=4$ имаме $1711 = 29 \cdot 59$, а за $n=2$ и $n=1$ тоа се простите броеви $7, 17$ и 71 .

4. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такви што

$$f(x + yf(x)) = f(f(x)) + xf(y). \quad (1)$$

Решение. Ако во (1) ставиме $x=0$, тогаш $f(yf(0)) = f(f(0))$. Ако $f(0) \neq 0$, тогаш за $y = \frac{t}{f(0)}$, добиваме $f(t) = f(f(0)) = c$, што значи дека f е константна функција и важи $c = f(0) \neq 0$. Но, тогаш со замена во (1) добиваме $c = c + cx$, за секој $x \in \mathbb{R}$, т.е. $cx = 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $f(0) = 0$.

Нека претпоставиме дека $f(a) = 0$ за некој $a \neq 0$. Тога со замена во (1) добиваме $af(y) = 0$ за секој $y \in \mathbb{R}$, од каде следува $f(y) = 0$ за секој $y \in \mathbb{R}$, што е противречност. Лесно се проверува дека функцијата $f(x) = 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$ е решение на (1).

Ако во (1) ставиме $y=0$, добиваме $f(f(x)) = f(x)$, па со замена во (1) наоѓаме

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y). \quad (2)$$

Нека $f(1) = a \neq 0$. Ако во (2) ставиме $x=y=1$ добиваме $f(1+a) = 2a$. Понатаму, ако во (2) прво ставиме $x=1, y=-1$, а потоа ставиме $x=1+a, y=-1$, и искористиме дека $f(1+a) = 2a$, соодветно добиваме

$$f(1-a) = a + f(-1) \quad (3)$$

$$f(1-a) = 2a + (1+a)f(-1). \quad (4)$$

Сега од системот равенки (3) и (4) наоѓаме $f(-1) = -1$ и $f(1-a) = a-1$. Од друга страна за $x=1-a, y=1$ од (2) добиваме $0 = a-1 + (1-a)a$, од каде наоѓаме $a=1$. Сега прво за $x=1$, а потоа за $x=-1$ од (2) добиваме

$$f(1+y) = 1 + f(y), \quad (5)$$

$$f(-1-y) = -1 - f(y), \quad (6)$$

Од (5) и (6) следува $f(1+y) = -f(-1-y)$, па затоа $f(t) = -f(-t)$ за секој $t \in \mathbb{R}$. Сега, од (2) за $y=-1$, добиваме $f(x - f(x)) = f(x) - x$.

Конечно,

$$f(x - f(x)) = f(f(x - f(x))) = f(f(x) - x) = -f(x - f(x)),$$

$$f(x - f(x)) = 0,$$

$$x - f(x) = 0,$$

$$f(x) = x.$$

Лесно се проверува дека функцијата $f(x) = x$ е решение на (1).

5. Дефинираме „табела“ од тип $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ на следниов начин: n_1 квадрати поставуваме хоризонтално еден до друг, потоа n_2 квадрати поставуваме хоризонтално еден до друг под поставените n_1 квадрати почнувајќи од првиот квадрат лево. Постапката ја продолжуваме додека не добиеме „табела“ од n_1 во првиот ред, n_2 квадрати во вториот ред, ..., n_m квадрати во m -тиот ред, при што вкупно се поставени $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ квадрати. Поставените редови квадрати почнуваат секогаш од квадрат кој е под левиот квадрат на првиот ред (види пример). Добиената „табела“ ја пополнуваме со броевите од 1 до n така што во секој ред и во секоја колона броевите од лево кон десно и од горе кон долу, соодветно, се во растечки редослед. Подолу е даден пример за табела од тип $(5, 4, 2, 1)$ и едно нејзино пополнување.

1	3	4	7	11
2	5	10	12	
6	9			
8				

Опреди го бројот на пополнувањата на „табела“ од тип $(4, 3, 2)$.

Решение. Дефинираме функција f на m -торките $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ на следниов начин:

$$f(n_1, n_2, \dots, n_m) = 0 \text{ за } m\text{-торки за кои не важи } n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 0. \quad (1)$$

Ако важи $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 0$ тогаш

$$f(n_1, n_2, \dots, n_m, 0) = f(n_1, n_2, \dots, n_m), \quad (2)$$

$$f(n_1, n_2, \dots, n_m) = f(n_1 - 1, n_2, \dots, n_m) + f(n_1, n_2 - 1, n_3, \dots, n_m) + \dots + f(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, n_m - 1) \quad (3)$$

$$f(n) = 1, \text{ за } n \geq 0. \quad (4)$$

Јасно, функцијата f е добро дефинирана. Ќе докажеме дека бројот на пополнувањата на „табела“ од тип $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ е $f(n_1, n_2, \dots, n_m)$. Јасно, ако не важи $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 0$ тогаш немаме пополнување на „табела“ и затоа $f(n_1, n_2, \dots, n_m) = 0$, т.е. важи (1), а бидејќи во ред од n квадрати броевите од 1 до n во растечки редослед може да се запишат на единствен начин мора да важи (4). Понатаму, очигледно бројот на пополнувањата на „табела“ од типот $(n_1, n_2, \dots, n_m, 0)$ е еднаков на бројот на пополнувањата на „табела“ од типот $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, па затоа важи

(2). За да покажеме дека за бројот на пополнувањата на табела од типот $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ важи условот (3) го разгледуваме бројот n . Тој број мора да биде последен во некој ред, па ако го отстраниме квадратот со бројот n , добиваме пополнување со $n-1$ броеви на „табела“ од некој од следниве типови

$$(n_1 - 1, n_2, \dots, n_m), (n_1, n_2 - 1, n_3, \dots, n_m), \dots, (n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, n_m - 1). \quad (5)$$

Јасно, од секое пополнување на некоја „табела“ од типовите (5) со додавање на бројот n во соодветната редица се добива пополнување на „табела“ од типот $(n_1, n_2, \dots, n_m)$. Притоа, ако се случи две или повеќе редици да имаат еднаков број квадрати, тогаш во овие редици бројот n може да е само најдесно во последната од овие редици. Ако на пример $n_i = n_{i+1}$, тогаш $n_i - 1 < n_{i+1}$, па затоа согласно условот (1) ќе важи $f(n_1, \dots, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_m) = 0$. Според тоа, на десната страна на (3) некои од вредностите

$$f(n_1 - 1, n_2, \dots, n_m), f(n_1, n_2 - 1, n_3, \dots, n_m), \dots, f(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, n_m - 1)$$

на функцијата f може да се еднакви на 0.

Конечно, ако ја искористиме функцијата f за бројот на пополнувањата на „табела“ од типот $(4, 3, 2)$ добиваме

$$\begin{aligned} f(4, 3, 2) &= f(3, 3, 2) + f(4, 2, 2) + f(4, 3, 1) \\ &= f(3, 2, 2) + f(3, 3, 1) + f(3, 2, 2) + f(4, 2, 1) + f(3, 3, 1) + f(4, 2, 1) + f(4, 3, 0) \\ &= 2f(4, 2, 1) + 2f(3, 3, 2) + 2f(3, 3, 1) + f(4, 3) \\ &\dots\dots\dots \\ &= 16f(2, 1, 1) + 20f(2, 2) + 25f(3, 1) + 5f(4) \\ &= 16(f(1, 1, 1) + f(2, 1, 0)) + 20f(2, 1) + 25(f(2, 1) + f(3, 0)) + 5 \\ &= 16f(1, 1, 1) + 61f(2, 1) + 25f(3) + 5 \\ &= 16f(1, 1, 0) + 61(f(1, 1) + f(2, 0)) + 25 + 5 \\ &= 77f(1, 1) + 61f(2) + 30 \\ &= 77f(1) + 61 + 30 \\ &= 77 + 91 \\ &= 168. \end{aligned}$$