

Zanimljive primjene Šurove nejednakosti

Šefket Arslanagić^a, Daniela Zubović^b

^aSarajevo, BiH

^bPrirodno-matematički fakultet Sarajevo

Sažetak: U ovom radu, koristeći Šurovu nejednakost, dokazujemo više raznih nejednakosti koje se bez ove značajne nejednakosti dokazuju znatno teže.

1. Uvod

U matematičkoj literaturi o nejednakostima značajno mjesto zauzima i Šurova¹⁾ nejednakost koja glasi: Ako su x, y, z pozitivni realni brojevi i r realan broj, tada je:

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0, \quad (1)$$

s jednakošću ako i samo ako je $x = y = z$.

Dva dokaza ove nejednakosti se mogu naći u [1], str. 169-175.

Za $r = 1$ dobijamo iz (1) sljedeću nejednakost:

$$1^0 \quad x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x), \quad (A)$$

i njoj ekvivalentne nejednakosti:

$$2^0 \quad xyz \geq (y+z-x)(x+z-y)(x+y-z), \quad (B)$$

$$3^0 \quad (x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx), \quad (C)$$

$$4^0 \quad (x-y)^2(x+y-z) + (y-z)^2(y+z-x) + (z-x)^2(z+x-y) \geq 0, \quad (D)$$

$$5^0 \quad x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy+yz+zx), \quad (E)$$

$$6^0 \quad \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 2, \quad (F)$$

te za $r = 2$ slijedi iz (1) sljedeća nejednakost:

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + zx(z^2+x^2), \quad (G)$$

gdje su $x, y, z > 0$.

Ciljna skupina: osnovna i srednja škola

Ključne riječi: Šurova nejednakost, dokaz, posljedica, jednakost

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: mart 2021.

¹⁾Issai Schur (Šur), njemački matematičar rođen 1875. godine u Carskoj Rusiji, a umro u Tel Avivu (Izrael), 1941. godine.

2. Primjene Šurove nejednakosti

Svaku od nejednakosti (A) – (G), pojedinačno, nije lako dokazati bez poznavanja i upotrebe Šurovu nejednakost. Ovo ćemo demonstrirati na nejednakostima (E) i (F).

Primjer 1. Dokazati nejednakost (E).

”Rješenje”: Napišimo ovu nejednakost u obliku

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq (xy + yz + zx) + (xy + yz + zx).$$

Poznato je da važi nejednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad (2)$$

$$(\iff (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0).$$

Sada bi trebalo dokazati da važi nejednakost

$$\frac{9xyz}{x+y+z} \geq xy + yz + zx. \quad (3)$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo sljedeću nejednakost

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

kao i

$$\frac{xy + yz + zx}{3} \geq \sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx}, \quad \frac{xy + yz + zx}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2},$$

odnosno

$$x + y + z \geq 3 \sqrt[3]{xyz} \quad \text{i}$$

$$xy + yz + zx \geq 3 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}.$$

Nakon množenja ovih nejednakosti, dobijamo

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 9 \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3}, \quad \text{to jest}$$

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 9xyz,$$

a odavde

$$\frac{9xyz}{x+y+z} \leq xy + yz + zx, \quad (4)$$

a ovo nije nejednakost (3), to jest iz nejednakosti (2) i (4) ne slijedi nejednakost (E).

Primjer 2. Dokazati nejednakost (F).

”Rješenje”: Imamo dobro nam poznatu Nesbitovu nejednakost

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}; \quad (x, y, z > 0). \quad (5)$$

Napomena 1. Ukupno 24 razna dokaza nejednakosti (5) se može naći u [2], [3] i [4].

Preostaje nam sada da dokažemo nejednakost

$$\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{1}{2}; \quad (x, y, z > 0). \quad (6)$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, imamo

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}, \quad \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx},$$

odnosno

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}, \quad y+z \geq 2\sqrt{yz}, \quad z+x \geq 2\sqrt{zx},$$

a odavde nakon množenja ovih nejednakosti:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2}, \quad \text{to jest}$$

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

ili

$$\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Dakle, ne važi nejednakost (6), to jest nakon sabiranja nejednakosti (5) i (7) ne slijedi nejednakost (F).

Sada vidimo koliko je važna (i korisna) Šurova nejednakost (1).

Napomena 2. U Primjerima 1. i 2. nismo dokazali tražene nejednakosti i zbog toga je napisano pod navodnicima "Rješenje". Dobro bi bilo da neko od čitalaca ovog članka pokuša da dokaže npr. nejednakosti (E) i (F) ne koristeći Šurovu nejednakost (1).

Sada ćemo dati nekoliko primjera dokaza nejednakosti koristeći Šurovu nejednakost (1).

Primjer 3. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 3abc, \quad (8)$$

gdje su a, b, c dužine stranica trougla $\triangle ABC$.

Rješenje: Očigledno, data nejednakost (8) je ekvivalentna sa nejednakošću

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2),$$

ili

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a),$$

a ovo je nejednakost (A) koja je tačna, gdje je $x = a > 0$, $y = b > 0$, $z = c > 0$.

Vrijedi jednakost u (8) ako i samo ako je $a = b = c$, to jest ako je u pitanju jednakokranični trougao. $\square$

Primjer 4. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da je tada

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1. \quad (\text{IMO 2000}) \quad (9)$$

Rješenje: Nakon množenja i sređivanja, od nejednakosti (9) se dobije ekvivalentna nejednakost

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq a + b + c + ab + bc + ca. \quad (10)$$

S obzirom da važi $abc = 1$, možemo uzeti smjenu $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ gdje su $x, y, z > 0$ jer su $a, b, c > 0$. Nakon ove smjene, nejednakost (9) postaje

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + x^2z + xz^2,$$

odnosno

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x),$$

a ovo je specijalan slučaj Šurove nejednakosti (A), što znači da je nejednakost (10) tačna.

Vrijedi jednakost u (9) ako i samo ako je $x = y = z$, to jest $a = b = c = 1$. □

Primjer 5. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$9xyz + 1 \geq 4(xy + yz + zx), \quad (11)$$

ako je $x + y + z = 1$.

Rješenje: Koristeći uslov $x + y + z = 1$, nejednakost (11) se svodi na ekvivalentnu nejednakost

$$9xyz + (x + y + z)^3 \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx),$$

koja se nakon kubiranja, množenja i sređivanja svodi na ekvivalentnu nejednakost

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x),$$

a ovo je opet specijalan slučaj Šurove nejednakosti (A) pa je ista tačna, što znači da je i nejednakost (11) tačna.

Važi jednakost ako i samo ako je $x = y = z = \frac{1}{3}$. □

Primjer 6. Dokazati da važi nejednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 12PR, \quad (12)$$

gdje su a, b, c dužine stranica trougla, P površina trougla, a R radijus opisane kružnice trougla $\triangle ABC$.

Rješenje: Specijalan slučaj Šurove nejednakosti (A) glasi

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \\ \iff a^3 + b^3 + c^3 + 6abc &\geq (a+b+c)(ab+bc+ca) \\ \iff a^3 + b^3 + c^3 &\geq (a+b+c)(ab+bc+ca) - 6 \cdot 4RP. \end{aligned} \quad (13)$$

Dokazaćemo sada da važi nejednakost

$$ab + bc + ca \geq 18Rr, \quad (14)$$

gdje je r radijus upisane kružnice u trougao $\triangle ABC$.

Nejednakost (14) je ekvivalentna sa nejednakošću

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &\geq 18 \cdot \frac{abc}{4P} \cdot \frac{P}{s} \\ \iff ab + bc + ca &\geq \frac{9abc}{2s} \\ \iff (a+b+c)(ab+bc+ca) &\geq 9abc = 36PR. \end{aligned} \quad (15)$$

Ovdje smo koristili formule za površinu trougla $P = \frac{abc}{4R}$ i $P = rs$, gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluobim trougla. Zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, imamo

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad \text{ i } \quad ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

te nakon množenja ovih nejednakosti

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc = 36PR,$$

što znači da je nejednakost (15) tačna, pa je tačna i nejednakost (14).

Sada iz nejednakosti (13) i (15) slijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 9abc - 24PR, \quad \text{to jest}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 9 \cdot 4RP - 24PR$$

ili

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 12PR,$$

a ovo je data nejednakost (12).

Vrijedi jednakost u (12) ako i samo ako je $a = b = c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. $\square$

Primjer 7. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{a^2}{(s-b)(s-c)} + \frac{b^2}{(s-c)(s-a)} + \frac{c^2}{(s-a)(s-b)} \leq \frac{6R}{r}, \quad (16)$$

gdje su a, b, c dužine stranica, s poluobim, R i r radijusi opisane i upisane kružnice trougla $\triangle ABC$.

Rješenje: Ovdje ćemo koristiti Heronovu formulu za površinu trougla $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je s poluobim trougla. Nejednakost (16) je ekvivalentna sa nejednakošću

$$\begin{aligned} a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) &\leq \frac{6R}{r}(s-a)(s-b)(s-c) \\ \iff a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) &\leq \frac{6R}{r} \cdot \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\ \iff a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) &\leq \frac{6R}{r} \cdot \frac{P^2}{s} \\ \iff a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) &\leq 6RP \\ \iff a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) &\leq 6R \cdot \frac{abc}{4R} \\ \iff a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) &\leq \frac{3}{2}abc \\ \iff a^2 \cdot \frac{b+c-a}{2} + b^2 \cdot \frac{a+c-b}{2} + c^2 \cdot \frac{a+b-c}{2} &\leq \frac{3}{2}abc \\ \iff a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a), \end{aligned}$$

a ovo je specijalni slučaj Šurove nejednakosti (A), što znači da je data nejednakost (16) tačna.

Vrijedi jednakost u nejednakosti (16) ako i samo ako je $a = b = c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. $\square$

Primjer 8. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c} \leq \frac{abc}{r}, \quad (17)$$

gdje su a, b, c dužine stranica, r radijus upisane kružnice, a r_a, r_b, r_c radijusi pripisanih kružnica trougla $\triangle ABC$.

Rješenje: Koristeći poznate formule (vidi [5])

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c}, \quad r = \frac{P}{s},$$

imamo

$$\frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c} = \frac{a^3(s-a)}{P} + \frac{b^3(s-b)}{P} + \frac{c^3(s-c)}{P} = \frac{a^3(s-a) + b^3(s-b) + c^3(s-c)}{rs},$$

pa sada data nejednakost (17) prelazi u ekvivalentnu nejednakost

$$\begin{aligned} \frac{a^3(s-a) + b^3(s-b) + c^3(s-c)}{rs} &\leq \frac{abc}{r} \\ \Leftrightarrow a^3(s-a) + b^3(s-b) + c^3(s-c) &\leq abcs \\ \Leftrightarrow a^3 \cdot \frac{b+c-a}{2} + b^3 \cdot \frac{a+c-b}{2} + c^3 \cdot \frac{a+b-c}{2} &\leq abc \cdot \frac{a+b+c}{2} \\ \Leftrightarrow a^3(b+c-a) + b^3(a+c-b) + c^3(a+b-c) &\leq a^2bc + ab^2c + abc^2 \\ \Leftrightarrow a^3b + a^3c - a^4 + ab^3 + b^3c - b^4 + c^3a + bc^3 - c^4 &\leq a^2bc + ab^2c + abc^2 \\ \Leftrightarrow a^4 - a^3b - a^3c + a^2bc + b^4 - b^3c - ab^3 + ab^2c + c^4 - c^3a - c^3b + abc^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) &\geq ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2), \end{aligned}$$

a ovo je specijalan slučaj Šurove nejednakosti (G).

Vrijedi jednakost u (17) ako i samo ako je $a = b = c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. $\square$

Primjer 9. Dokazati da važi nejednakost:

$$s^2 + r^2 \geq 14Rr \quad (18)$$

gdje je s poluobim, a R i r radijus opisane i upisane kružnice trougla $\triangle ABC$.

Rješenje: Ovdje ćemo koristiti **Ravijeve smjene** $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ gdje su $x, y, z > 0$. Sada imamo

$$\begin{aligned} s &= \frac{a+b+c}{2} = x+y+z, \quad P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}, \\ r &= \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}, \quad R = \frac{abc}{4P} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}. \end{aligned}$$

Data nejednakost (18) sada glasi

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 + \frac{xyz}{x+y+z} &\geq \frac{7}{2} \cdot \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z} \\ \Leftrightarrow 2(x+y+z)^3 + 2xyz &\geq 7(x+y)(y+z)(z+x). \end{aligned} \quad (19)$$

Imamo poznati identitet

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x). \quad (20)$$

Sada dobijamo iz (19) i (20)

$$2x^3 + 2y^3 + 2z^3 \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x). \quad (21)$$

Uzećemo specijalnu Šurovu nejednakost (A)

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

i nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Nakon sabiranja ove dvije nejednakosti, dobijamo sljedeću nejednakost

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x),$$

a ovo je nejednakost (21), q.e.d. Dakle, pokazali smo da je nejednakost (21) tačna, a to znači da je i nejednakost (18) tačna.

Vrijedi jednakost u (19), odnosno u (18) ako i samo ako je $x = y = z \Rightarrow a = b = c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. $\square$

Primjer 10. Dokazati da važi nejednakost

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \geq 4P \left(tg \frac{\alpha}{2} + tg \frac{\beta}{2} + tg \frac{\gamma}{2} \right), \quad (22)$$

gdje su a, b, c dužine stranica; α, β, γ unutrašnji uglovi, a P površina trougla $\triangle ABC$.

Rješenje: Imamo zbog $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Heron)

$$\begin{aligned} 4P \left(tg \frac{\alpha}{2} + tg \frac{\beta}{2} + tg \frac{\gamma}{2} \right) &= 4P \left(\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} + \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} + \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ss-c}} \right) = \\ &= 4((s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) + (s-a)(s-b)) = \\ &= 4(3s^2 - 2s(a+b+c) + bc + ac + ab) = \\ &= 4(ab + bc + ca - s^2) = 4 \left[ab + bc + ca - \frac{(a+b+c)^2}{4} \right] = \\ &= 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 \end{aligned}$$

to jest

$$4P \left(tg \frac{\alpha}{2} + tg \frac{\beta}{2} + tg \frac{\gamma}{2} \right) = 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2. \quad (23)$$

Sada data nejednakost (22), zbog (23) ima oblik

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \geq 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2. \quad (24)$$

Uzimajući smjenu $\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$, $\sqrt{c} = z$, dobijamo iz nejednakosti (24)

$$\begin{aligned} x^2yz + xy^2z + xyz^2 &\geq 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 \\ \iff x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) &\geq 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Imamo specijalnu Šurovu nejednakost (G)

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$$

odnosno

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y). \quad (26)$$

Dokazaćemo da važi nejednakost

$$x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y) \geq 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2y^2. \quad (27)$$

Zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, imamo

$$\begin{aligned} x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y) &= (x^3y + xy^3) + (y^3z + yz^3) + (z^3x + zx^3) \geq \\ &\geq 2\sqrt{x^4y^4} + 2\sqrt{y^4z^4} + 2\sqrt{z^4x^4} = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2, \quad \text{to jest} \end{aligned}$$

$$x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y) \geq 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2y^2.$$

Sada iz nejednakosti (26) i (27) slijedi nejednakost (25), što znači da je data nejednakost (22) tačna. Vrijedi jednakost u (22) ako i samo ako je $x = y = z \Rightarrow a = b = c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. $\square$

Literatura

- [1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
- [2] Š. Arslanagić: *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
- [3] Š. Arslanagić: *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
- [4] Š. Arslanagić, D. Zubović: *Nesbitova nejednakost - još tri dokaza*, Tangenta, Vol. 26, Br. 101/1, 2020-21, 1-5, Beograd.
- [5] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić, I. Matić: *Nejednakosti*, Materijal za mlade matematičare, Sveska 42, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.