Различити методи решавања геометријског проблема

Владимир Балтић
baltic@galeb.etf.bg.ac.yu

Лепота математике се огледа у различитим путевима за решавање проблема. Наставници и професори би требало велики број задатака да решавају на неколико различитих начина, да би ученици видели да су неколико наизглед неповезаних области, међусобно везане преко датог задатка. Када ме ученици (као и студенти) питају чемурешавамо један задатак на два, три или понекад и више начина, често им дам следећи пример (који може и сликовито да дочара, као и да побољша атмосферу на часу):
Замислите боксера који зна само један ударац, нпр. директ. Он је савршено увежбао тај ударац, али не зна ниједан други. Када изађе у ринг, искусан противник ће то веома брзо приметити и блокираће све његове ударце. Али да он зна и кроше и аперкат, сигурно би могао очекивати бољи резултат. Иста ситуација је и у математици. Ако знамо више различитих метода дати проблем можемо напасти са разних страна, те су нам стога веће шансе да га савладамо.

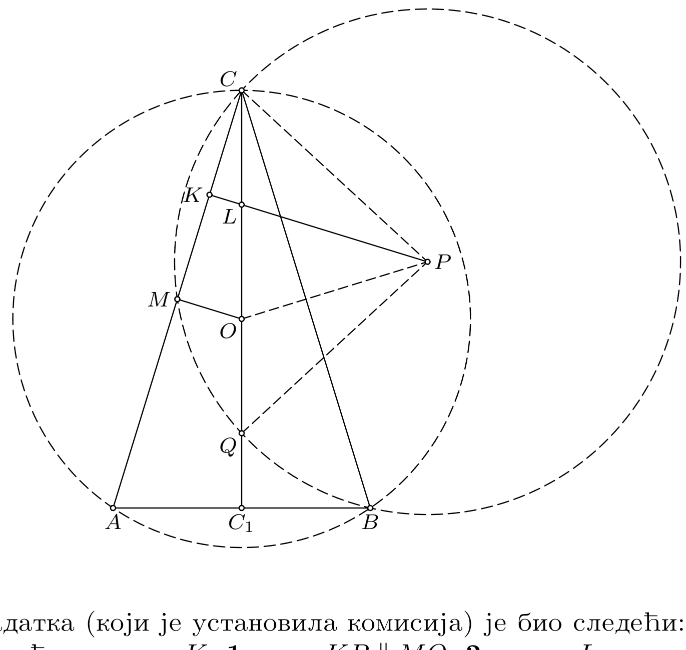
Ми ћемо се овде осврнути на решавање 2. задатка са Осме јуниорске балканске математичке олимпијаде (одржане у Новом Саду од 26. до 30. јуна 2004.) и то помоћу неколико суштински различитих геометријских решења, као и помоћу тригонометрије, аналитичке геометрије и комплексних бројева. Задатак гласи:

> Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки троугао, $AC = BC$, нека је M средиште дужи AC и нека је ℓ права која пролази кроз тачку C, а ортогонална је на AB. Кружница кроз B, C и M сече ℓ у тачкама C и Q. Изразити полупречник круга описаног око троугла $\triangle ABC$ преко $m = CQ$.

Задатак су предложили Бугари. Од 69 такмичара потпуно тачно (за 10 поена) га је решило 33 такмичара (4+5 наших, 6 Румуна, 5+1 Бугара, 3 Македонаца, 3 Казахстанца, 2 Молдавца, 2 Турчина, 1 Грк, 1 Босанка). Само један ученик је имао непотпуно решење са 8 поена, док су остали имали или 10 поена или 6 поена и мање. Ништа значајније на задатку није урадило 20 ученика (0 поена је имало 6 такмичара, а 1 поен је имало 14). Просек поена је био 6,029.

I (званично решење)

Означимо са P центар кружнице кроз тачке B, C и M. Нека је K средиште дужи MC. Тада је $\triangle KPC \cong \triangle KPM$ (имају све три странице једнаке), а одатле добијамо да је $\sphericalangle CKP = \sphericalangle MKP = 90^\circ$, односно $KP \perp CM$. Аналогно је и $MO \perp CA$, што нам даје $KP \parallel MO$. Означимо са L пресек правих ℓ и KP. Како је K средиште дужи MC, из Талесове теореме примењене на троуглове $\triangle CKL \sim \triangle CMO$, добијамо да је L средиште дужи OC, тј. $OL = CL$. Како и O и P припадају симетрали дужи BC имамо да је $OP \perp BC$. Сада имамо следеће једнакости углова са нормалним крацима $\sphericalangle KLC = \sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle POC = \sphericalangle ABC = \alpha$, што нас са једнакошћу унакрсних углова $\sphericalangle KLC = \sphericalangle POL$ води до чињенице да је троугао $\triangle OPL$ једнакокраки, тј. $PO = PL$. Сада из подударности троуглова $\triangle CLP \cong \triangle QOP$ (из једнакокраких троуглова $\triangle OLP$ и $\triangle QCP$ добијамо једнакости свих одговарајућих углова, као и $OP = OL$ и $QP = CP$) добијамо да важи $CL = QO$, што нам са $OL = CL$ коначно даје $CO = \frac{2}{3}CQ$, односно $R = \frac{2}{3}m$.



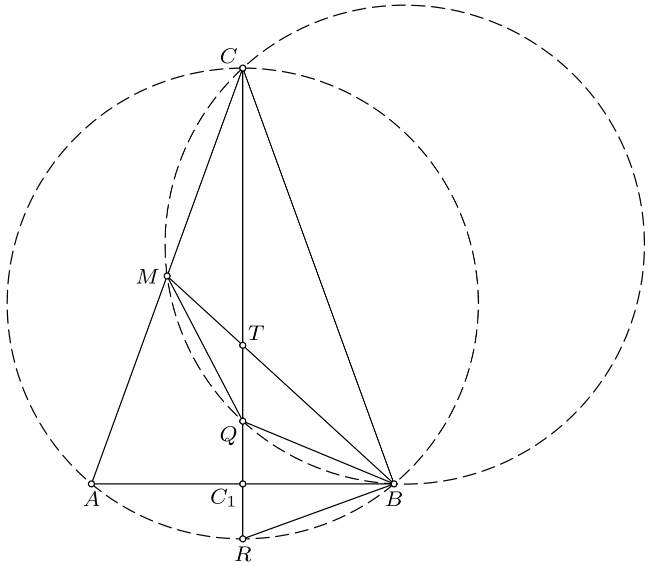
Кључ за бодовање овог задатка (који је установила комисија) је био следећи:

1 поен увођење тачке K, **1 поен** $KP \parallel MO$, **2 поена** L средиште OC,
3 поена $\triangle OPL$ једнакокрак, **2 поена** $CL = QO$, **1 поен** коначан резултат.

Међутим нико од такмичара није задатак решавао на овај начин.

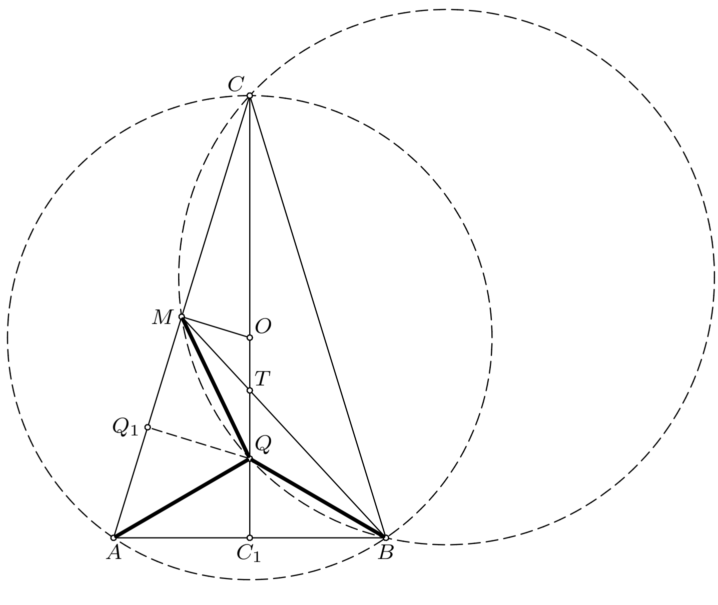
II

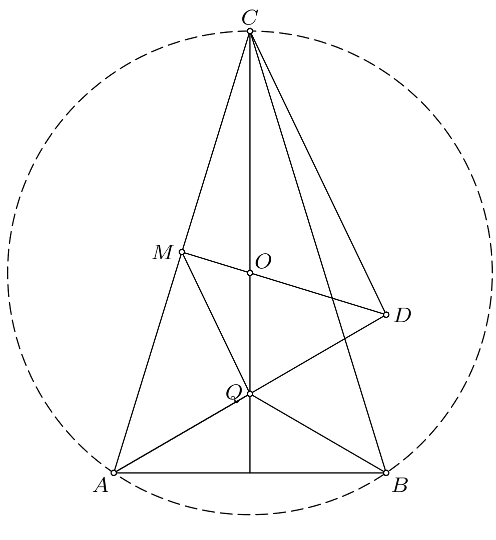
Нека је CR пречник кружнице описане око $\triangle ABC$, T тежиште $\triangle ABC$ и C_1 средиште странице AB.
Из сличности $\triangle CBP \sim \triangle CC_1B$ (један угао им је $\sphericalangle RCB$, а други је $90°$) $\Rightarrow$ $\boxed{CB^2 = CC_1 \cdot CP}$.
Из подударности $\triangle ACC_1 \cong \triangle BCC_1$ ($AC = BC$, $AC_1 = C_1B$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$) $\Rightarrow \sphericalangle ACR = \sphericalangle BCR$, а из тетивног четвороугла $MCBQ \Rightarrow \sphericalangle MBC = \sphericalangle MQC$. Одатле имамо сличност $\triangle CBT \sim \triangle CQM \Rightarrow$ $\boxed{CB^2 = \frac{4}{3}CC_1 \cdot CQ}$.
Из ове две једнакости налазимо $2R = CR = \frac{4}{3}CQ = \frac{4}{3}m$, тј. $R = \frac{2}{3}m$.



III

Исто као у претходном начину добијамо да је $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle BCC_1$, а како су они периферијски углови над MQ и BQ добијамо да су ове две тетиве једнаке, тј. $BQ = MQ$. Како је Q на симетрали дужи AB добијамо и да је $AQ = BQ$, односно $AQ = BQ = MQ$. Како је $\triangle AQM$ једнакокрак, имамо да је подножје нормале из Q на AM, тачка Q_1, средиште основице AM. Сада из сличности правоуглих троуглова $\triangle COM \sim \triangle CQQ_1$ имамо $CQ_1 : CM = CQ : CO$, односно $\frac{3}{4}a : \frac{1}{2}a = m : r$, одакле је $R = \frac{2}{3}m$.





IV

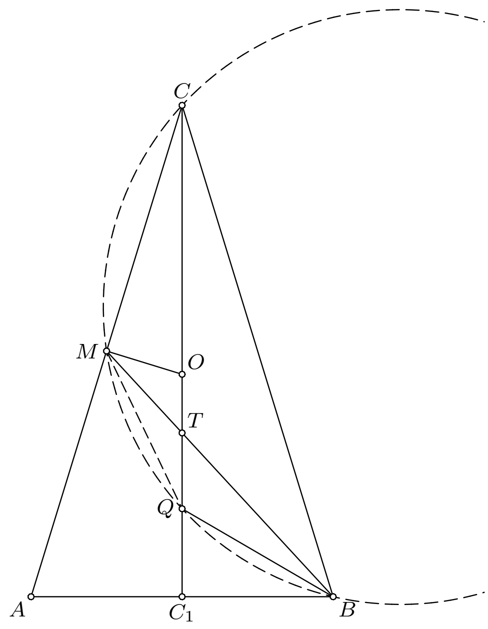
Исто као у претходном начину добијамо да је $AQ = MQ$. Означимо са D тачку симетричну тачки A у односу на Q. Како су $\triangle AQM \sim \triangle ADC$ (хомотетија из A са коефицијентом сличности 2), добијамо да је и $\triangle ADC$ једнакокрак, па му је дуж DM и висина и тежишна линија. Како је $OM \perp AC$ добијамо да $O \in DM$, односно $DM \cap \ell = \{O\}$ и како је $AM = MC$ и $AQ = QD$, добијамо да је O тежиште $\triangle ADC$, па је $CO = \frac{2}{3}CQ$, тј. $R = \frac{2}{3}m$.

V

Исто као у II начину добијамо да је $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle BCC_1$, а одатле следи сличност правоуглих троуглова $\triangle CMO \sim \triangle CC_1B \Rightarrow CO : CB = CM : CC_1$, тј. $R : a = \frac{1}{2}a : h \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{a^2}{2h}}$.

Из сличности $\triangle CQB \sim \triangle CMT$ (опет $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle BCC_1$, а из тетивног четвороугла $CMQB$ је $\sphericalangle CQB = \sphericalangle CMT$) $\Rightarrow CQ : CM = CB : CT$, тј. $m : \frac{1}{2}a = a : \frac{2}{3}h \Rightarrow \boxed{m = \dfrac{3a^2}{4h}}$.

Из горње две једнакости добијамо $R = \frac{2}{3}m$.



VI (*решења Македонаца* – радили на припремама Птоломејеву теорему)

Исто као у III начину добијамо да је $MQ = BQ = x$. Применимо Птоломејеву теорему на тетиван четвороугао $CMQB$: $CM \cdot BQ + BC \cdot MQ = MB \cdot CQ$, тј. $\frac{1}{2}a \cdot x + a \cdot x = MB \cdot m \Rightarrow \boxed{MB = \dfrac{3ax}{2m}}$.

Из сличности $\triangle CTM \sim \triangle BTQ$ (унакрсни $\sphericalangle CTM = \sphericalangle BTQ$ и периферијски у тетивном четвороугла $CMQB$: $\sphericalangle MCT = \sphericalangle QBT$ и $\sphericalangle CMT = \sphericalangle BQT$) $\Rightarrow MC : CT = QB : BT$, тј. $\frac{1}{2}a : \frac{2}{3}h = x : \frac{2}{3}MB \Rightarrow MB = \dfrac{2hx}{a} = \dfrac{3ax}{2m} \Rightarrow \boxed{4hm = 3a^2}$.

Из сличности правоуглих троуглова $\triangle CMO \sim \triangle CC_1B \Rightarrow CO : CB = CM : CC_1$, тј. $R : a = \frac{1}{2}a : h \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{a^2}{2h}}$.

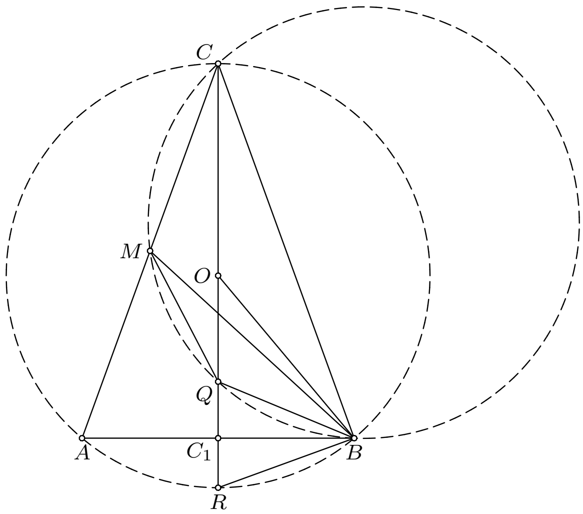
Одавде добијамо да је $R = \frac{2}{3}m$.

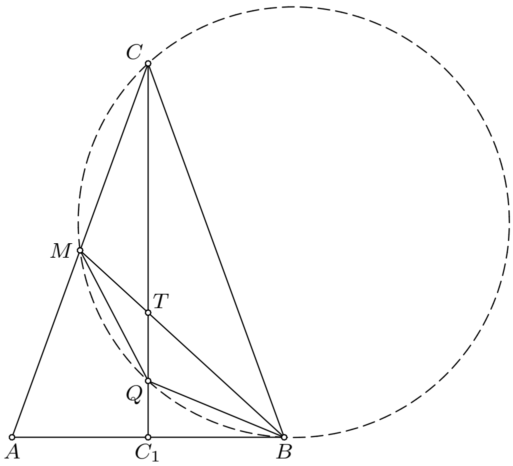
VII (*решио Александар Кирилов Даскалов* ученик из Бугарске са максималних 40 поена)

Нека је k кружница описана око $\triangle ABC$, са центром у O, $\ell \cap k = \{R\}$. Означимо са $\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ и са $a = AC = BC$. Како је O центар описане кружнице, она припада симетрали дужи AB, тј. $O \in \ell$. Докажимо да су на правој ℓ тачке поређане у редоследу C, O, Q, R.

Из кружнице k, имамо следеће углове над луком BC: $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC = 2\alpha$ и $\sphericalangle BRC = \sphericalangle BAC = \alpha$. Из тетивног четвороугла $BQMC$ добијамо да је $\sphericalangle BQC = \sphericalangle BMC$. Како је спољашњи угао $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAM + \sphericalangle ABM = \alpha + \sphericalangle ABM \Rightarrow \sphericalangle BMC > \alpha$ (јер је M тачка са дужи AC). Како је $\sphericalangle ABM < \sphericalangle ABC = \alpha$ добијамо $\sphericalangle BMC < 2\alpha \Rightarrow \alpha < \sphericalangle BQC < 2\alpha \Rightarrow \sphericalangle BRC < \sphericalangle BQC < \sphericalangle BOC \Rightarrow$ тачка Q је између O и R, а O је између C и Q. Тиме смо показали да је на правој ℓ редослед тачака C, Q, O, R.

Како је $\triangle BOR$ једнакокрак ($OR = OB = R$) и из $\sphericalangle BOC = 2\alpha$, добијамо да је $\sphericalangle BOR = 180^\circ - 2\alpha = \sphericalangle ACB$. Из тетивног четвороугла $BQMC$ је $\sphericalangle BQO = \sphericalangle BMC$, што нам даје сличност $\triangle BQO \sim \triangle BMC \Rightarrow BC : CM = BO : OQ$, тј. $a : \frac{1}{2}a = R : OQ \Rightarrow OQ = \frac{1}{2}R$. Сада, с обзиром на редослед тачака на правој ℓ, добијамо да је $m = CQ = CO + OQ = \frac{3}{2}R$, односно $R = \frac{2}{3}m$.

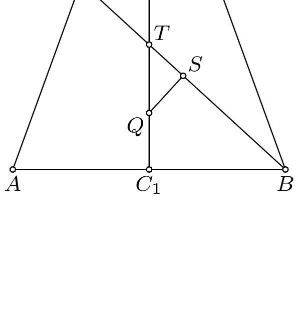




VIII (*решења 2 Казахстанца* тригонометријом)
Означимо са $\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ и са $a = AC = BC$ и изразимо остале дужи у троуглу преко a и α. $AM = MC = \frac{1}{2}a$, $CC_1 = a \cdot \sin\alpha$, $AC_1 = a \cdot \cos\alpha \Rightarrow AB = 2a \cdot \cos\alpha$. Ако применимо косинусну теорему на $\triangle ABM$ добијамо $MB^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM \cdot AB \cdot \cos\alpha$, тј. $MB^2 = \frac{1}{4}a^2 + 4a^2\cos^2\alpha - 2\frac{a}{2} \cdot 2a\cos\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4}a^2(1 + 8\cos^2\alpha)$. Како су BM и CC_1 тежишне дужи $\triangle ABC$, то је њихов пресек T тежиште и важи $TM = \dfrac{1}{3}MB$, $TB = \dfrac{2}{3}MB$ и $TC = \dfrac{2}{3}CC_1$. Ако сада применимо потенцију тачке T у односу на кружницу описану око тачака B, C и M (или из сличности $\triangle BTQ \sim \triangle CTM$) имамо да је $TM \cdot TB = TC \cdot TQ$, односно $\dfrac{2}{9}MB^2 = \dfrac{2}{3}CC_1(CQ - \dfrac{2}{3}CC_1)$, тј. $\frac{1}{12}a^2(1 + \cos\alpha) = a \cdot \sin\alpha(m - \frac{2}{3}a \cdot \sin\alpha)$, што након сређивања даје $m = \dfrac{3a}{4\sin\alpha}$. Из синусне теореме у $\triangle ABC$ имамо да је $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$, односно $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{2}{3}m$.

IX (*решење Казахстанца Пак Алексеја* аналитичком геометријом)
Нека је S средиште дужи BM. Исто као у III начину добијамо да је $MQ = BQ$, тј. $\triangle BQM$ је једнакокрак, па је $SQ \perp BM$.

Уведимо координатни систем на следећи начин: $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4a)$. Тада је $M(-2, 2a)$, $S(1, a)$ и $C_1 = (0, 0)$. Једначина праве кроз две дате тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2) је $y = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$. Једначина праве MB је $y = -\frac{a}{3} \cdot x + \frac{4a}{3}$. Права SQ је нормална на MB, па је њен коефицијент $k_{SQ} = -\dfrac{1}{k_mb}$ и кад убацимо $S \in SQ$, добијамо SQ: $y = \frac{3}{a} \cdot x + a - \frac{3}{a}$. Пресек ове праве и y-осе је тачка $Q(0, a - \frac{3}{a})$. Растојање $CQ = 4a - (a - \frac{3}{a}) = 3\left(\frac{a^2+1}{a}\right)$. Површина троугла $\triangle ABC$ је једнака $P = \frac{1}{2}AB \cdot CC_1 = \frac{1}{2}8 \cdot 4a = 16a$, а $AC \cdot BC \cdot AB = BC^2 \cdot AB = (16 + 16a^2) \cdot 8$. Из формуле $P = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ добијамо $R = 2\dfrac{a^2 + 1}{a} = \frac{2}{3}m$.



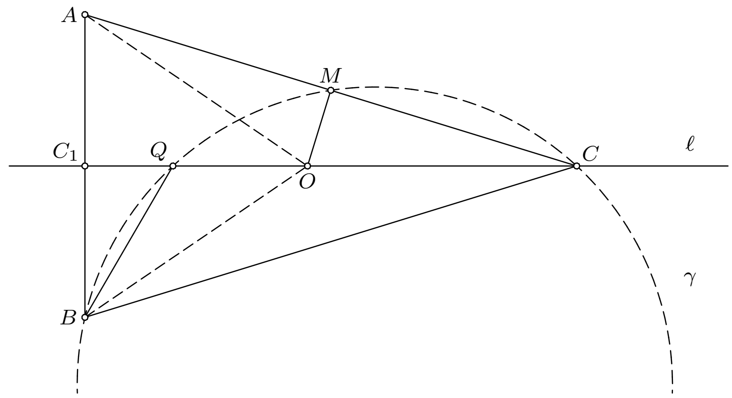
Напомена: Можемо искористити и формуле, да ако су дате координате темена троугла $\triangle ABC$ тада је његова површина дата помоћу апсолутне вредности детерминанте $P = \frac{1}{2} \cdot |\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2} \cdot |\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4a & 1 \end{vmatrix}| = 16a.$

X (комплексним бројевима)

Означимо комплексне бројеве који одговарају тачкама одговарајућим малим словима.
Узећемо да је $o = 0$, тј. да су тачке A, B и C на јединичној кружници са центром у координатном почетку (на тај начин се велики број формула значајно поједностављује, а нисмо изгубили на општости јер на крају све можемо хомотетично пресликати, при чему се чувају сви односи): $a = a$, $b = \overline{a} = \dfrac{1}{a}$, $c = 1$. Тада M, средиште дужи AC, налазимо по формули $m = \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{a+1}{2}$. Комплексна координата пресека Q кружнице γ кроз B, C и M и праве ℓ је чисто реална ($q \in \mathbb{R}$) и добијамо је из услова да 4 тачке припадају кружници: $k = \dfrac{m-c}{b-c} : \dfrac{m-q}{b-q} \in \mathbb{R}$.
Средимо овај израз: $k = \dfrac{m-c}{b-c} \cdot \dfrac{b-q}{m-q} = \dfrac{\frac{a+1}{2}-1}{\frac{1}{a}-1} \cdot \dfrac{\frac{1}{a}-q}{\frac{a+1}{2}-q} = \dfrac{aq-1}{1+a-2q}$. Да бисмо овај разломак ослободили од имагинарности у имениоцу треба и именилац и бројилац да помножимо са конјуговано-комплексним бројем од имениоца: $k = \dfrac{aq-1}{1+a-2q} \cdot \dfrac{\overline{1+a-2q}}{\overline{1+a-2q}} = \dfrac{(aq-1)\cdot(1+\overline{a}-2q)}{|1+a-2q|^2} = \dfrac{aq-1-2q^2a+2q+a\overline{a}\,q-\overline{a})}{|1+a-2q|^2}$, тј. добијамо

$$k = \frac{-1+3q-(a+\overline{a})}{|1+a-2q|^2} + a \cdot \frac{q+1-2q^2}{|1+a-2q|^2}$$

(овде смо користили да је $a\overline{a} = 1$ јер је A на јединичној кружници). У претходном изразу за k први сабирак је чисто реалан ($a + \overline{a} = 2\,\mathcal{R}e\ a$), а други је комплексан број a помножен реалним бројем. Стога, да би k био чисто реалан број, потребно је да важи $q + 1 - 2q^2 = 0$, односно добијамо квадратну једначину чија су решења $q_1 = 1$ и $q_2 = -\frac{1}{2}$ (кружница γ и права ℓ имају две пресечне тачке). Прво решење одговара тачки C ($Q \neq C$), те је $q = -\frac{1}{2}$. Стога је $m = |QC| = |c-q| = \frac{3}{2}$, те је $R = 1 = \dfrac{2}{3}m$.



На овај начин нико није радио задатак на такмичењу. Ову методу смо показивали ученицима Математичке гимназије у Београду.

Кроз ових 10 различитих решења дотакли смо се мноштва геометријских појмова, теорема и идеја. Тако се у овом осврту јављају Талесова и Птоломејева теорема, тетивни четвороугао, однос периферијског и централног угла, однос спољашњег и унутрашњег угла, збир углова у троуглу и четвороуглу, потенција тачке у односу на круг, "паковање" задатка да је O тежиште троугла $\triangle ADC$ (решење IV), хомотетија, особине висине једнакокраког троугла, Косинусна и Синусна теорема, као и сређивање тригонометријских израза, аналитичко решавање задатка, коефицијент правца праве, пресек две праве, површина троугла (и преко детерминанти – ту је могуће подсетити се сва три начина за израчунавање детерминанти: Сарусовог правила, Лапласовог развоја и свођења на троугаони облик), решавање геометријских задатака применом комплексних бројева. Такође, сва решења су детаљно исписана (не као у већини књига и збирки), да би ученици видели шта се од њих очекује да показују.