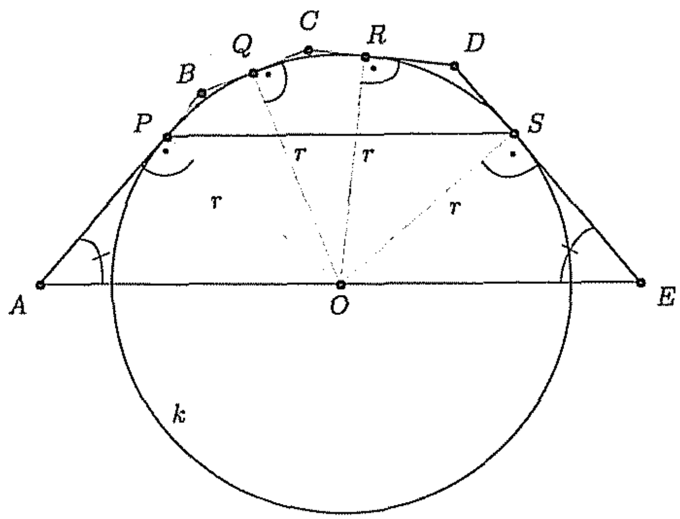
ЈБМО 2009

1. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$ и k е кружница со центар на страната AE која ги допира страните AB,BC,CD и DE во точките P,Q,R и S, соодветно (различни од темињата на петаголникот). Докажи, дека правите PS и AE се паралелни.

   Решение. Нека O е центарот на кружницата k. Имаме $\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\overline{DR}=\overline{DS}$ како тангентни отсечки на кружницата k. Од условот $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$ следува

$$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{DR}=\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DS}+\overline{ES}$$



Оттука добиваме $\overline{AP}=\overline{ES}$. Понатаму, од $\overline{AP}=\overline{ES}$, $\measuredangle APO=\measuredangle ESO=90^\circ$ и $\overline{PO}=\overline{SO}$ (радиуси на k) следува дека $\triangle APO\cong\triangle ESO$, па затоа $\measuredangle PAO=\measuredangle SEO$.

Од рамнокракиот $\triangle POS$ следува $\measuredangle OPS=\measuredangle OSP$, па затоа

$$\measuredangle APS=\measuredangle APO+\measuredangle OPS=90^\circ+\measuredangle OPS=90^\circ+\measuredangle OSP=\measuredangle PSE.$$

Сега, од четириаголникот $APSE$ заклучуваме

$$2\measuredangle EAP+2\measuredangle APS=\measuredangle EAP+\measuredangle APS+\measuredangle PSE+\measuredangle SEA=360^\circ,$$

па затоа $\measuredangle EAP+\measuredangle APS=180^\circ$, што значи дека четириаголникот $APSE$ е рамнокрак трапез, т.е. $AE\,||\,PS$.

2. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката
$$2^a \cdot 3^b + 9 = c^2.$$
Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$2^a \cdot 3^b = (c-3)(c+3). \qquad (1)$$
Ако $b=0$, тогаш лесно следува дека $a=4$ и $c=5$.
Ако $b>0$, добиваме $3|c^2$, т.е. $9|c^2$. Значи, $9|2^a \cdot 3^b$, па затоа $b>1$. Нека $c=3y$. Заменуваме во (1) и добиваме $(y-1)(y+1)=2^a \cdot 3^{b-2}$. Ако $a=0$, тогаш лесно се добива дека $b=3$ и $c=6$. Ако $a \ge 1$, тогаш $y-1$ и $y+1$ се парни броеви, па затоа $4|2^a \cdot 3^{b-2}$, т.е. $a \ge 2$. Сега равенката го добива видот
$$\tfrac{y-1}{2} \cdot \tfrac{y+1}{2} = 2^{a-2} \cdot 3^{b-2}.$$
Бидејќи $\frac{y-1}{2}$ и $\frac{y+1}{2}$ се последователни броеви, тие се заемно прости, па затоа се степени на 2 и 3. Нека $m=a-2$ и $n=b-2$. Можни се два случаја.
Прв случај. Ако $\frac{y-1}{2}=2^m$ и $\frac{y+1}{2}=3^n$, тогаш $2^m-3^n=1$, па затоа $m>n$. Ако $n=0$, тогаш $m=1$ и $a=3, b=2$ и $c=9$. Ако $n>0$, тогаш разгледувајќи по модул 3 заклучуваме дека m е парен број. Нека $m=2t$. Тогаш $(2^t-1)(2^t+1)=3^n$, па како $(2^t+1)-(2^t-1)=2$ заклучуваме дека $2^t-1=1$ и $2^t+1=3^n$. Значи, $t=1, m=2, n=1$ и $a=4, b=3, c=21$.
Втор случај. Ако $\frac{y-1}{2}=3^n$ и $\frac{y+1}{2}=2^m$, тогаш $3^n-2^m=1$. Јасно, $m>0$. Ако $m=1$ добиваме $n=1$ и $a=3, b=3, c=15$. Ако $m>1$, тогаш разгледувајќи ја претходната равенка по модул 4 заклучуваме дека n е парен број. Нека $n=2t$, од каде наоѓаме $(3^t-1)(3^t+1)=2^m$. Бидејќи $(3^t+1)-(3^t-1)=2$, мора да важи $3^t-1=2$ и $3^t+1=2^{b-1}$, од каде следува $t=1, n=2, m=3$ и $a=5, b=4, c=51$.
Непосредно се проверува најдените тројки (a,b,c) навистина се решенија на дадената равенка.

3. Нека $x, y, z \in (0,1)$ се такви што $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Докажи дека најмалку еден од броевите $(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x$ е поголем или

еднаков на $\frac{1}{4}$.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството $(2a-1)^2 \geq 0$ следува неравенството $a(1-a) \leq \frac{1}{4}$. Затоа

$$(xyz)^2 = (x(1-x))(y(1-y))(z(1-z)) \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64}\text{, т.е. } xyz \leq \frac{1}{8}.$$

Од неравенството $xyz \leq \frac{1}{8}$ следува дека најмалку еден од броевите x, y, z е помал од $\frac{1}{2}$. Без ограничување на општоста нека $x \leq \frac{1}{2}$. Тогаш $1-x \geq \frac{1}{2}$.

Нека претпоставиме дека

$$(1-x)y < \frac{1}{4}, (1-y)z < \frac{1}{4}, (1-z)x < \frac{1}{4}.$$

Тогаш

$$y < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2},$$

па затоа $1-y > \frac{1}{2}$. Аналогно заклучуваме дека $z < \frac{1}{2}$ и $1-z > \frac{1}{2}$. Сега,

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \geq xyz = (1-x)(1-y)(1-z) > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Нека претпоставиме дека

$$(1-x)y < \frac{1}{4}, (1-y)z < \frac{1}{4}, (1-z)x < \frac{1}{4}.$$

Ги собираме овие три неравенства и добиваме

$$(1-x)y + (1-y)z + (1-z)x < \frac{3}{4}. \quad (1)$$

Ги множиме овие три неравенства (сите страни се позитивни) и добиваме

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{64}.$$

Ако го искористиме условот на задачата, слично како во првиот начин на решавање се добива $xyz \leq \frac{1}{8}$. Исто така и $(1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{8}$. Ако го развиеме изразот на левата страна на последното неравенство добиваме

$$1-(x+y+z)+xy+yz+zx < xyz + \frac{1}{8} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} < \frac{1}{4}.$$

Ова бе еквивалентно со

$$-(x+y+z)+xy+yz+zx < -\frac{3}{4},$$

т.е. со

$$(1-x)y+(1-y)z+(1-z)x>\frac{3}{4}.$$

Последното неравенство противречи на (1), и од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

4. Во рамнината се дадени 2009 плави и црвени точки такви што на секоја единечна кружница со центар во плава точка се наоѓаат точно две црвени точки. Определи го најголемиот можен број на плави точки.

Решение. Секој пар црвени точки се наоѓа најмногу на две единечни кружници со центри во плави точки. Бидејќи n црвени точки формираат $\frac{n(n-1)}{2}$ парови црвени точки, заклучуваме дека бројот на плавите точки е помал или еднаков на $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$. Затоа вкупниот број плави и црвени точки е помал или еднаков од $n+n(n-1)=n^2$. Но, вкупниот број точки е 2009, па затоа $n^2\geq 2009$, од каде добиваме $n\geq[\sqrt{2009}]+1=45$.

Останува да најдеме пример кој покажува дека постои конфигурација со 45 црвени точки која ги исполнува условите на задачата. Да распоредиме 45 црвени точки на отсечка со должина 1. Околу секоја од овие црвени точки опишуваме кружница со радиус 1. Бидејќи центрите на овие кружници се на растојаниеја помали од 1, добиваме дека секои две од опишаните кружници се сечат. Понатаму, не постојат три од опишаните кружници кои се сечат во иста точка, бидејќи тогаш единичната кружница со центар во таа точка треба отсечката со должина 1 да ја сече во три различни точки, што не е можно. Според тоа, вкупниот број пресечни точки е $45\cdot 44=1980$. Да обоиме 1964 од овие токи во плаво. Сега добивме конфигурација од $1964+45=2009$ плави и црвени точки кои ги задоволува условите на задачата. Бидејќи оваа конфигурација мора да има најмалку 45 црвени точки, таа има најмногу 1964 плави точки.