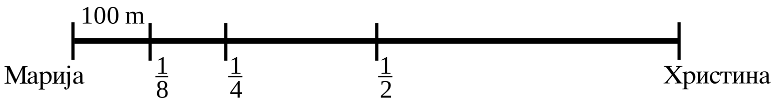
Катерина Аневска, Скопје
Валентина Гоговска, Скопје

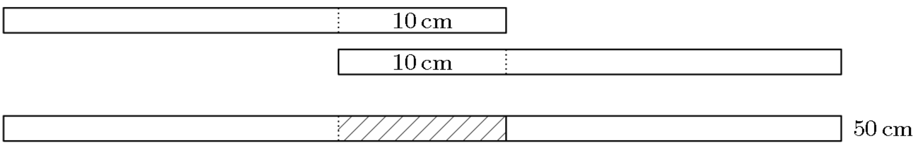
ПЕТНАЕСЕТ ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ПЕТТО ОДДЕЛЕНИЕ

Задача 1. Марија и Христина живеат на двата краја на иста улица (цртеж долу). Колку е долга улицата на која живеат двете девојчиња?



Решение. Според податоците од цртежот една осмина од должината на улицата е еднаква на $100\,m$. Значи, целата улица е осум пати подолга од $100\,m$, т.е. таа е долга $8 \cdot 100 = 800\,m$.

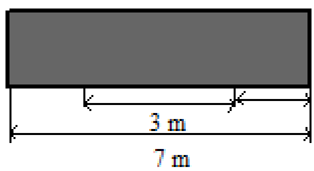
Задача 2. Елеонора има 4 ленти од хартија со иста должина (види цртеж). Со преклопување од $10\,cm$ залепила две од лентите и добила лента која е долга $50\,cm$.



Со другите две ленти Елеонора сака да добие лента која ќе биде долга $56\,cm$. Колку треба да биде преклопувањето при второто лепење на двете ленти?

Решение. Од двата дела кои се преклопени, едниот учествува во должината на првата лента која ја добила Елеонора. Затоа вкупната должина на двете ленти е $50 + 10 = 60\,cm$. Оттука следува дека за да при второто лепење Елеонора добие лента со должина $56\,cm$ преклопувањето треба да биде $60 - 56 = 4\,cm$.

Задача 3. Една табла е долга $7\,m$. Должината на средниот дел на таблата е $3\,m$. Другите два дела се со еднаква должина. Колку е долг десниот дел на таблата (види цртеж).

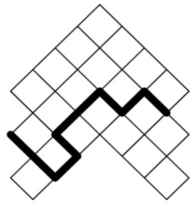


Решение. Левиот и десниот делбен дел од таблата имаат еднаква должина x, па затоа

$$x+3+x=7,$$
$$2x=7-3,$$
$$x=4:2=2\ m.$$

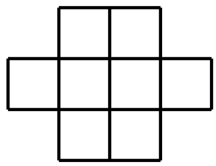
Значи, должината на десниот делбен дел е $2\,m$.

Задача 4. На цртежот десно е прикажан дел од табла на која плоштината на секое квадратче е еднаква на $4\,cm^2$. Колку е долга задебеленатa искршена линија прикажана на цртежот?



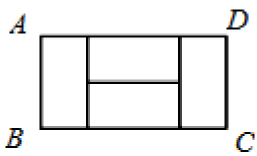
Решение. Бидејќи $2\cdot 2=4$, заклучуваме дека должината на страната на квадратчињата од кои е составена фигурата е еднаква на $2\,cm$. Задебеленатa линија содржи 9 страни, па затоа нејзината должина е еднаква на $9\cdot 2=18\,cm$.

Задача 5. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од идентични квадрати. Нејзиниот периметар е еднаков на $42\,cm$. Определи ја плоштината на оваа фигура.



Решение. Пеиметарот на дадената фигура е составен од $3+4+3+4=14$ страни на квадратите. Според тоа, должината на страната на еден квадрат е еднаква на $42:14=3\,cm$. Дадената фигура е составена од 8 еднакви квадрати со должина на страна $3\,cm$. Затоа нејзината плоштина е $P=8\cdot 3^2=72\ \text{cm}^2$.

Задасча 6. Правоаголникот $ABCD$ на цртежот е составен од четири исти правоаголници. Должината на отсечката BC е 1 *cm*. Колку е долга страната AB?

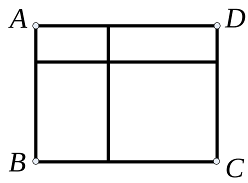


Решение. Од цртежот е јасно дека должината a на подолгата страна страна на малите правоаголници и два пати поголема од должината b на страната на пократката нивна страна, т.е. $a=2b$. Тоа значи дека

$$BC=b+a+b=a+2b=2a.$$

Според тоа, $2a=1$, т.е. $AB=a=\frac{1}{2}$.

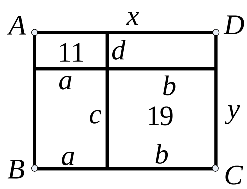
Задача 7. Правоаголникот $ABCD$ е разделен на 4 помали правоаголници како што е прикажано на цртежот десно. Периметрите на три од нив се 11, 16 и 19. Периметарот на четвртиот делбен правоаголник не е ниту најмал, ниту најголем. Определи го периметарот на правоаголникот $ABCD$?



Решение. Бидејќи периметарот L_4 на четвртиот правоаголник не е ниту најмал ниту најголем, добиваме дека

$$11 < L_4 < 19.$$

Оттука следува дека распоредот на делбените правоаголници е како на цртежот десно.



Ако должините на страните на правоаголникот со периметар 11 ги означиме со a и d, а должините на страните на правоаголникот со периметар 19 ги означиме со b и c, тогаш

$$2a+2d=11,$$
$$2b+2c=19.$$

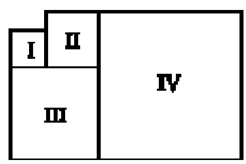
Со нивно собирање добиваме

$$2(a+b)+2(c+d)=30.$$

Ако x и y се должините на страните на правоаголникот $ABCD$, тогаш според ознаките на цртежот имаме $x=a+b$ и $y=c+d$, па за неговиот периметар добиваме

$$L=2x+2y=2(a+b)+2(c+d)=30.$$

Задача 8. Фигурите I, II, III и IV се квадрати. Периметарот на квадратот I е 16 *m*, а периметарот на квадратот II е 24 *m*. Пресметај ги периметарот на квадратот IV и плоштината на целата фигура

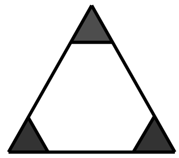


Решение. Јасно должината на страната на квадратот I е еднаква на $16:4=4\,m$, а должината на страната на квадратот II е еднаква на $24:4=6\,m$. Според тоа, должината на страната на квадратот III е еднаква на $4+6=10\,m$, а должината на страната на квадратот IV е еднаква на $10+6=16\,m$. Конечно, периметарот на квадратрот на IV е еднаков на $4\cdot 16=64\,m$.

За плоштината на целата фигура имаме:

$$P=4\cdot 4+6\cdot 6+10\cdot 10+16\cdot 16=16+36+100+256=408\,cm^2.$$

Задача 9. Од рамностран триаголник со страна $6\,cm$ се отсечени три рамнострани триаголници, секој од кои содржи по едно теме од дадениот триаголник (цртеж десно).



Трите мали триаголничиња заедно имаат ист периметар како и белиот шестаголник. Определи ја должината на страната на малите триаголничиња.

Решение. Нека должината на страната на малите триаголници е x, а должината на страните на шестаголникот се x и y. Од условот на задачата следува

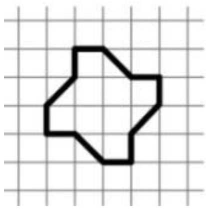
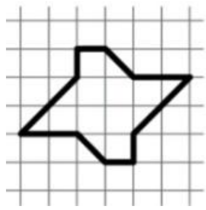
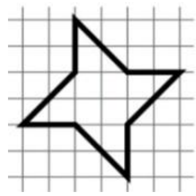
$$3\cdot 3x = 3x + 3y,$$
$$6x = 3y,$$
$$y = 2x.$$

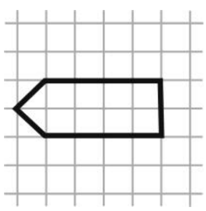
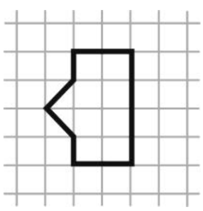
Бидејќи должината на страната на триаголникот е $6\,cm$ имаме

$$y + 2x = 6,$$
$$2x + 2x = 6,$$
$$4x = 6,$$
$$2x = 3,$$
$$x = \tfrac{3}{2}\,cm.$$

Значи, должината на страната на малите триаголничиња е еднаква на $\frac{3}{2}\,cm$.

Задача 10. Дадените фигури се нацртани во квадратни мрежи кај кои должинитер на страните на квадратчињата се еднакви на $1\,cm$. Која фигура има најголема плоштина?

(A)

(B)

(C)


(D)

(E)


Решение. Јасно, плоштината на секое квадратче е еднаква на плоштината на две триаголничиња кои се содржат во дадените фигури. Оттука, споредувањето на плоштините ќе го направиме така што плоштините ќе ги изразиме преку бројот на квадратчињата и триаголничињата, т.е. преку бројот на триаголничињата.

Во фигурата (A) имаме 8 квадратчиња и 4 триаголничиња, што значи $8\cdot 2+4=20$ триголничиња.

Во фигурата (B) имаме 8 квадратчиња и 4 триаголничиња, што значи $8\cdot 2+4=20$ триголничиња.

Во фигурата (C) имаме 8 квадратчиња и 8 триаголничиња, што значи $8\cdot 2+8=24$ триголничиња.

Во фигурата (D) имаме 8 квадратчиња и 2 триаголничиња, што значи $8\cdot 2+2=18$ триголничиња.

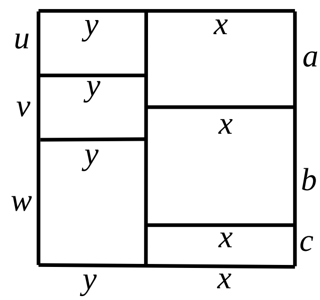
Во фигурата (E) имаме 8 квадратчиња и 2 триаголничиња, што значи $8\cdot 2+2=18$ триголничиња.

Според тоа, најмногу триаголничиња има фигурата (C), па затоа нејзината плоштина е најголема.

Задача 11. Лист хартија во облик на квадрат е исечен на шест правоаголни парчиња. Збирот на периметрите на шесте правоаголници е $120cm$. Определи ја плоштината на листот хартија?

Решение. Страните на делбените правоаголници да ги означиме како на цртежот десно. Тогаш од условот на задачата имаме

$$6x+6y+2(a+b+c+u+v+w)=120.$$



Ако m е должината на страната на квадратот, тогаш

$$x+y=m,$$
$$a+b+c=m \text{ и}$$
$$u+v+w=m,$$

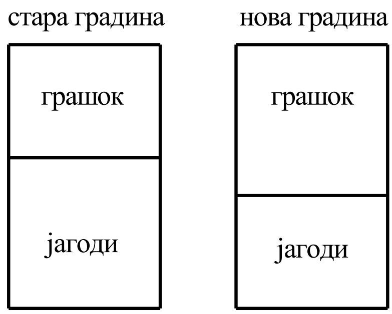
од каде што добиваме

$$6m+2(m+m)=120.$$

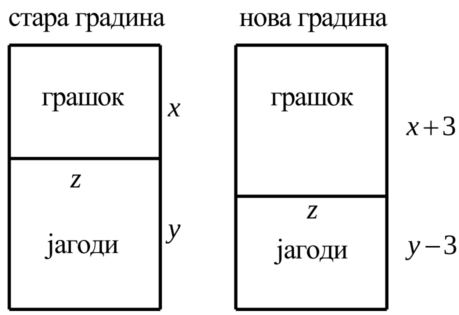
Од последната равенка следува $m=12\,cm$, па затоа плоштината на листот хартија е

$$P=m\cdot m=12\cdot 12cm^2=144cm^2.$$

Задача 12. Госпоѓата Марија во својата градина одгледувала грашок и јагоди. Оваа година правоаголната површина под грашок ја наголемила до квадратна, проширувајќи ја едната страна за 3 метри (види цртеж). Притоа, површината со јагоди се намалила за $15\,m^2$. Определи ја плоштината на површината под грашок пред наголемувањето?



Решение. Нека x и y се должините на страните на правоаголните површини кои се наголемиле и намалиле за $3\,m$. Ако z е ширината на правоаголните површини, тогаш од условот на задачата имаме



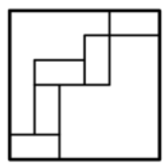
$$z\cdot 3=15$$
$$x+3=z$$

Според тоа,

$$z=5\,m \text{ и } x=z-3=5-3=2\,m.$$

Значи, пред промената, госпоѓа Марија имала $10\,m^2$ под грашок.

Задача 13. Пет еднакви правоаголници се ставени во внатрешноста на квадрат со страна $24\,cm$, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на еден таков правоаголник.



Решение. Нека должината на поголемата страна на правоаголниците е еднаква на a, а на помалата е еднаква на b. Ако гледаме хоризонтално добиваме

$$a+b+a+a-b=24,$$

од каде наоѓаме $3a=24$, односно $a=8\,cm$. Ако гледме вертикално добиваме

$$b+a+a+b=24, \text{ т.е. } 2a+2b=24,$$

од каде $a+b=12$, т.е.

$$b=12-a=12-8=4\,cm.$$

Според тоа, плоштината на еден од поставените правоаголници е еднаква на $ab=8\cdot 4=32\,cm^2$.

Задача 14. Маја ги собрала должините на три страни од еден правоаголник и добила $44\,cm$. Јана ги собрала должините на три страни од истиот правоаголник и добила $40\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот.

Решение. Нека должините на страните на правоаголникот се a и b. Од резултатот на Маја добиваме $2a+b=44$, а од резултатот на Јана добиваме $a+2b=40$. Значи $b=44-2a$ и со замена во втората равенка наоѓаме

$$a+2(44-2a)=40,$$

од каде добиваме $88-3a=40$, па затоа $3a=88-40$, т.е. $a=16\,cm$. Според тоа, $b=44-2\cdot16=12\,cm$. Конечно, периметарот на четириаголникот е

$$L=2(a+b)=2(16+12)=56\,cm,$$

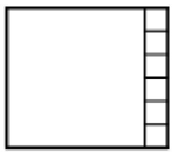
а неговата плоштина е

$$P=16\cdot12=192\,cm^2.$$

Задача 15. Петар сака правоаголникот со димензии 6×7 да го раздели на квадрати на кои страните им се природни броеви. Кој е најмалиот број на квадрати што може да се добие при такво разделување?

Решение. Очигледно е дека страните на делбените квадрати треба да се паралелни со страните на дадениот правоаголник. Ќе разгледаме повеќе случаи.

Случај 1. Во поделбата има делбен квадрат со страна 6.

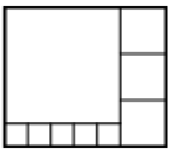


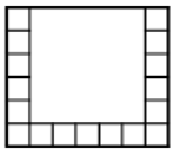
Може да има најмногу еден делбен квадрат со страна 6. Во тој случај има уште 6 делбени квадрати со страна 1 (види цртеж).

Значи, во овој случај имаме 7 делбени квадрати.

Случај 2. Во поделбата има делбен квадрат со страна 5.

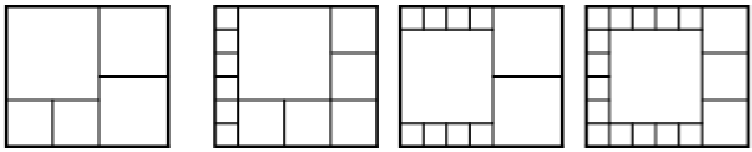
Може да има најмногу еден делбен квадрат со страна 5. Притоа можни се два подслучаи кои се дадени на долните цртежи.





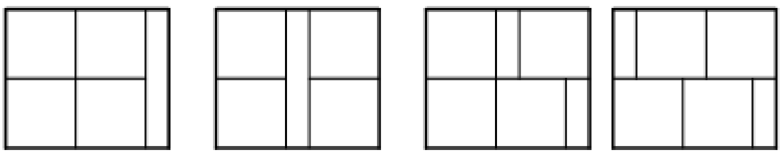
Во првиот подслучај (левиот цртеж), најмалиот број на делбени квадрати е 9, а во вториот подслучај (десниот цртеж) најмалиот број на делбени квадрати 18.

Случај 3. Во поделбата има делбен квадрат со страна 4.



Може да има најмногу еден делбен квадрат со страна 4. Можни се четири подслучаи, кои се дадени на горните цртежи. Во првиот подслучај најмалиот број на делбени квадрати е 5 (прв цртеж од лево кон десно). Во вториот подслучај најмалиот број на делбени квадрати е 12 . Во третиот подслучај најмалиот број на делбени квадрати е 11, а во четвртиот подслучај најмалиот број на делбени квадрати е 17.

Случај 4. Најголем делбен квадрат е квадрат со должина на страна 3. Притоа може да има еден, два, три или четири делбени квадрати со страна должина на страна 3.



Има четири делбени квадрати со должина на страна 3. Тогаш тие може да се распоредени на еден од следните начини:
Во секој од овие подслучаи најмалиот број на делбени квадрати е 11.

Има три делбени квадрати со должина на страна 3. Бидејќи

$$(42-27):4=\frac{15}{4},$$

минималниот број на делбени квадрати не може да е помал од 6.

Има два делбени квадрати со должина на страна 3. Бидејќи

$$(42-18):4=24:4=6,$$

минималниот број на делбени квадрати не може да е помал од 8.

Има еден делбен квадрат со должина на страна 3. Бидејќи

$$(42-9):4=\frac{33}{4},$$

минималнио број на делбени квадрати не може да е помал од 9.

Според дискусијата од четирите случаи, најмалиот број на делбени квадрати на кои може да се раздели правоаголник со димензии 7×6 е 5.