Osječki matematički list 13 (2013), 43-60

O univerzalnoj paraboličkoj konstanti

Bojan Kovačić * Ivana Božić † Tihana Strmečki ‡

Sažetak

U članku se razmatra univerzalna parabolička konstanta kao analogon broja π u slučaju kružnice. Pritom se zasebno navode svi bitniji pojmovi i rezultati iz algebarske teorije brojeva, elementarne matematike i diferencijalno-integralnoga računa nužni za potpunost i ispravnost cjelokupnoga razmatranja. Promatra se omjer duljine luka parabole određenog pravcem koji prolazi žarištem parabole usporedno s njezinom ravnalicom i udaljenosti žarišta parabole od njezine ravnalice. Pokazuje se da taj omjer ne ovisi o izboru parabole, pa se time dokazuje dobra definiranost pojma univerzalne paraboličke konstante. Uz primjenu Lindemannova rezultata o transcedentnosti broja π zaključuje se da je ta konstanta transcendentan, dakle i iracionalan broj. Ukratko se razmatra i svojstvo sličnosti krivulja, pa se utvrđuje da ono vrijedi za sve kružnice i za sve parabole, a ne vrijedi za elipse i hiperbole. Kao primjeri primjene promatrane konstante, izračunavaju se oplošja rotacijskih tijela dobivenih vrtnjom grafova dviju elementarnih funkcija oko osi apscisa, te prosjeci udaljenosti svih točaka jediničnoga kvadrata od središta toga kvadrata, odnosno od proizvoljnoga, ali fiksiranoga vrha kvadrata. Za probleme izračuna prosjeka navodi se i njihova formulacija u terminima teorije vjerojatnosti.

Ključne riječi: *univerzalna parabolička konstanta, svojstva, primjene*

*Tehničko veleučilište u Zagrebu, e-mail: bkovacic@tvz.hr
†Tehničko veleučilište u Zagrebu, e-mail: ivana.bozic@tvz.hr
‡Tehničko veleučilište u Zagrebu, e-mail: matematika.tvz@gmail.com

Bojan Kovačić Ivana Božić Tihana Strmečki

On the universal parabolic constant

Abstract

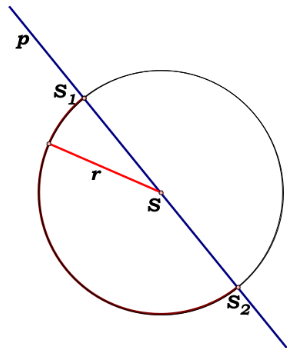
In this article the universal parabolic constant is defined as the analog of the number π in relation to the circle. For this purpose, all relevant terms and results in algebraic number theory, elementary mathematics and calculus are stated, necessary to consider the subject completely and adequately. It is shown that the ratio of arc length of the parabolic segment, determined by the line through the focus parallel to the directrix, and the distance between the focus and the directrix, does not depend on the particular parabola, justifying the constant's definition. Applying the Lindemann's result that the number π is trancedental, the proof is given that the universal parabolic constant is a transcendental and hence an irrational number. Furthermore, the property of similarity of curves is analyzed, establishing that all circles and parabolas satisfy this property, while ellipses and hyperbolas do not. Two sets of examples of the application of the parabolic constant are given. One is calculating the surface area of certain rotational solid objects, created by rotating graphs of elementary functions around the x-axis. The other involves analyzing problems of determining the average distance of points in a unit square to the center of the square, or to any randomly chosen but fixed vertex of the square. As to the latter, their probability theory counterparts are stated.

Keywords: *the universal parabolic constant, properties, application*

1 Uvod

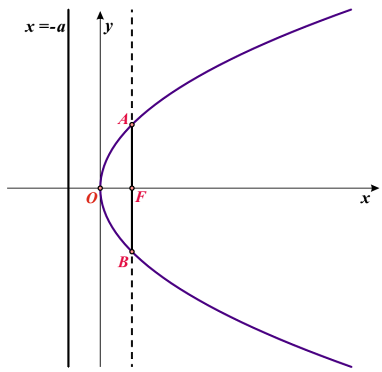
Neka je k kružnica polumjera $r > 0$ čije je središte točka S. Povuče li se točkom S proizvoljan pravac p, on će presjeći kružnicu u točkama S_1 i S_2 (vidjeti *Sliku 1*). Te dvije točke dijele cijelu kružnicu na dvije sukladne polukružnice. Prema definiciji kružnice vrijedi jednakost $|SS_1| = |SS_2| = r$. Omjer duljine bilo koje od dobivenih polukružnica i polumjera kružnice je konstantna vrijednost i ne ovisi niti o izboru kružnice, niti o izboru pravca p. Ta se konstanta označava s π. Njezinu približnu vrijednost na 35 decimala prvi je izračunao nizozemski matematičar Ludolph van Ceulen. Za praktične je potrebe dovoljno uzeti $\pi \approx 3.141592654$.

U ovom će se članku razmotriti analogon opisanoga svojstva kružnice koji vrijedi za bilo koju parabolu. Prema definiciji, parabola je geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od čvrste točke F (tzv. žarišta parabole) i čvrstoga pravca r (tzv. ravnalice parabole). Stoga je svaka parabola jednoznačno određena zadavanjem točke F i pravca r. Parabolin analogon



Slika 1: Kružnica, $l(\overset{\frown}{S_1S_2}) : r = \pi$

središta kružnice jest žarište parabole, dok je analogon pravca p pravac q koji prolazi žarištem F usporedno s pravcem r. Takav pravac q je jedinstven i siječe parabolu u točno dvije točke: A i B (vidjeti *Sliku 2*). Pokazat će se da je omjer duljine luka parabole $\overset{\frown}{AB}$ i udaljenosti žarišta F od pravca r konstantan i da ne ovisi o izboru parabole. Taj se omjer naziva *univerzalna parabolička konstanta*. Definicija i osnovna svojstva te konstante mogu se naći u [2] i [5].



Slika 2: Parabola $y^2 = 4ax$ i njezin latus rectum

2 Pregled osnovnih matematičkih definicija i rezultata

U ovoj se točki pregledno iznose osnovne matematičke definicije i rezultati koji će se efektivno koristiti u daljnjem tekstu rada.

2.1 Pregled definicija i rezultata iz algebarske teorije brojeva

Definicija 2.1. Realan broj a je **racionalan** ako postoje (barem jedan) cijeli broj m i (barem jedan) prirodan broj n takvi da vrijedi $a = \frac{m}{n}$. Skup svih racionalnih brojeva standardno se označava slovom $\mathbb{Q}$. Realan broj koji nije racionalan naziva se **iracionalan**.

Definicija 2.2. Realan broj a je **algebarski** ako postoji netrivijalan polinom q jedne realne varijable s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $q(a) = 0$. Realan broj koji nije algebarski naziva se **transcendentan**.

Primjer 1. Broj $\sqrt{2}$ je algebarski broj.

Dokaz. Polinom $q(x) = x^2 - 2$ ima cjelobrojne koeficijente i svojstvo $q(\sqrt{2}) = 0$. Prema *Definiciji 2.2.*, to znači da je broj $\sqrt{2}$ algebarski broj. □

Primjer 2. Broj $\sqrt{2} + 1$ je algebarski broj.

Dokaz. Polinom $q_1(x) = x^2 - 2x - 1$ ima cjelobrojne koeficijente i svojstvo $q_1(\sqrt{2} + 1) = 0$. Prema *Definiciji 2.2.*, to znači da je broj $\sqrt{2} + 1$ algebarski broj. □


Ferdinand von Lindemann *(1852.–1939.)* *njemački matematičar, zaslužan za dokazivanje da je π transcedentan broj.*

Teorem 2.1. Svaki transcendentan broj je iracionalan.

Napomena 2.1. Njemački je matematičar F. Lindemann 1882. godine dokazao da je π transcendentan broj. Prema *Teoremu 2.1.* to znači da je π iracionalan broj.

Definicija 2.3. Skup realnih brojeva $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je **linearno nezavisan** nad skupom $\mathbb{Q}$ ako iz jednakosti $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a_i = 0$ slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Skup koji nije linearno nezavisan naziva se **linearno zavisan**.

Primjer 3. Skup $A = \{\pi, \pi^2\} \subset \mathbb{R}$ je linearno nezavisan nad skupom $\mathbb{Q}$.

Rješenje. Treba uočiti da je za svaki $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ broj $a\pi$ iracionalan. Doista, ako bi bilo $b := a\pi \in \mathbb{Q}$, onda se dijeljenjem s a dobije jednakost $\pi = \frac{b}{a}$. Broj $\frac{b}{a}$ je racionalan jer je količnik dvaju racionalnih brojeva, pa slijedi da je i broj π racionalan.
Taj zaključak proturiječi činjenici da je π iracionalan broj. Stoga je pretpostavka $b \in \mathbb{Q}$ bila pogrešna, tj. broj $a\pi$ je iracionalan. Linearna nezavisnost skupa S pokazuje se koristeći *Definiciju 2.3.* Pretpostavi se da vrijedi jednakost $a_1\pi + a_2\pi^2 = 0$ za neke $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$. Dijeljenjem te jednakosti s $\pi \neq 0$ dobije se $a_1 + a_2\pi = 0$, odnosno $a_1 = -a_2\pi$. Ako bi bilo $a_2 \neq 0$, onda bi lijeva strana posljednje jednakosti bila racionalan, a desna iracionalan broj (prema tvrdnji s početka dokaza), što je nemoguće. Stoga mora biti $a_2 = 0$, pa iz $a_1 = -a_2\pi$ odmah slijedi $a_1 = 0$. Time je pokazano da iz jednakosti $a_1\pi + a_2\pi^2 = 0$ slijedi $a_1 = a_2 = 0$, što znači da je S linearno nezavisan nad skupom $\mathbb{Q}$. ◄

Primjer 4. Skup $B = \{\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}\} \subset \mathbb{R}$ je linearno zavisan nad skupom $\mathbb{Q}$.

Rješenje. Tvrdnja izravno slijedi npr. iz jednakosti

$$1 \cdot (\sqrt{2}-1) + 1 \cdot (\sqrt{2}+1) + (-2) \cdot (\sqrt{2}) = 0.$$

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815.–1897.), *njemački matematičar, smatran "ocem moderne matematičke analize".*

Teorem 2.2 (Lindemann,1882.). Za svaki algebarski broj $a \neq 0$ broj e^a je transcedentan.

Dokazi *Teorema 2.1.* i 2.2. mogu se naći npr. u [4] ili [1].

2.2 Pregled definicija i rezultata iz elementarnih matematičkih funkcija

Definicija 2.4. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : A \to B$ je **parna** ako za svaki $x \in A$ vrijedi:

$$-x \in A \tag{1}$$

$$f(-x) = f(x). \tag{2}$$

Propozicija 2.1. Za funkciju $f(x) = \ln x$ vrijedi jednakost: $f(\sqrt{2}-1) = -f(\sqrt{2}+1)$.

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
f(\sqrt{2}-1) = \ln(\sqrt{2}-1) &= \ln\left[\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}\right] \\
&= \ln\frac{1}{\sqrt{2}+1} \\
&= \ln 1 - \ln(\sqrt{2}+1) \\
&= -f(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}
$$

Propozicija 2.2.

$$\lim_{y\to 0_+}(y^3 \ln y) = 0$$

Dokaz. Primijenit će se L'Hospitalovo pravilo (za detalje vidjeti npr. [3]):

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0_+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dobiva se:

$$L_1 = \lim_{y\to 0_+}(y^3 \ln y) = \lim_{y\to 0_+}\frac{\ln y}{y^{-3}} = \lim_{y\to 0_+}\frac{y^{-1}}{(-3)y^{-4}} = \lim_{y\to 0_+}\frac{y^3}{-3} = 0.$$

2.3 Pregled definicija i rezultata iz diferencijalnog i integralnog računa

Teorem 2.3. (**Newton-Leibnizova formula**)
Neka je zadana neprekidna realna funkcija f na segmentu $[a, b]$. Neka je F bilo koja realna funkcija takva da vrijedi $F'(x) = f(x)$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Napomena 2.2. Funkcija F iz *Teorema 2.3.* naziva se *primitivna funkcija* od f. Svaka integrabilna realna funkcija ima beskonačno mnogo različitih primitivnih funkcija koje se međusobno podudaraju do na slobodni član, tj. konstantu C. Radi jednostavnosti, prigodom računanja određenih integrala obično se uzima $C = 0$.

Napomena 2.3. Newton-Leibnizova formula ima svoju varijantu i za slučaj nepravih integrala. Npr. ako se funkcija f integrira na intervalu $\langle -\infty, b]$ ili $[a, +\infty\rangle$, onda vrijede formule

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{a\to -\infty} F(a),$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a).$$

Analogno, ako funkcija f nije definirana u donjoj granici područja integracije (tj. u točki $x = a$), onda vrijedi formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x \to a_+} F(a).$$

Propozicija 2.3. Neka je f parna funkcija definirana na segmentu $[-a, a]$, za neki $a > 0$. (Kaže se da je navedeni segment *simetričan u odnosu na nulu*.) Tada je

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Propozicija 2.4. Neka je K krivulja zadana jednadžbom $y = f(x)$. Duljina luka krivulje iznad segmenta $[a, b]$ računa se prema formuli

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Propozicija 2.5. Neka je ravninska krivulja K zadana jednadžbom $y = f(x)$, za $x \in [a, b]$. Oplošje rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivulje K oko osi x računa se prema formuli

$$O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Dokazi *Teorema 2.3.*, te Propozicija 2.3.-2.5. mogu se naći npr. u [3].

Teorem 2.4. (**Fubinijev teorem**)
Neka je f neprekidna realna funkcija dviju realnih varijabli definirana na pravokutniku $\Pi = [a, b] \times [c, d]$. Tada je vrijednost integrala funkcije f na pravokutniku Π dana formulom

$$\int_\Pi f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy.$$

Dokaz *Teorema 2.4.* može se naći npr. u [6].

Definicija 2.5. Neka je f integrabilna funkcija dviju realnih varijabli definirana na pravokutniku Π. Prosječna vrijednost te funkcije računa se prema formuli

$$\overline{f} = \frac{1}{P(\Pi)} \int_\Pi f(x,y)\, dx\, dy,$$

gdje je $P(\Pi)$ površina pravokutnika Π.

U *Tablici 1.* navode se neki manje jednostavni integrali koji će se kasnije efektivno koristiti. Pritom su $A, B, C \in \mathbb{R}$ konstante. Provjera istinitosti *Tablice 1.* prepušta se čitatelju.

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\sqrt{A^2x^2+B^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{A^2x^2+B^2}+\frac{B^2}{2A}\ln(Ax+\sqrt{A^2x^2+B^2})+C$
$x^2\ln x$	$\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$
$x^2\ln(\sqrt{x^2+1}+1)$	$-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{3}x^3\ln(\sqrt{x^2+1}+1)-\frac{1}{6}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$
$x^2\ln(\sqrt{4x^2+1}+1)$	$-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{24}x\sqrt{4x^2+1}+\frac{1}{3}x^3\ln(\sqrt{4x^2+1}+1)-\frac{1}{48}\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})+C$

3 Izračun vrijednosti paraboličke konstante

Da bi se mogla izračunati vrijednost paraboličke konstante, nužno je odrediti analitičku jednadžbu parabole čije je žarište F, a ravnalica r. Pritom se pravokutni koordinatni sustav u ravnini postavlja tako da tjeme parabole bude u ishodištu, žarište F na osi apscisa (osi x), a ravnalica pravac usporedan s osi y, tj. pravac čija jednadžba ima oblik $x = A$, za neku konstantu $A \in \mathbb{R}$. Ovakva postavka vrlo pojednostavljuje analitičke izračune, a ne utječe na izračunate vrijednosti rezultata.
Spomenuta analitička jednadžba parabole određuje se sljedećim teoremom.

Teorem 3.1. Neka je $a > 0$ konstanta. Jednadžba parabole čije je žarište točka $F = (a, 0)$ i ravnalica pravac $r \ldots x = -a$ glasi $y^2 = 4ax$. Obratno, parabola čija je jednadžba $y^2 = 4ax$ ima žarište u točki $F = (a, 0)$ i ravnalicu $x = -a$.

Dokaz. Neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka parabole. Udaljenost između točaka T i F iznosi

$$|TF| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Udaljenost između točke T i ravnalice r iznosi $d(T, r) = |x + a|$.
Prema definiciji parabole, te dvije udaljenosti moraju biti jednake, pa mora vrijediti jednakost

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = |x + a|.$$

Obje strane ovoga algebarskoga izraza su nenegativni realni brojevi, pa se taj izraz smije kvadrirati. Tako se dobije ekvivalentan algebarski izraz

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2.$$

Sređivanjem toga izraza dobiva se $y^2 = 4ax$. Time je dokazana prva tvrdnja teorema.
Obratno, ako je $T = (x, y)$ bilo koja točka parabole $y^2 = 4ax$, onda je njezina udaljenost od točke $F = (a, 0)$ jednaka

$$|TF| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 4ax} = \sqrt{(x+a)^2} = |x+a| = d(T, r).$$

Dakle, točka T je jednako udaljena od točke F i od pravca r, pa iz definicije parabole slijedi da je F žarište parabole, a r njezina ravnalica. □

Točkom $F = (a, 0)$ povuče se pravac usporedan s ravnalicom r. Jednadžba toga pravca je $q \ldots x = a$. Taj pravac siječe parabolu $y^2 = 4ax$ u dvije točke A i B. Lako se vidi da te točke imaju koordinate $A = (a, 2a)$ i $B = (a, -2a)$. Dužina $\overline{AB}$ obično se naziva *latus rectum* (Lat. latus = strana, rectum = ispravan) (*vidjeti Sliku 2*).

Iz jednadžbe parabole $y^2 = 4ax$ izrazi se varijabla x

$$x = \frac{y^2}{4a}.$$

Derivacija toga izraza (kao funkcije varijable y) po varijabli y je

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a}.$$

Duljina luka $l(\overset{\frown}{AOB})$ jednaka je duljini njezina luka iznad segmenta $[-2a, 2a]$. Lako se provjeri da je funkcija $h(y) = 1 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2$ parna funkcija. Stoga je izraz za duljinu l dan u Propoziciji 2.4. zapravo određeni integral parne funkcije na intervalu simetričnom s obzirom na nulu. Računanje takvoga integrala pojednostavljuje se primjenom Propozicije 2.3.

$$l(\overset{\frown}{AOB}) = \int_{-2a}^{2a} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2} dy = 2\int_0^{2a} \frac{1}{2a}\sqrt{y^2 + 4a^2} dy = \frac{1}{a}\int_0^{2a} \sqrt{y^2 + 4a^2} dy.$$

Pripadni neodređeni integral $\int \sqrt{y^2 + 4a^2} dy$ odredi se izravno iz prvoga retka *Tablice 1.* Pritom treba odabrati $A = 1$, $B = 2a$, te preimenovati varijablu x u varijablu y. Slijedi

$$\int \sqrt{y^2 + 4a^2} dy = \frac{y}{2}\sqrt{y^2 + 4a^2} + 2a^2 \ln(y + \sqrt{y^2 + 4a^2}) + C.$$

Zaključuje se da je npr. funkcija $F(y) = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+4a^2} + 2a^2\ln(y+\sqrt{y^2+4a^2})$ primitivna funkcija funkcije $f(y) = \sqrt{y^2+4a^2}$. Lako se provjeri valjanost jednakosti:

$$F(2a) = 2a^2[\sqrt{2} + \ln(2a) + \ln(\sqrt{2}+1)],$$
$$F(0) = 2a^2\ln(2a)$$

Primjena Newton-Leibnizove formule iz *Teorema 2.3* daje

$$l(\widehat{AOB}) = \frac{1}{a}[F(2a) - F(0)] = 2a[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)].$$

Udaljenost žarišta F od pravca r jednaka je $d(F,r) = 2a$, pa je omjer duljine luka $\widehat{AOB}$ i udaljenosti žarišta F od pravca r jednak

$$\frac{l(\widehat{AOB})}{d(F,r)} = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) = const.$$

Konstanta $P_2 = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)$ naziva se **univerzalna parabolička konstanta**.
Njezina približna vrijednost iznosi $P_2 \approx 2.29558715$. Iz provedenoga izvoda je vidljivo da njezina vrijednost ne ovisi o vrijednosti konstante a, a samim tim ni o izboru polazne parabole. Time je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 3.2. Za proizvoljnu parabolu je omjer luka određenoga njezinim latus rectumom i udaljenosti njezina žarišta od njezine ravnalice konstantan i jednak P_2.

Napomena 3.1. Funkcija area sinus hiperbolni definirana je formulom

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Lako se provjeri jednakost $P_2 = \sqrt{2} + \operatorname{arcsinh} 1$.

4 Neka svojstva univerzalne paraboličke konstante

U *odjeljku 3.* približno je izračunata vrijednost univerzalne paraboličke konstante P_2. Time se odmah nameće pitanje je li P_2 racionalan ili iracionalan broj. Odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem 4.1. P_2 je transcedentan, dakle i iracionalan broj.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je P_2 algebarski broj. Tada postoji polinom q_2 s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $q_2(P_2) = 0$. Razlika $P_2 - \sqrt{2} = \ln(\sqrt{2}+1)$ je tada također algebarski broj jer je, prema dokazu Propozicije 1., taj broj korijen polinoma $q_3(x) = q_2(x) - x_2 + 2$. Primjenom *Definicije 2.3.* lako se pokazuje da je jednočlani skup $S = \{\ln(\sqrt{2}+1)\}$ linearno nezavisan nad skupom $\mathbb{Q}$. Jedini element skupa S je algebarski broj $\ln(\sqrt{2}+1)$. Prema *Teoremu 2.2.*, broj $e^{\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$ mora biti transcendentan, tj. broj $\sqrt{2}+1$ nije algebarski broj. Taj je zaključak u suprotnosti s *Primjerom 2*. Stoga je pretpostavka da je P_2 algebarski broj bila pogrešna. Dakle, P_2 je transcendentan broj.
Iracionalnost konstante P_2 slijedi izravno iz *Teorema 2.1.* □

Napomena 4.1. Provede li se razmatranje analogno onom iz *odjeljka 2.* za elipsu, odnosno hiperbolu, dobiva se da pripadni omjeri nisu konstantni. Pritom treba napomenuti da elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ imaju ravnalicu $x = \frac{a^2}{c}$, gdje je c apscisa žarišta elipse, odnosno hiperbole. U tim slučajevima spomenuti omjeri ovise o tzv. *numeričkom ekscentricitetu* (oznaka: ε) elipse, odnosno hiperbole definiranom s $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Grubo govoreći, numerički ekscentricitet "mjeri" odstupanje svake krivulje od pravilnoga kružnoga oblika. U skladu s tim, svaka kružnica ima numerički ekscentricitet jednak 0, dok svaka parabola ima numerički ekscentricitet jednak 1.

Na temelju jednakosti numeričkih ekscentriciteta definira se i pojam *sličnosti* dviju krivulja. Točnije, *dvije krivulje su slične* ako i samo ako imaju isti numerički ekscentricitet. Iz gornje napomene slijedi da su sve kružnice međusobno slične i da su sve parabole međusobno slične, te da analogna tvrdnja za elipse, odnosno hiperbole nije istinita.

5 Neke primjene univerzalne paraboličke konstante u geometriji

U ovom će se odjeljku pokazati kako se univerzalna parabolička konstanta javlja u izračunima površina rotacijskih ploha, te u geometrijskim problemima izračuna prosječnih vrijednosti.

5.1 Izračun površine rotacijske plohe

Primjer 5. Krivulja $y = \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, rotira oko osi x. Izračunati oplošje nastaloga rotacijskoga tijela.

Rješenje. Iz postavke primjera slijedi $f(x) = \cos x$, pa je $f'(x) = -\sin x$. Primjenom Propozicije 2.5. slijedi da je traženo oplošje dano izrazom:

$$O = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx.$$

Najprije se odredi neodređeni integral

$$\int \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx = \int \sqrt{1 + \sin^2 x} d(\sin x).$$

U prvi redak *Tablice 1.* uvrsti se $A = B = 1$, a umjesto varijable x piše $\sin x$. Slijedi

$$\int \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) + C.$$

Npr. funkcija $F(x) = \frac{1}{2} \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$.
Primjenom Newton-Leibnizove formule i Propozicije 2.1. slijedi

$$F(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\big[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\big] = \frac{1}{2} P_2$$

$$F(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\big[-\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1)\big] = \frac{1}{2}\big[-\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)\big] = -\frac{1}{2} P_2.$$

Stoga je traženo oplošje jednako:

$$O = 2\pi \big[F(\frac{\pi}{2}) - F(-\frac{\pi}{2})\big] = 2\pi P_2.$$

Primjer 6. Krivulja $y = e^x$, $x \in \langle -\infty, 0]$, rotira oko osi x. Izračunati oplošje nastaloga rotacijskoga tijela.

Rješenje. Očito je $f(x) = f'(x) = e^x$. Stoga je

$$O = 2\pi \int_{-\infty}^{0} e^x \sqrt{1 + (e^x)^2} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{0} e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{e^{2x} + 1} d(e^x).$$

Pripadni neodređeni integral odredi se tako da se u prvi redak *Tablice 1.* uvrsti $A = B = 1$, te umjesto x piše e^x. Slijedi

$$\int e^x \sqrt{1 + (e^x)^2} dx = \frac{e^x}{2} \sqrt{e^{2x} + 1} + \frac{1}{2} \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) + C.$$

Funkcija $F(x) = \frac{e^x}{2}\sqrt{e^{2x}+1} + \frac{1}{2}\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1})$ je primitivna funkcija funkcije
$f(x) = e^x\sqrt{1+(e^x)^2}$. Nije teško provjeriti valjanost jednakosti

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,$$

$$F(0) = \frac{1}{2}\big[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\big] = \frac{1}{2}P_2.$$

Primjenom varijante Newton-Leibnizove formule za neprave integrale iz Napomene 2.3. slijedi da je traženo oplošje jednako

$$O = 2\pi\big[F(0) - \lim_{x\to-\infty} F(x)\big] = \pi P_2.$$

5.2 Izračun prosječnih vrijednosti

Primjer 7. Neka je zadan jedinični kvadrat K čije je središte točka S. Promatra se skup $A = \{|TS| : T \in K\}$. Izračunati prosjek vrijednosti svih elemenata skupa A.

Napomena 5.1. Ekvivalentna formulacija *Primjera 7.* u terminima teorije vjerojatnosti glasi: Neka je K jedinični kvadrat. Na slučajan način bira se jedna točka unutar skupa K. Neka je X slučajna varijabla koja označava udaljenost izabrane točke od središta kvadrata. Izračunati očekivanje varijable X.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da su vrhovi kvadrata K točke
$A_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $A_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $A_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $A_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Središte kvadrata je sjecište dijagonala $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_4}$. Kvadrat je poseban slučaj paralelograma, pa se njegove dijagonale međusobno raspolavljaju. (Poznato je da se dijagonale svakoga paralelograma međusobno raspolavljaju.) To znači da je središte kvadrata K u polovištu npr. dijagonale $\overline{A_1A_3}$, a to je točka $P = \left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2}, \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right) = (0,0)$. Lako se provjeri da je točka P polovište i dijagonale $\overline{A_2A_4}$.
Neka je $T = (x, y) \in A$. Tada je udaljenost točaka T i S dana formulom

$$|TS| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Zbog proizvoljnosti točke T, dobiveni izraz se može shvatiti kao realna funkcija f dviju realnih varijabli. Njezina domena je kvadrat

$$K = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

te vrijedi

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Površina kvadrata K jednaka je 1, pa se primjenom *Definicije 2.5.* i *Teorema 2.4.* dobiva da je traženi prosjek dan izrazom

$$\overline{f} = \frac{1}{P(K)} \int_K f(x, y) = \frac{1}{1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx \right) dy.$$

U izračunu određenoga integrala $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx$ varijabla y shvaća se kao realna konstanta. Pripadni neodređeni integral odredi se tako da se u prvi redak *Tablice 1.* uvrsti $A = 1$ i $B = y$:

$$\int \sqrt{x^2 + y^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) + C.$$

Odabere se $C = 0$, pa se dobije primitivna funkcija $F_1 = F_1(x)$ definirana izrazom

$$F_1(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Nadalje, lako se provjeri da je funkcija f parna. Ta se funkcija integrira na segmentu simetričnom u odnosu na nulu. Primjenom Propozicije 2.3. zaključuje se

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

Primjenom Newton-Leibnizove formule i pojednostavljivanjem dobivena izraza slijedi

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx &= 2\left[F_1\left(\tfrac{1}{2}\right) - F_1(0)\right] \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{4y^2 + 1} - \tfrac{1}{2} y^2 \ln(y^2) + y^2 \ln(\sqrt{4y^2 + 1} + 1) - (\ln 2) y^2 \end{aligned}$$

Stoga se izraz za $\overline{f}$ može zapisati u obliku

$$\overline{f} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} \sqrt{4y^2 + 1} - \frac{1}{2} y^2 \ln(y^2) + y^2 \ln(\sqrt{4y^2 + 1} + 1) - (\ln 2) y^2 \right] dy.$$

Lako se provjeri da je gornji integral također integral parne funkcije na segmentu simetričnom u odnosu na nulu. Primjenom Propozicije 2.3. dobiva se

$$\begin{aligned}\overline{f} &= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\tfrac{1}{4}\sqrt{4y^2+1}-\tfrac{1}{2}y^2\ln(y^2)+y^2\ln(\sqrt{4y^2+1}+1)-(\ln 2)y^2\right]dy,\\ \overline{f} &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{4y^2+1}dy-\int_0^{\frac{1}{2}}y^2\ln(y^2)dy+2\int_0^{\frac{1}{2}}y^2\ln(\sqrt{4y^2+1}+1)dy-2\ln 2\int_0^{\frac{1}{2}}y^2dy.\end{aligned}$$

Zasebno se računa svaki od dobivena četiri integrala.
Prvi integral je određeni integral. Pripadni neodređeni integral odredi se tako da se u prvi redak *Tablice 1.* uvrsti $A=2$, $B=1$, a varijabla x preimenuje u varijablu y. Potom se odabere $C=0$ i primijeni Newton-Leibnizova formula. Redom se dobiva

$$F_2(y)=\frac{1}{2}y\sqrt{4y^2+1}+\frac{1}{4}\ln(2y+\sqrt{4y^2+1})\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{4y^2+1}dy=\frac{1}{2}\left[F_2\left(\frac{1}{2}\right)-F_2(0)\right]=\frac{1}{8}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$$

Drugi integral je nepravi integral jer podintegralna funkcija nije definirana u donjoj granici područja integracije, tj. za $y=0$. Pripadni neodređeni integral odredi se pomoću jednakosti

$$y^2\ln(y^2)=2y^2\ln y, \forall y>0,$$

i drugoga retka *Tablice 1* uz odabir $C=0$. Potom se primijene varijanta Newton-Leibnizove formule za neprave integrale iz Napomene 2.3., te Propozicija 2.2. Slijedi

$$F_3(y)=\frac{2}{3}y^3\ln y-\frac{2}{9}y^3\Longrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}y^2\ln(y^2)dy=F_3(\frac{1}{2})-\lim_{x\to 0}F_3(x)=F_3(\frac{1}{2})=-\frac{1}{36}-\frac{1}{12}\ln 2.$$

Treći integral je određeni integral. Pripadni neodređeni integral odredi se izravno iz četvrtoga retka *Tablice 1*. Odabere se $C=0$, pa slijedi

$$F_4(y)=-\frac{1}{9}y^3+\frac{1}{24}y\sqrt{4y^2+1}+\frac{1}{3}y^3\ln(\sqrt{4y^2+1}+1)-\frac{1}{48}\ln(2y+\sqrt{4y^2+1})\Longrightarrow$$

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}y^2\ln(\sqrt{4y^2+1}+1)dy=2\left[F_4\left(\frac{1}{2}\right)-F_4(0)\right]=-\frac{1}{36}+\frac{1}{24}\sqrt{2}+\frac{1}{24}\ln(\sqrt{2}+1).$$

Posljednji integral je "klasičan" tablični integral. Redom je

$$F_5(y)=\frac{1}{3}y^3\Longrightarrow$$

$$2\ln 2\int_0^{\frac{1}{2}} y^2\cdot dy = 2\ln 2\left[F_5\left(\frac{1}{2}\right) - F_5(0)\right] = \frac{1}{12}\ln 2.$$

Stoga je traženi prosjek vrijednosti svih elemenata skupa A jednak

$$\begin{aligned}\overline{f} &= \tfrac{1}{8}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)] + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{12}\ln 2 - \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{12}\sqrt{2} + \tfrac{1}{24}\ln(\sqrt{2}+1) - \tfrac{1}{12}\ln 2\\ &= \tfrac{1}{6}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]\\ &= \tfrac{1}{6}P_2\end{aligned}$$

Primjer 8. Neka je zadan jedinični kvadrat K. Neka je S proizvoljan, ali fiksiran vrh kvadrata. Promatra se skup $B = \{|TB| : T \in K\}$. Izračunati prosjek vrijednosti svih elemenata skupa B.

Napomena 5.2. Ekvivalentna formulacija *Primjera 8.* u terminima teorije vjerojatnosti glasi: Neka je K jedinični kvadrat i neka je S proizvoljan, ali fiksiran vrh toga kvadrata. Na slučajan način bira se jedna točka unutar skupa K. Neka je Y slučajna varijabla koja označava udaljenost izabrane točke od vrha S. Izračunati očekivanje varijable Y.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da je S ishodište pravokutnoga koordinatnog sustava u ravnini, te da su vrhovi kvadrata K točke S, $S_1 = (1,0)$, $S_2 = (1,1)$ i $S_3 = (0,1)$. Neka je $T = (x,y) \in B$. Tada je udaljenost točaka T i S dana formulom

$$|TS| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Zbog proizvoljnosti točke T, dobiveni izraz se može shvatiti kao realna funkcija f dviju realnih varijabli. Njezina domena je kvadrat

$$K = [0,1]\times[1,0],$$

te vrijedi

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Površina kvadrata K jednaka je 1, pa se primjenom *Definicije 2.5.* i *Teorema 2.4.* dobiva da je traženi prosjek dan izrazom

$$\begin{aligned}\overline{f} &= \tfrac{1}{P(K)}\int_K f(x,y)\\ &= \tfrac{1}{1}\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy\\ &= \int_0^1\left(\int_0^1\sqrt{x^2+y^2}dx\right)dy.\end{aligned}$$

Određeni integral $\int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}dx$ računa se analogno kao u *Primjeru 7.* Redom se dobiva

$$F_1(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}) \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}dx = F_1(1) - F_1(0) = \frac{1}{2}\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2}y^2\ln(\sqrt{y^2+1}+1) - \frac{1}{2}y^2\ln y.$$

Stoga se izraz za $\overline{f}$ može zapisati u obliku

$$\overline{f} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2}y^2\ln(\sqrt{y^2+1}+1) - \frac{1}{2}y^2\ln y\right]dy \Longrightarrow$$

$$\overline{f} = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y^2+1}dy + \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\ln(\sqrt{y^2+1}+1)dy - \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\ln y dy$$

Zasebno se računa svaki od dobivena tri integrala.
Prvi integral je određeni integral. Pripadni neodređeni integral odredi se izravno iz prvoga retka *Tablice 1.* odabirom $A = B = 1$, te preimenovanjem varijable x u y. Potom se odabere $C = 0$ i primijeni Newton-Leibnizova formula. Slijedi

$$F_6(y) = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+1}) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y^2+1}dy = \frac{1}{2}[F_6(1) - F_6(0)] = \frac{1}{4}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)].$$

Drugi integral je određeni integral. Pripadni neodređeni integral odredi se izravno iz trećega retka *Tablice 1.* Potom se odabere $C = 0$ i primijeni Newton-Leibnizova formula. Slijedi

$$F_8(y) = -\frac{1}{9}y^3 + \frac{1}{6}y\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{3}y^3\ln(\sqrt{y^2+1}+1) - \frac{1}{6}\ln(y+\sqrt{y^2+1}) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 y^2\ln(\sqrt{y^2+1}+1)dy = \frac{1}{2}[F_8(1) - F_8(0)] = -\frac{1}{18} + \frac{1}{12}\sqrt{2} + \frac{1}{12}\ln(\sqrt{2}+1).$$

Treći integral je nepravi integral jer podintegralna funkcija nije definirana u donjem kraju područja integracije, tj. za $y = 0$. Pripadni neodređeni integral odredi se izravno iz drugoga retka *Tablice 1.* Potom se odabere $C = 0$, pa se primijene varijanta Newton-Leibnizove formule za neprave integrale iz Napomene 2.3. i Propozicija 2.2. Slijedi

$$F_9(y) = \frac{1}{3}y^3\ln y - \frac{1}{9}y^3 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 y^2 \ln(y)dy = \frac{1}{2}[F_9(1) - \lim_{x\to 0} F_9(x)] = \frac{1}{2}F_9(1) = -\frac{1}{18}$$

Stoga je traženi prosjek jednak

$$\overline{f} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{18} + \frac{1}{12}\sqrt{2} + \frac{1}{12}\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{18},$$

$$\overline{f} = \frac{1}{3}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)] = \frac{1}{3}P_2.$$

Napomena 5.3. Potpuno jednaki rezultati, ali uz tehnički nešto kompliciranije izračune, dobiju se ako se za proizvoljan, ali fiksiran vrh kvadrata odabere bilo koji od preostalih triju vrhova kvadrata.

Napomena 5.4. Iz rezultata *Primjera 7.* i *Primjera 8.* izravno slijedi da će slučajno odabrana točka jediničnoga kvadrata očekivano biti dvostruko bliže središtu kvadrata nego bilo kojem njegovu vrhu.

Literatura

[1] Baker, A., *Transcendental Number Theory*, Cambridge, Engleska: Cambridge University Press (1975)

[2] Finch, S. R. , *Mathematical Constants*, Engleska: Cambridge University Press (2003)

[3] Kurepa, S., *Matematička analiza 2*, Zagreb: Školska knjiga (1997)

[4] Love, C. E., *Differential and Integral Calculus*, 4. izdanje, New York: Macmillan (1950)

[5] Reese, S. i Sondow, J., *Universal Parabolic Constant, MathWorld - A Wolfram Web Resource* (urednik: E. W. Weisstein), http://mathworld.wolfram.com/UniversalParabolicConstant.html, (8.11.2012.)

[6] Ungar, Š., *Matematička analiza u* $\mathbb{R}^n$, Zagreb: Golden marketing (2005)