Шефкет Арсланагиќ
Сараево, Босна и Херцеговина

ЕДНО НЕРАВЕНСТВО ВО ВРСКА СО СИМЕТРАЛАТА НА ВНАТРЕШЕН АГОЛ НА ТРИАГОЛНИК

Прво ќе дадеме два докази на следнава теорема:

Теорема 1. Нека во ΔABC, $\overline{AD}$ е должина на симетралата s_α на аголот $\alpha = \measuredangle BAC; \left(D \in BC\right)$. Тогаш важи неравенството

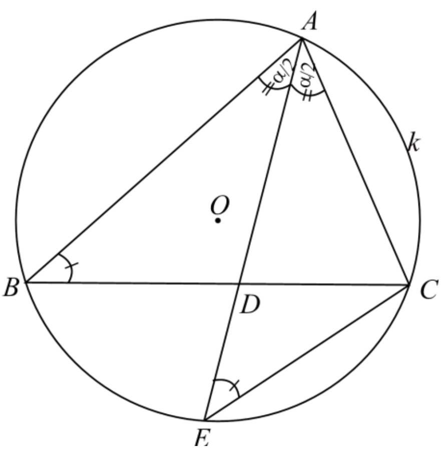
$$s_\alpha = \overline{AD} < \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} \,. \qquad (1)$$

Доказ 1: Нека симетралата на аголот α ја сече опишаната кружница k на ΔABC во точката E (види цртеж). Следува дека

$$\measuredangle ABC = \measuredangle AEC \,, \qquad (2)$$

како периферни агли над иста тетива AC (лак AC) на кружницата k. Натаму важи $\measuredangle BAE = \measuredangle EAC = \dfrac{\alpha}{2}$, т.е.

$$\measuredangle BAD = \measuredangle EAC = \frac{\alpha}{2} \,. \qquad (3)$$



Од (2) и (3) добиваме де

$$\Delta ABD \sim \Delta AEC \,,$$

а одовде

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \iff \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE} \,,$$

односно заради

$$\overline{AD} < \overline{AE} \iff \overline{AD}^2 < \overline{AE} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \,,$$

т.е.

$$s_\alpha = \overline{AD} < \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}$$, што требаше да се докаже.

Ставајќи во (1) $\overline{AB} = c$ и $\overline{AC} = b$, добиваме:

$$s_\alpha < \sqrt{bc} \,. \qquad (4)$$

Доказ 2: Ќе ја користиме познатата формула за должината на симетралата s_α на внатрешниот агол α на ΔABC:

$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)},$$

односно заради $s = \frac{a+b+c}{2}$:

$$s_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}}, \text{ т.е.}$$

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c)^2 - a^2}, \text{ па}$$

$$s_\alpha = \sqrt{bc[1-(\frac{a}{b+c})^2]},$$

а одовде заради $1-(\frac{a}{b+c})^2 < 1$:

$$s_\alpha < \sqrt{bc}, \text{ што требаше да се докаже.}$$

Аналогно ги добиваме следниве неравенства:

$$s_\beta < \sqrt{ac}, \qquad (5)$$

$$s_\gamma < \sqrt{ab}. \qquad (6)$$

Ќе наведеме неколку последици од теорема 1.

Последица 1. По множењето на неравенствата (4), (5) и (6), добиваме:

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma < \sqrt{bc}\cdot\sqrt{ac}\cdot\sqrt{ab}, \text{ т.е.}$$

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma < \sqrt{a^2b^2c^2},$$

односно

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma < abc. \qquad (7)$$

Последица 2. о собирање на неравенствата (4), (5) и (6) имаме:

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} \le \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2} = a+b+c = 2s$$

т.е.

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 2s. \qquad (8)$$

Последица 3. Од (4), (5) и (6) имаме:

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha < c\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac}$$

$$\le c\cdot\frac{a+b}{2} + a\cdot\frac{b+c}{2} + b\cdot\frac{a+c}{2} = ab+bc+ca$$

т.е.

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha < ab + bc + ca\,. \qquad (9)$$

Последица 4. По квадрирање на неравенствата (4), (5) и (6) и собирање на новодобиените неравенства добиваме:

$$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 < ab + ba + ca \qquad (10)$$

Неравенствата (7), (8), (9) и (10) може да се направат построги (т.е. да се поправат). Во [2] се дадени следниве неравенства:

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma \le rs^2, \text{ (8.14 од [2])}$$

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma \le s\sqrt{3}, \text{ (8.9 од [2])}$$

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha \le s^2, \text{ (8.16 од [2])}$$

$$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 \le s^2. \text{ (8.19 од [2])}$$

Лесно се докажува дека овие неравенства се појаки (подобри) од неравенствата (7), (8), (9) и (10), т.е.

$$rs^2 < abc\,, \qquad (11)$$

$$s\sqrt{3} < 2s\,, \qquad (12)$$

$$s^2 < ab + bc + ca\,. \qquad (13)$$

За да го докажеме неравенството (11), ќе земеме дека $abc = 4RP = 4Rrs$; и добиваме:

$$rs^2 < 4Rrs \Leftrightarrow s < 4R \Leftrightarrow 2s < 8R,$$

што е точно бидејќи од неравенството 5.3 од [2] имаме:

$$2s \le 3R\sqrt{3}\,,$$

а важи и $3R\sqrt{3} < 8R$.

Неравенстово (12) заради $\sqrt{3} < 2$ е очигледно точно.

Неравенството (13) се сведува на следново неравенство

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 < ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca),$$

кое лесно се докажува заради неравенството на триаголник:

$$|b-c| < a,\ |c-a| < b,\ |a-b| < c, \text{ т.е.}$$

$$(b-c)^2 < a^2,\ (c-a)^2 < b^2,\ (a-b)^2 < c^2,$$

па после собирањето:

$$\begin{aligned}(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2 &< a^2+b^2+c^2\\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 &< 2(ab+bc+ca)\\ \Leftrightarrow (a+b+c)^2 &< 4(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

На крајот да кажеме дека во неравенствата од [2] важи равенство ако и само ако се работи за рамностран триаголник.

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
[2] **Bottema, O, and oth.**, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ