XXXII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Ако a и b се прости броеви поголеми од 3, докажи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

Решение. Бидејќи a и b се прости броеви поголеми од 3, значи дека тие се непарни, и тогаш нивниот збир и нивната разлика се броеви деливи со 2, од каде следи дека

$$4\,|\,(a+b)(a-b). \tag{1}$$

Бидејќи a и b се прости броеви, тие се од облик $3k\pm1$. Ги имаме следните случаи, ако $a=3k+1$ и $b=3m+1$, тогаш $a-b=3(k-m)$, ако $a=3k+1$и $b=3m-1$, тогаш $a+b=3(k+m)$, ако $a=3k-1$ и $b=3m+1$, тогаш $a+b=3(k+m)$, и ако $a=3k-1$ и $b=3m-1$, тогаш $a-b=3(k-m)$. Значи,

$$3\,|\,(a+b)(a-b). \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме дека $12\,|\,(a+b)(a-b)$, што значи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

2. На парадата на кралските мускетари, гледајќи дека не можат да се наредат во редици од по 11 мускетари, началникот Д’Артањан решил да ги нареди мускетарите во редици од по 10 мускетари, но се покажало дека во последната редица останало едно слободно место. Потоа тој се обидел да ги нареди во редици од по 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 мускетари, но секој пат во последната редица останувало по едно слободно место. На крај мускетарите поминале во колона по еден, што предизвикало бурна смеа кај посетителите. Определи колку мускетари учествувале на парадата, ако се знае дека не биле повеке од 7000.

Решение. Нека x е бројот на мускетари кои учествувале на парадата. Од условот на задачата имаме дека $x+1$ се дели со 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, од каде следува дека

$$x+1=\mathrm{NZS}(2,3,4,5,6,7,8,9,10)\cdot k=2520\cdot k,$$

односно $x=2520k-1$. За $k\geq3$ се добива дека

$$x\geq2520\cdot3-1=7559>7000,$$

од каде следува дека $k=1$ или $k=2$. За $k=1$, се добива дека $x=2519$ што се дели со 11, па единствената можност е $k=2$, односно $x=2520\cdot 2-1=5039$ што не се дели со 11, односно на парадата учествувале 5039 мускетари.

3. Две полиња се засадени со рози и лаванди. 65% од плоштината на првото поле се рози, 45% од плоштината на второто поле се рози и 53% од плоштината на двете полиња заедно се рози. Колку проценти од вкупната плоштина (на двете полиња заедно) е плоштината на првото поле?

Решение. Да ги означиме со S_1 и S_2 плоштината на првото и второто поле соодветно.Тогаш, од условот на задачата добиваме дека

$$65\%S_1+45\%S_2=53\%(S_1+S_2),$$

од каде се добива дека

$$45\%(S_1+S_2)+20\%S_1=53\%(S_1+S_2),$$

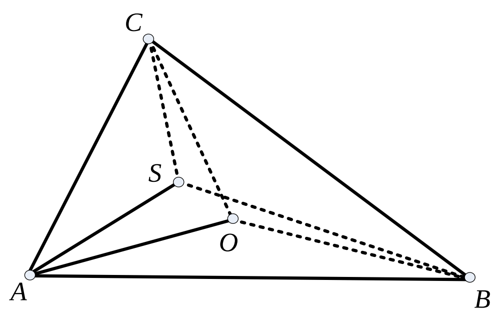
односно

$20\%S_1=8\%(S_1+S_2)$, или $S_1=\frac{8}{20}(S_1+S_2)=\frac{40}{100}(S_1+S_2)=40\%(S_1+S_2)$

Последното равенство покажува дека првото поле е 40% од вкупната плоштина на двете полиња заедно.

4. Нека O и S се центрите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC соодветно ($b<c$, каде $b=\overline{AC}$ и $c=\overline{AB}$). Докажи дека $\measuredangle SAO=\frac{1}{2}(\gamma-\beta)$, каде $\beta=\measuredangle ABC$ и $\gamma=\measuredangle ACB$.

Решение. Да претпоставиме дека триаголникот ABC е остроаголен (при тоа центарот O на опишаната кружница ќе биде внатре во триаголникот, види цртеж). Случајот кога триаголникот е тапоаголен се разгледува на сличен начин. Нека $\alpha=\measuredangle CAB$. Тогаш користејќи ги својствата на центрите на опишаната и впишаната кружница добиваме,



$$\begin{aligned}\measuredangle SAO=\measuredangle SAB-\measuredangle OAB&=\tfrac{1}{2}\alpha-\measuredangle ABO\\ &=\tfrac{1}{2}\alpha-(\beta-\measuredangle CBO)=\tfrac{1}{2}\alpha-\beta+\measuredangle BCO\\ &=\tfrac{1}{2}\alpha-\beta+(\gamma-\measuredangle OCA)\\ &=\tfrac{1}{2}\alpha-\beta+\gamma-\measuredangle CAO\\ &=\tfrac{1}{2}\alpha-\beta+\gamma-(\tfrac{1}{2}\alpha+\measuredangle SAO)\\ &=\gamma-\beta-\measuredangle SAO\end{aligned}$$

односно $2\cdot\measuredangle SAO=\gamma-\beta$, од каде се добива дека $\measuredangle SAO=\frac{1}{2}(\gamma-\beta)$, што требаше да се докаже.

5. Во рамнина се дадени 4 различни точки така што за секоја од нив постојат барем две од останатите три точки кои се на растојание не поголемо од 1 во однос на разгледуваната точка. Докажи дека четирите точки можат да се покријат со круг со радиус 1.

Решение. Ако постои точка од четирите дадени точки, така што сите три останати точки се на растојание не поголемо од 1 во однос на разгледуваната точка тогаш покривањето го правиме со круг со центар во таа точка и радиус 1. Нека не постои таква точка. Следува постојат точки A и B што се на растојание поголемо од 1 ($\overline{AB}>1$). Тогаш, од условот на задачата останатите две точки C и D се на растојание не поголемо од 1 и од A и од B ($\overline{AC}\le 1, \overline{AD}\le 1$ и $\overline{BC}\le 1, \overline{BD}\le 1$). Ќе покажеме дека сите 4 точки може да се покријат со кругот со центар во точката M–средина на отсечката AB и радиус 1. Од неравенството $\overline{AB}\le\overline{AC}+\overline{BC}\le 1+1=2$, следува дека точките A и B се во тој круг. Нека C_1 е симетрична точка на точката C во однос на центарот M. Тогаш, $\triangle BMC\cong\triangle AMC_1$ ($\overline{MB}=\overline{MA}$, $\measuredangle BMC=\measuredangle AMC_1$, $\overline{MC}=\overline{MC_1}$), од каде следува дека $\overline{BC}=\overline{AC_1}$. Тогаш,

$$2\cdot\overline{CM}=\overline{CC_1}\le\overline{AC}+\overline{AC_1}=\overline{AC}+\overline{BC}\le 1+1=2,$$

односно $\overline{CM}\le 1$. Аналогно се покажува дека и $\overline{DM}\le 1$. Значи, и точките C и D се во тој круг.

VII одделение

1. Нека е даден полиномот $P(x)=4x^4+x^3+8x^2+x+4$.

а) Разложи го полиномот $P(x)$ на производ од два полинома од втор степен.

б) Покажи дека за било која вредност на променливата $x\in N$, вредноста на полиномот $P(x)$ е делива со 2.

Решение. а) Непосредно имаме

$$\begin{aligned}P(x)&=4(x^4+2x^2+1)+x^3+x\\&=4(x^2+1)^2+x(x^2+1)\\&=(x^2+1)(4(x^2+1)+x)\\&=(x^2+1)(4x^2+x+4).\end{aligned}$$

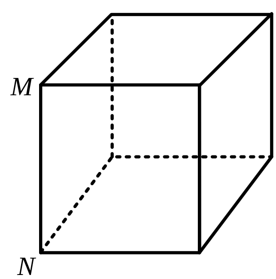
б) Нека $x\in\mathbb{N}$. Од тоа што

$$P(x)=4(x^4+2x^2+1)+x^3+x$$

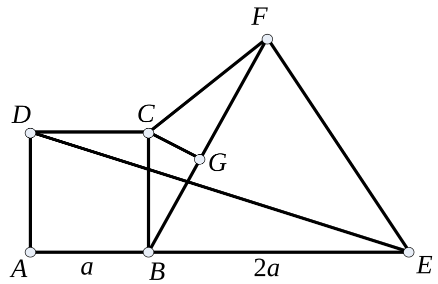
и $2\,|\,4(x^4+2x^2+1)$, следува дека $2\,|\,P(x)$, ако x^3+x е парен број. Ако x е парен број, тогаш x^3 е парен број, па x^3+x е парен број. Ако x е непарен број, тогаш x^3 е непарен број, па x^3+x е повторно парен број. Значи, $2\,|\,P(x)$.

2. Дали е можно рабовите на коцка да се означат (нумерираат) со броевите 1, 2, 3, ..., 11, 12, така што збирот на броевите придружени на три раба кои излегуваат од исто теме на коцката за сите темиња на коцката да е еднаков? Образложи го одговорот.

Решение. Нека работ MN е означен со бројот x. Бројот x влегува во збирот кој одговара на темињата M и N. На ист начин секој од броевите 1, 2, ..., 12 се појавува два пати во вкупниот збир. Тогаш, збирот на сите 8 збира кои се придружени на 8-те темиња на коцката е $2\cdot(1+2+...+12)=156$. Ако сите 8 збира кои се придружени на 8-те темиња на коцката се еднакви природни броеви, тогаш секој од нив изнесува $\frac{156}{8}=\frac{39}{2}=19,5$, од каде следи дека предложеното означување не е можно.



3. Точките *A*, *B* и *E* лежат на иста права, така што точката *B* е помеѓу точките *A* и *E*. Од иста страна на правата се конструирани квадрат *ABCD* и рамностран триаголник *BEF*. Ако должината на *BE* е два пати поголема од должината на *AB*, покажи дека плоштината на четириаголникот *CDEF* е еднаква на плоштината на триаголникот *BEF*.



Решение. Нека $\overline{AB}=a$, тогаш од условот на задачата $\overline{BE}=2a$. Нека CG е висина во триаголникот *BFC*. Бидејќи $\measuredangle ABC=90^\circ$ и $\measuredangle FBE=60^\circ$, а важи

$$\measuredangle ABC+\measuredangle CBG+\measuredangle FBE=180^\circ,$$

наоѓаме дека $\measuredangle CBG=30^\circ$. Според тоа, во правоаголниот триаголник *BGC* катетата *CG* е еднаква на половина од хипотенузата *BC*, т.е. $\overline{CG}=\frac{a}{2}$. Според тоа, плоштината *P* на четириаголникот *CDEF* е

$$P=P_{ABCD}+P_{BEF}+P_{BCF}-P_{ADE}=a^2+P_{BEF}+\frac{1}{2}\cdot 2a\frac{a}{2}-\frac{1}{2}3a\cdot a=P_{BEF}.$$

4. Нека *A* и *B* се два природни броја кои се напишани со исти цифри (секоја цифра се појавува ист број пати и во едниот и во другиот број, но не мора да значи дека е на истото место). Ако $A+B=10^{10}$, докажи дека бројот *A* е делив со 10.

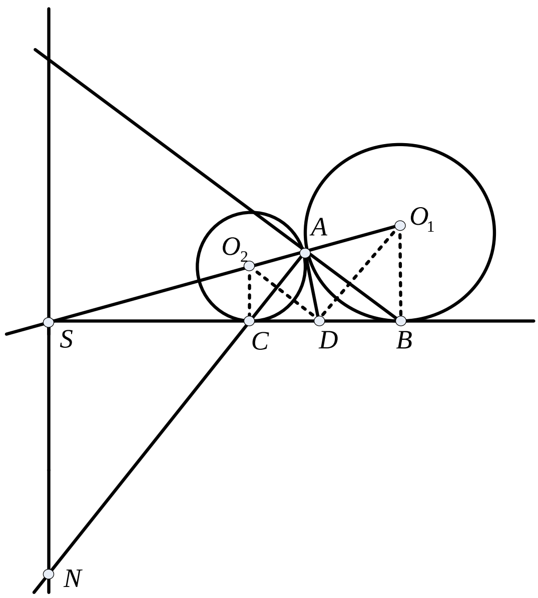
Решение. Бидејќи 10^{10} е најмалиот природен број со 11 цифри, следува дека броевите *A* и *B* се десетцифрени броеви. Нека $A=\overline{a_{10}a_9a_8\dots a_2a_1}$ и $B=\overline{b_{10}b_9b_8\dots b_2b_1}$. Од $A+B=10^{10}$ следува дека постои $i\in\{1,2,...,10\}$ таков што $a_1+b_1=0$, ..., $a_{i-1}+b_{i-1}=0$, $a_i+b_i=10$, $a_{i+1}+b_{i+1}=9$, ..., $a_{10}+b_{10}=9$. Бидејќи цифрите на броевите *A* и *B* се еднакви, собирајќи ги горните равенства, добиваме

$$2(a_1+a_2+\dots+a_{10})=10+9(10-i),$$

при што искористивме дека $a_1+a_2+\dots+a_{10}=b_1+b_2\dots+b_{10}$. Од тоа што $2(a_1+a_2+\dots+a_{10})$ е парен број, следува дека и $(10-i)$ е парен број, т.е. $i\neq 1$. Значи $a_1+b_1=0$, од каде што следува дека $a_1=b_1=0$. Според тоа бројот *A* (а исто така и бројот *B*) е делив со 10.

5. Дадени се две кружници со различни радиуси кои се допираат од надвор во точката A. Заедничката тангента ја допира поголемата кружница во точката B, а помалата во точката C и ја сече правата која минува низ центрите на дадените кружници во точката S. Во точката S конструирана е нормала на тангентата BC. Правата BA ја сече таа нормала во точката M, а правата AC ја сече истата нормала во точката N. Докажи дека $\overline{SM} = \overline{SN}$.

Решение. Нека AD е заедничката тангента на кружниците нормална на O_1O_2, каде O_1 и O_2 се центрите на кружниците. Од тоа што $\triangle O_1AD \cong \triangle O_1BD$ следува $\overline{AD} = \overline{BD}$, а од $\triangle O_2AD \cong \triangle O_2CD$ следува дека $\overline{AD} = \overline{CD}$. Заклучуваме дека триаголниците ABD и ACD се рамнокраки, од каде следува дека кружницата со дијаметар BC ја содржи



точката A. Од Талесовата теорема следува дека $\measuredangle BAC = 90^\circ$. Ги разгледуваме триаголниците ABD и ASN. Од тоа што правата AD е нормална на правата AS и правата AN е нормална на правата AB следува дека $\measuredangle NAS = \measuredangle BAD$ (1), како агли со заемно нормални краци. Исто така, $\measuredangle ANS = \measuredangle ABD$ (2). $\measuredangle BAD = \measuredangle ABD$ (3), како агли при основата на рамнокракиот триаголник ABD. Од равенствата (1), (2) и (3) следува дека $\measuredangle NAS = \measuredangle ANS$, па триаголникот ASN е рамнокрак и $\overline{AS} = \overline{SN}$. На ист начин, со споредба на аглите на $\triangle ACD$ и $\triangle AMS$ се добива дека $\overline{AS} = \overline{SM}$, па следи дека $\overline{SN} = \overline{SM}$, што требаше да се докаже.

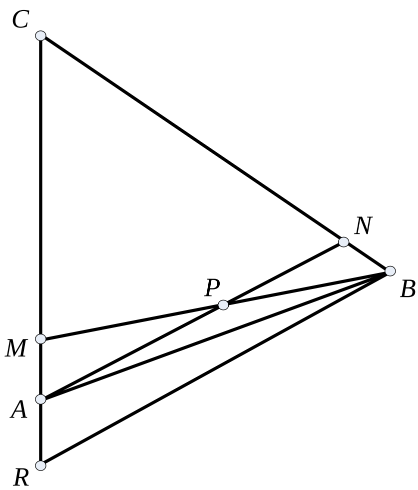
VIII одделение

1. Одреди ја вредноста на параметарот *n*, така што за секоја точка (x, y) од графикот на функцијата $y = -x + n$ важат следните равенства $y = \frac{5}{x}$ и $y^2 = 6 - x^2$. Потоа, пресметај ја плоштината на делот од рамнината што го образуваат координатните оски и графикот на функцијата.

Решение. Од условот $y^2 = 6 - x^2$ имаме $x^2 + y^2 = 6$, а од $y = \frac{5}{x}$ се добива $xy = 5,\ x \neq 0$. Со квадрирање на $y = -x + n$ добиваме

$$x^2 + y^2 + 2xy = n^2.$$

Според тоа $n^2 = 6 + 10$, а оттука $n = \pm 4$. Значи, се добиваат две функции $y = -x + 4$ и $y = -x - 4$. И за секоја од нив важи дека делот од рамнината што го образуваат со координатните оски е правоаголен триаголник со должина на катетите еднаква на 4, па бараната плоштина е $P = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$.



2. Даден е триаголникот *ABC*. На страната *AC* е избрана точка *M* така што $\overline{AM} : \overline{MC} = 1:5$, а на страната *BC* е избрана точка *N* така што $\overline{BN} : \overline{NC} = 1:6$. Каков е односот меѓу отсечките *MP* и *PB*, каде *P* е пресечната точка на отсечките *MB* и *AN*?

Решение. Низ точката *B* повлекуваме права паралелна со *AN*. Пресекот на оваа права и страната *AC* е точката *R*. Триаголниците *ANC* и *RBC* се слични, па $t_a^2 = c^2 - 2cx + \frac{a^2}{4}$. Оттука $\overline{AR} = \frac{\overline{AC}}{6}$. Од друга страна $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{1}{6}$, па $\overline{AM} = \frac{\overline{AC}}{6}$. Според тоа $\overline{AM} = \overline{AR}$. Точката *A* е средина на страната *RM* од триаголникот *RBM*. $AP \| RB$, т.е. *AP* е средна линија на триаголникот *RBM*. Значи $\overline{MP} = \overline{PB}$, односно $\overline{MP} : \overline{PB} = 1$.

3. Точно е 9:00 часот (како на сликата). Во колку часот стрелките на часовникот прв пат ќе се преклопат? Решението заокружи го на минути.

Решение. Големата стрелка за еден час поминува 60 min., а малата за истото време ќе се помести 5 min. Нека со y го означиме бројот на минути што ги поминала големата стрелка до моментот на поклопување, а со x бројот на минути што ги поминала малата стрелка до истиот момент. Го добиваме следниов систем, $y = 45 + x$, $y : 60 = x : 5$. Со негово решавање се добива $y = \frac{540}{11} \approx 49{,}09$. Значи, стрелките ќе се преклопат во 9:49 часот.

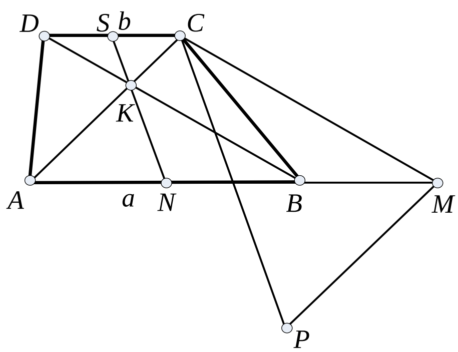
4. Кој од броевите 31^{11} и 17^{14} е поголем? Образложи го одговорот.

Решение. Од

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} \text{ и } 17^{14} > 16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{56},$$

следува дека $31^{11} < 17^{14}$.

5. Должините на дијагоналите на еден трапез се 3 и 5, а отсечката која ги сврзува средините на основите е со должина 2. Пресметај ја плоштината на трапезот.



Решение. Низ точката *C* повлекуваме права паралелна со дијагоналата *BD*. Пресекот на оваа права со правата на која лежи основата *AB* го означуваме со *M*. Триаголниците *ACD* и *BMC* имаат еднакви основи ($\overline{BM} = \overline{CD} = b$) и висини, па затоа важи $P_{\triangle ACD} = P_{\triangle BMC}$. Тогаш, $P_{ABCD} = P_{\triangle AMC}$.

Низ точката C повлекуваме права паралелна со отсечката која ги сврзува средините на основите на трапезот. Нека пресекот на оваа права со основата AB е точката N. На истата права избираме точка P така што $\overline{CN}=\overline{NP}$. Тогаш, триаголниците ANC и PMN се складни ($\overline{CN}=\overline{NP}$, $\measuredangle PNM=\measuredangle ANC$, $\overline{AN}=\overline{NM}=\frac{a+b}{2}$), па нивните плоштини се еднакви. За триаголниците AMC и PMC важи $P_{\triangle AMC}=P_{\triangle PMC}$, бидејќи $P_{\triangle AMC}=P_{\triangle ANC}+P_{\triangle NMC}$, а $P_{\triangle PMC}=P_{\triangle PMN}+P_{\triangle NMC}$. Страните на триаголникот PMC се $\overline{PM}=\overline{AC}=5$, $\overline{MC}=\overline{BD}=3$ и $\overline{PC}=2\overline{CN}=4$ и формираат Питагорова тројка. Значи, триаголникот PMC е правоаголен, па $P_{\triangle PMC}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$. Според тоа, $P_{ABCD}=6$.