Слаѓана Брсаковска, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

НЕКОИ ПОСЛЕДИЦИ НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Во редовната настава се запозна со Питагоровата теорема и некои елементарни примени на истата. Во ова наше дружење ќе разгледаме неколку значајни теореми кои се последица од Питагоровата теорема. Исто така ќе се осврнеме и на некои примени на теоремите кои ќе ги докажеме.

1. ТЕОРЕМА НА АПОЛОНИЈ

На почетокот ќе ја докажеме теоремата на Аполониј, за што ни се потребни таканаречените Карноови формули.

Лема 1 (Карноови формули). Нека ABC е произволен триаголник и H е подножјето на висината повлечена од темето B. Тогаш

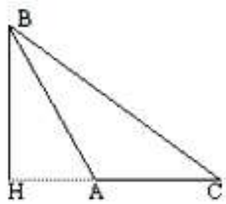
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AH}, \qquad (1)$$

ако је аголот при темето A е остар, а ако овој агол е тап, тогаш важи

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AH}. \qquad (2)$$

Доказ. Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците ABH и BCH добиваме

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \text{ и } \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2.$$

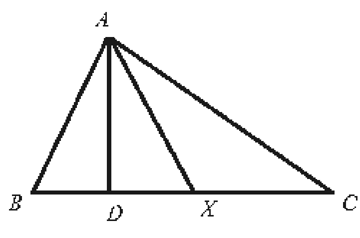


Сега, ако ги одземеме последните две равенства, по средувањето добиваме $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2$. Понатаму, ако триаголникот ABC е остар, тогаш $\overline{CH} = \overline{AC} - \overline{AH}$ и со замена во последното равенство го добиваме равенството (1), а ако триаголникот е тапоаголен, тогаш $\overline{CH} = \overline{AC} + \overline{AH}$, па затоа важи равенството (2). ■

Теорема 1 (Аполониј). Ако X е точка на страната BC на $\triangle ABC$ таква што важи $\overline{BX} : \overline{CX} = m : n$, тогаш

$$n\overline{AB}^2 + m\overline{AC}^2 = n\overline{BX}^2 + m\overline{CX}^2 + (m+n)\overline{AX}^2. \qquad (3)$$

Доказ. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A, тогаш $X = D$ или $X \neq D$. Ако $X = D$, тогаш $\overline{AB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2$ и $\overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{CX}^2$. Ако првото равенство го помножиме со m, а второто со n и ги собереме го добиваме равенството (3). Ако $X \neq D$, тогаш аглите AXD и AXC не се прави. Сега, од Каарноовите формули следува



$$\overline{AB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 - 2\cdot\overline{BX}\cdot\overline{DX} \text{ и } \overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 + 2\cdot\overline{CA}\cdot\overline{DX}.$$

Ако првото равенство го помножиме со n, а второто со m, по собирањето на добиените равенства го добиваме равенството (3). ■

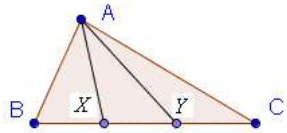
Задача 1. Ако X е произволна точка на правоаголникот $ABCD$, тогаш важи $\overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 = \overline{BX}^2 + \overline{DX}^2$. Докажи!

Решение. Нека O е пресек на дијагоналите AC и BD. Бидејќи пресечната точка ги полови дијагоналите, од теоремата на Аполониј следува:

$$\overline{AX}^2+\overline{CX}^2=\overline{AO}^2+\overline{OC}^2+2\overline{OX}^2 \text{ и } \overline{BX}^2+\overline{DX}^2=\overline{BO}^2+\overline{OD}^2+2\overline{OX}^2 .$$

Сега, имајќи предвид дека $\overline{AC}=\overline{BD}$, од последните две равенства следува тврдењето на задачата. ■

Задача 2. Ако X и Y се точки на страната BC такви што $\overline{BX}=\overline{XY}=\overline{YC}$, тогаш $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AX}^2+\overline{AY}^2+4\overline{XY}^2$. Докажи!



Решение. Од теоремата на Аполониј следува:

$$\overline{AB}^2+\overline{AY}^2=\overline{BX}^2+\overline{XY}^2+2\overline{AX}^2,$$
$$\overline{AX}^2+\overline{AC}^2=\overline{XY}^2+\overline{YC}^2+2\overline{AY}^2.$$

Последните равенства ги собираме, и ако искористиме дека $\overline{BX}=\overline{XY}=\overline{YC}$, по средување на добиеното равенство наоѓаме $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AX}^2+\overline{AY}^2+4\overline{XY}^2$. ■

Задача 3. Ако AA_1, BB_1, CC_1 се тежишните линии на $\triangle ABC$, а T е неговото тежиште, докажи дека

а) $\overline{AA_1}^2=\frac{1}{4}(2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)$,

б) $\overline{AA_1}^2+\overline{BB_1}^2+\overline{CC_1}^2=\frac{3}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$,

в) $\overline{AT}^2+\overline{BT}^2+\overline{CT}^2=\frac{1}{3}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$.

Решение. а) Ако искористиме дека A_1 е средина на страната BC, од теоремата на Аполониј следува $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BA_1}^2+\overline{A_1C}^2+2\overline{AA_1}^2$. Сега во последното равенство заменуваме $\overline{BA_1}=\overline{CA_1}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ и ако го изразиме $\overline{AA_1}^2$ го добиваме бараното равенство.

б) Ако според а) ги изразиме $\overline{AA_1}^2$, $\overline{BB_1}^2$ и $\overline{CC_1}^2$ и ги собереме добиените равенства, го добиваме бараното равенство.

в) Ако го искористиме фактот дека тежиштето ја дели тежишната линија во однос 2:1, и равенството под б) го поделиме со $\frac{9}{4}$, го добиваме бараното равенство. ■

Задача 4. Ако P и Q се средините на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$, докажи дека $\overline{PQ}^2=\frac{1}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2-\overline{AC}^2-\overline{BD}^2)$.

Решение. Отсечките PQ, BP, DP се тежишни линии на триаголниците BDP, BAC, DAC, соодветно, па од претходната задача следува

$$\overline{PQ}^2=\frac{1}{4}(2\overline{PB}^2+2\overline{PD}^2-\overline{BD}^2),$$
$$\overline{BP}^2=\frac{1}{4}(2\overline{AB}^2+2\overline{BC}^2-\overline{AC}^2),$$
$$\overline{DP}^2=\frac{1}{4}(2\overline{CD}^2+2\overline{DA}^2-\overline{AC}^2).$$

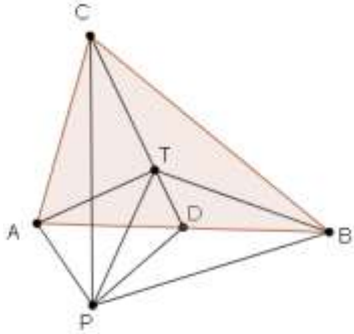
Со замена на второто и третот равенство во првото, по средувањето го добиваме бараното равенство. ■

2. ТЕОРЕМА НА ЛАЈБНИЦ

Теорема 2 (Лајбниц). Ако T е тежиште на $\triangle ABC$ и P е произволна точка, тогаш

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{TA}^2+\overline{TB}^2+\overline{TC}^2+3\overline{PT}^2 .$$

Доказ. Нека D е средината на страната AB на $\triangle ABC$. За тежиштето T важи $\overline{CT}:\overline{DT}=2:1$. Со примена на теоремата на Аполониј на триаголниците BCD, PAB, TAB добиваме



$$\overline{PC}^2+2\overline{PD}^2=\overline{TC}^2+2\overline{TD}^2+3\overline{PT}^2$$

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+2\overline{PD}^2$$

$$\overline{TA}^2+\overline{TB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+2\overline{TD}^2.$$

Ако ги собереме првите две равенства и го примениме третото равенство, го добиваме бараното равенство. ■

Задача 5. Нека a,b,c се должините на страните, O и r се центарот и радиусот на опишата кружнице, а T и H се тежиштето и ортоцентарот на $\triangle ABC$. Докажи дека

а) $\overline{OT}^2=r^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$, б) $\overline{OH}^2=9r^2-(a^2+b^2+c^2)$,

в) $\overline{TH}^2=4r^2-\frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)$, г) $\overline{AH}^2+\overline{BH}^2+\overline{CH}^2=12r^2-(a^2+b^2+c^2)$.

Решение. а) Според теоремата на Лајбниц добиваме

$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{TA}^2+\overline{TB}^2+\overline{TC}^2+3\overline{OT}^2$, т.е. $\overline{OT}^2=r^2-\frac{1}{3}(\overline{TA}^2+\overline{TB}^2+\overline{TC}^2)$.

Сега од задсача 3 в) следува $\overline{OT}^2=r^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

б) Од теорема на Ојлер следува $\overline{OH}=3\overline{OT}$, па од равенството под а) добиваме $\overline{OH}^2=9r^2-(a^2+b^2+c^2)$.

в) Аналогно како под б) ако искористиме дека $\overline{TH}=2\overline{OT}$, го добиваме бараното равенство.

г) Од теоремата на Лајбниц следува:

$$\overline{AH}^2+\overline{BH}^2+\overline{CH}^2=\overline{AT}^2+\overline{BT}^2+\overline{CT}^2+3\overline{TH}^2 .$$

Сега од задача 3 в) и равенството под а) следува бараното равенство. ■

3. ТЕОРЕМА НА КАРНО

Теорема 3 (Карно). Ако P,Q,R се точки од правите BC,CA,AB на кои припаѓаат страните на $\triangle ABC$, тогаш правите кои минуваат низ точките P,Q,R и се нормални на правите BC,CA,AB се сечат во една точка ако и само ако

$$\overline{BP}^2-\overline{PC}^2+\overline{CQ}^2-\overline{QA}^2+\overline{AR}^2-\overline{RB}^2=0 . \qquad (4)$$

Доказ. Нека нормалите на страните BC,CA,AB во точките P,Q,R се сечат во точката O (направи цртеж). Тогаш од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BP}^2-\overline{PC}^2=\overline{BO}^2-\overline{OC}^2,\ \overline{CQ}^2-\overline{QA}^2=\overline{CO}^2-\overline{OA}^2,\ \overline{AR}^2-\overline{RB}^2=\overline{AO}^2-\overline{OB}^2,$$

Ако ги собереме последните равенства го добиваме равенството (4).

Ќе го докажеме обратното тврдење. Нека O е пресечната точка на нормалите од P и Q. Нека подножјето на нормалата од O на правата AB е точката R_1. Треба да докажеме дека $R\equiv R_1$. Од веќе докажаното тврдење следува

$$\overline{BP}^2-\overline{PC}^2+\overline{CQ}^2-\overline{QA}^2+\overline{AR_1}^2-\overline{R_1B}^2=0. \tag{5}$$

Сега од (4) и (5) добиваме $\overline{AR_1}^2-\overline{R_1B}^2=\overline{AR}^2-\overline{RB}^2$, т.е.

$$(\overline{AR_1}-\overline{R_1B})(\overline{AR_1}+\overline{R_1B})=(\overline{AR}-\overline{RB})(\overline{AR}+\overline{RB}),\text{ т.е. }(\overline{AR_1}-\overline{R_1B})\overline{AB}=(\overline{AR}-\overline{RB})\overline{AB}.$$

По кратењето и префрлањето на една страна се добива: $\overline{AR_1}-\overline{R_1B}-\overline{AR}+\overline{RB}=0$, т.е. $2\overline{RR_1}=0$, од каде следува $R\equiv R_1$. ■

Задатак 6. Докажи дека симетралите на страните на триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Нека P,Q,R се средините на страните BC,CA,AB. Бидејќи симетралите минуваат низ точките P,Q,R, тие се норнмални на страните BC,CA,AB и $\overline{BP}=\overline{PC},\overline{CQ}=\overline{QA},\overline{AR}=\overline{RB}$, т.е. е исполнето равенството (4), од теоремата на Карно следува дека тие се сечат во една точка. ■

Задача 7. Докажи дека правите определени со висините на триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Нека P,Q,R се подножјата на висините на триаголникот повлечени од темињата A,B,C, соодветно. Тогаш точни се следниве равенства:

$$\overline{BP}^2-\overline{PC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2,\overline{CQ}^2-\overline{QA}^2=\overline{BC}^2-\overline{BA}^2,\overline{AR}^2-\overline{RB}^2=\overline{CA}^2-\overline{CB}^2.$$

Ако ги собереме последните равенства добиваме дека е исполнети равенството (4), од каде следува точноста на тврдењето на задачата. ■

4. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Ако D е точка на страната BC на $\triangle ABC$ таква што $\overline{BD}=2\overline{DC}$, докажи дека $\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3\overline{AD}^2+6\overline{CD}^2$.

2. Ако a,b,c се должините на страните, s е полупериметарот и l_a е должината на симетралата на внатрешниот агол во темето A на $\triangle ABC$, докажи дека $l_a=\frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$.

3. Ако H,T,O,S се ортоцентарот, тежиштето, центарот на опишаната и центарот на вписаната кружница во $\triangle ABC$, докажи дека $\overline{SH}^2+2\overline{SO}^2=3(\overline{ST}^2+2\overline{OT}^2)$.

4. Ако за $\triangle ABC$ важи $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=5\overline{BC}^2$ докажи дека тежишните линии во темињата B и C се нормални.

5. Докажи дека радиусот на кружницата која ги допира катетите и опишаната кружница на правоаголен триагоилник е еднаков на дијаметарот на вписаната кружница на тој траголник.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ