

Драгољуб Милошевиќ

## НЕКОИ ТЕОРЕМИ ЗА ТОЧКИ ВО РАМНИНАТА НА ТРИАГОЛНИКОТ

Веќе во шесто одделение научивме дека површината на триаголникот е еднаква на половина од производот на должината на страната и на неа соодветната висина. Со примена на оваа формула за површина на триаголник ќе ги докажеме првите две теореми кои се однесуваат на точка која е во внатрешноста или во надворешноста на рамностран триаголник.

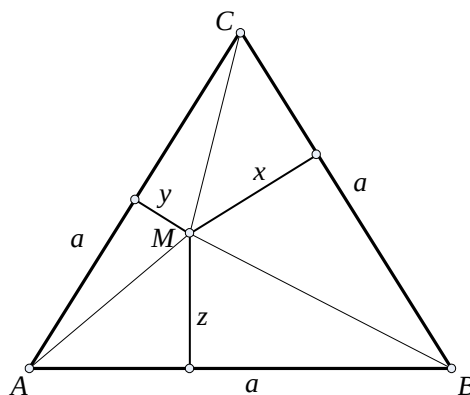
**Теорема 1.** Ако  $x$ ,  $y$  и  $z$  се растојанија од произволна точка  $M$  која е во внатрешноста на рамностран триаголник  $ABC$  до страните  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соодветно (види цртеж), тогаш збирот  $x + y + z$  е константен.

**Доказ.** Збирот на плоштините на триаголниците  $BCM$ ,  $CAM$  и  $ABM$  е еднаков на плоштината на триаголникот  $ABC$ , па според тоа

$$\frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = \frac{ah}{2}.$$

Ако последното равенство го поделиме со  $\frac{a}{2}$  добиваме

$$x + y + z = h. \blacksquare$$



**Теорема 2.** Ако точката  $M$  е во надвор од триаголникот  $ABC$  а во внатрешноста на аголот  $\alpha = \angle BAC$  (види цртеж), тогаш

$$y + z - x = h$$

(ознаките  $x$ ,  $y$  и  $z$  се како од претходната теорема).

**Доказ.** Ако од збирот на плоштините на триаголниците  $ABM$  и  $ACM$  (види цртеж) ја одземеме плоштината на триаголникот  $BCM$  ја добиваме плоштината на рамностранот триаголник  $ABC$ , т.е.

$$\frac{ay}{2} + \frac{az}{2} - \frac{ax}{2} = \frac{ah}{2}.$$

Ако последното равенство го по-  
делиме со  $\frac{a}{2}$  добиваме

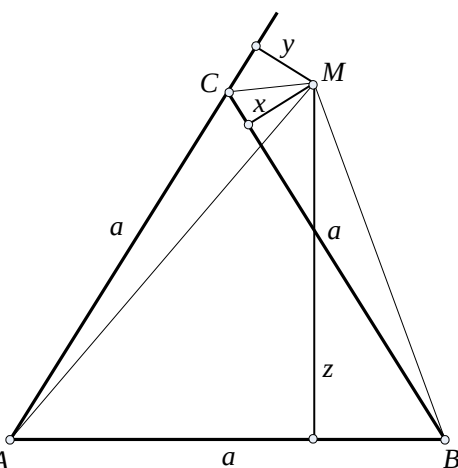
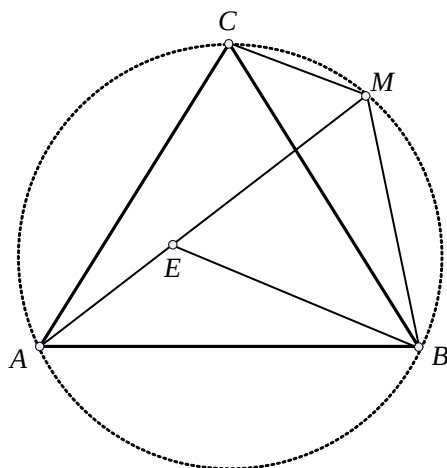
$$y + z - x = h,$$

т.е. точно е бараното равенство. ■

**Теорема 3.** За точката  $M$  која припаѓа на помалиот кружен лак  $BC$  од опишаната кружница околу рамностраниот триаголник  $ABC$  точно е равенството

$$\overline{MA} = \overline{MB} + \overline{MC}.$$

**Доказ.** На отсечката  $AM$  (види цртеж), избираме точка  $E$



така што  $\overline{BE} = \overline{BM}$ . Според тоа, триаголникот  $BME$  е рамнокрак и бидејќи  $\angle AMB = 60^\circ$  и  $\angle AMC = 60^\circ$  (како периферени али над третина од кружница), триаголникот  $BME$  е рамностран, односно

$$\overline{MB} = \overline{BE} = \overline{EM}.$$

Понатаму, триаголниците  $\triangle ABE$  и  $\triangle CMB$  се складни, па според тоа  $\overline{AE} = \overline{MC}$ . Сега е јасно дека

$$\overline{MA} = \overline{AE} + \overline{EM} = \overline{MC} + \overline{MB},$$

со што теоремата е докажана. ■

**Теорема 4.** Збирот

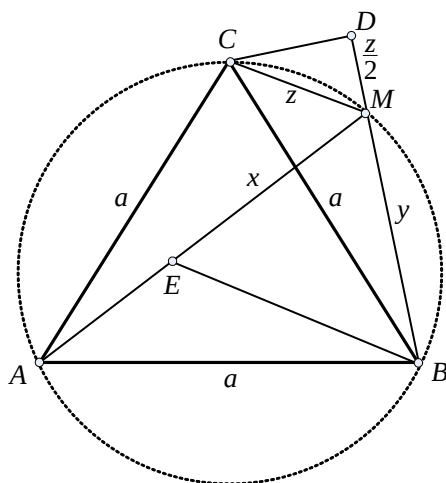
$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

(види цртеж), не зависи од изборот на точката  $M$  на лакот  $BC$ , т.е. е константен.

**Доказ.** Ќе ги воведеме ознаките

$$\overline{MA} = x, \overline{MB} = y \text{ и } \overline{MC} = z \text{ и}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a.$$



Од  $\angle BMC = 120^\circ$ , следува  $\angle DMC = 60^\circ$  (види цртеж). Правоаголниот триаголник  $MCD$  е половина од рамностран триаголник со страна  $z$  па според тоа  $\overline{DM} = \frac{z}{2}$ . Со примена на Питагорина теорема за правоаголниот триаголник  $CDM$  добиваме

$$\overline{CD}^2 = z^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2, \text{ т.е. } \overline{CD}^2 = \frac{3}{4}z^2.$$

Од правоаголниот триаголник  $BCD$  имаме

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2, \text{ т.е. } \frac{3}{4}z^2 = a^2 - \left(y + \frac{z}{2}\right)^2.$$

Одовде, по средовањето, добиваме

$$y^2 + z^2 + yz = a^2.$$

Ако последната равенка ја помножиме со 2 добиваме

$$y^2 + z^2 + (y^2 + z^2 + 2yz) = 2a^2.$$

Изразот во втората заграда во последното равенство е полн квадрат, па затоа

$$y^2 + z^2 + (y + z)^2 = 2a^2.$$

Но, од теорема 3 имаме  $y + z = x$  и со замена во претходното равенство добиваме

$$y^2 + z^2 + x^2 = 2a^2, \text{ т.е. } \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 2a^2,$$

и како  $2a^2$  е константа добиваме дека и изразот

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

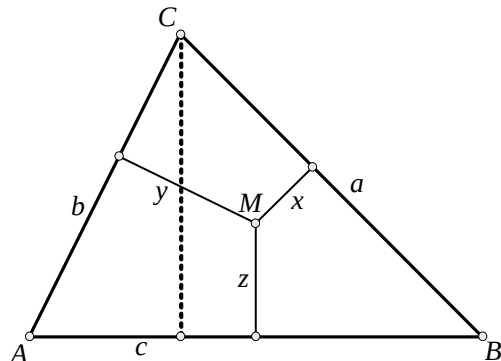
е константен, т.е. не зависи од изборот на точката  $M$  на лакот  $BC$ . ■

### Задачи за самостојна работа

1. Користејќи го доказот на теорема 1, докажи дека во секој триаголник  $ABC$  (види цртеж) е исполнето равенството

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$

2. Кои равенства важат ако точката  $M$  припаѓа на страната

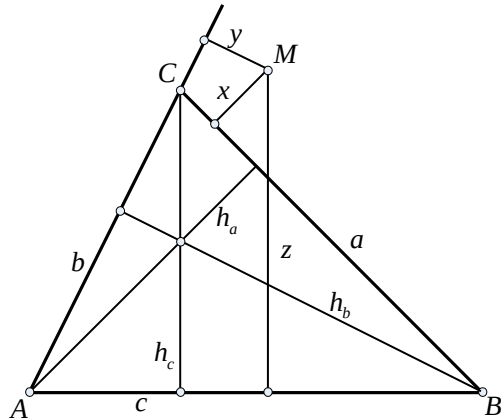


- а)  $AB$ ,      б)  $BC$       в)  $CA$ .

3. На продолжението на основата  $AB$  на рамнокрак триаголник  $ABC$  е избрана точка  $D$ . Докажи дека разликата на растојанијата на точката  $D$  од правите на кои припаѓаат краците на триаголникот е константна, т.е. не зависи од изборот на точката  $D$  на правата  $p(A, B)$ .

4. Докажи дека во секој триаголник  $ABC$  за точка  $M$  надовр од него (види цртеж) е точно равенството

$$-\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$



Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ