XI РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Во дадено делење без остаток, деленикот е зголемен осум пати, па добиен е количник 160. Пресметај го вистинскиот количник.

2. Нацртај агол AOB од 75°, а потоа подели го на три дела така што првиот дел да биде четири пати поголем од третиот, а вториот три пати поголем од третиот. (Означи ги деловите: I-AOC, II-COD, III-DOB).

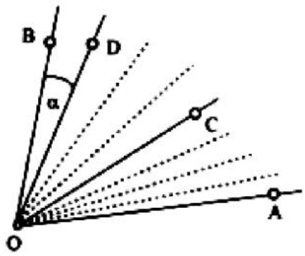
3. Еден сточар однел на пазар јаре, овен и теле. Јарето и овенот заедно имале 90 kg, јарето и телето 186 kg, а овенот и телето 240 kg. По колку килограми има секое од нив.

4. Подот на една училница има форма на квадрат и е поплочен со црни и бели плочки. Плочките се во форма на квадрат со страна 20 cm. Во училницата вкупно се вградени 98 црни плочки, така што на секои два квадратни метри се вградени 4 црни плочки.

а) Најди го периметарот на подот на училницата.

б) Најди колку бели плочки се вградени.

V одделение



1. Нека a:b=q, тогаш 8a:b=160.

$8(a:b) = 160$;

$8q = 160$;

$q = 20$

2. Нека $\angle DOB=\alpha$, тогаш $4\alpha+3\alpha+\alpha=8\alpha$. Аголот AOB со помош на симетрала треба да се подели на 8 еднакви дела.
$\angle AOC=4\alpha$, $\angle COD=3\alpha$, $\angle DOB=\alpha$.

3. Ако со J, T и O соодветно ги обележиме тежините на јарето, телето и овенот, тогаш имаме:

$$J+O = 90 \text{ kg.}$$
$$J+T = 180 \text{ kg;}$$
$$O+T = 240 \text{ kg.}$$

Ако ги собереме левите и десните страни на равенките добиваме:

$$2(J+O+T)=516 \text{ kg, т.е. } J+O+T=258 \text{ kg.}$$

Според тоа:

$$T=258-90=168 \text{ kg, } O=258-186=72 \text{ kg и } J=258-240=18 \text{ kg.}$$

4. а) Ако на 2 m^2 се вградени 4 плочки, тогаш на 1m^2 се вградени 2 плочки. Според тоа 98 плочки распоредени се на 49 m^2, т.е. страната на подот има должина 7 m. Периметарот на подот е $L=4\cdot 7=28$ m.
б) Бидејќи димензиите на плочките се 20 cm, тогаш 1 m^2 го покриваат 25 плочки од кои 2 се црни. Бели плочки има $23\cdot 49=1127$.

VI одделение

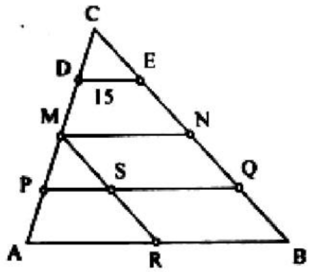
1. Страната AC на триаголник ABC е поделена на четири еднакви делови. Низ добиените точки се повлечени прави паралелни со страната AB. Должината на најмалата од отсечките зафатена со страните на триаголникот е 15 cm. Најди ја должината на другите отсечки и должината на страната AB.

2. Напишани се, еден до друг, природните броеви на следниот начин 123456789101112... итн. Која цифра стои на 1993 место?

3. Збирот на два природни броја е 288, а нивниот најголем заеднички делител е 36. Кои се тие броеви?

4. Симетралата на надворешниот агол при основата на еден рамнокрак триаголник ја сече симетралата на надворешниот агол при врвот од истиот триаголник под агол од 80°. Најди ги аглите на тој триаголник.

VI одделение



1. Отсечката DE е средна линија на триаголникот CNM, значи $\overline{MN} = 2\overline{DE} = 30$ cm. Отсечката MN е средна линија на ΔABC, значи $\overline{AB} = 2\overline{MN} = 60$ cm. Ако повлечеме $MR \parallel BC$, тогаш $\overline{SQ} = \overline{MN} = \overline{RB} = 30$ cm. Оттука следува дека $\overline{AR} = 30$ cm, и $\overline{PS} = \frac{1}{2}\overline{AR} = 15$ cm.

Според тоа $\overline{PQ} = 15+30=45$ cm.

2. Едноцифрените броеви имаат 9 цифри, а двоцифрените $90\cdot 2=180$ цифри. До 1993 цифра треба да определиме колку има употребени трицифрени броеви. Употребени се $1993-(90\cdot 2+9)=1804$ цифри, а $1804:3=601$ и 1 - остаток, т.е. запишани се 601 трицифрен број. Заедно со 9 - едноцифрени и 90 - двоцифрени броја, вкупно се запишани 700 броја. Првиот нареден број кој треба да де запише е 701, а првата цифра, која е 1993 по ред е 7.

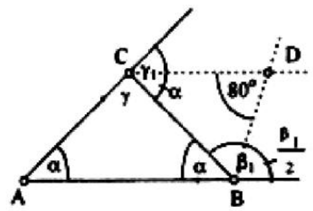
3. Нека тие броеви се a и b, тогаш $a+b=288$ и НЗД(a, b)=36.
Бидејќи НЗД(a, b)=36 имаме: $a=36x$ и $b=36y$.

$$36x+36y = 288;$$
$$36(x+y) = 288;$$
$$x+y = 8.$$

Броевите x и y треба да го задоволуваат условот $x+y=8$ и НЗД(x, y)=1. Тоа се паровите: ($x=1$, $y=7$) и ($x=3$, $y=5$). Бараните броеви се:

$a=36\cdot 1=36$, $b=36\cdot 7=252$ и $a=36\cdot 3=108$, $b=36\cdot 5=180$.

4. I - начин: Нека ΔABC е рамнокрак ($\overline{AC} = \overline{BC}$), тогаш надворешниот агол $\gamma_1=2\alpha$, а $\angle CBD=\frac{180-\alpha}{2} = 90-\frac{\alpha}{2}$.



Од триаголникот CDB следува:

$$\angle DCB+\angle CBD+\angle BDC=180^\circ;$$
$$\alpha+90-\frac{\alpha}{2}+80=180;$$
$$\alpha-\frac{\alpha}{2}=180^\circ-170;\quad \frac{\alpha}{2}=10.$$
$$\alpha=20^\circ,\ a\ \gamma=180^\circ-2\alpha=140^\circ.$$

II - начин: Бидејќи $\angle ABC=\angle BCD$, следува дека $AB \parallel CD$.

$\angle CBD=\frac{\beta_1}{2}=80^\circ$, како наизменични агли на трансверзала. Оттука следува:

$$\alpha=180^\circ-\beta_1=20^\circ,\ \gamma=180^\circ-2\alpha=140^\circ.$$

VII одделение

1. За која вредност на x изразот:
(3x-4)·(7x+8) - 1.5x(24x+4) - 5(1-2x) , е негативен?

2. Најди двоцифрени броеви за кои важи: Ако двоцифрениот број се помножи со цифрата на десетките се добива трицифрен број запишан со исти цифри.

3. Докажи дека средините на страните на произволен триаголник и подножната точка на една од висините на триаголникот се темиња на рамнокрак трапез.

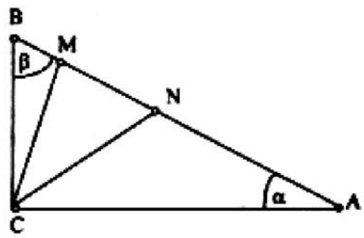
4. Во првоаголен триаголник ABC на хипотенузата AB означени се точките M и N, така што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\overline{BN} = \overline{BC}$. Одреди ја големината на аголот MCN.

VII одделение

1. Види III р.н. VII/2.

2. Нека тој број е $\overline{ab}$, тогаш $a\cdot\overline{ab} = \overline{xxx}$, т.е. $a\cdot\overline{ab} = 111x = 3\cdot 37x$ при што $x\in\{1, 2, ..., 9\}$. Барањето во задачата е исполнето само за x=1. Цифрата на десетките на бројот 37x за $x\in\{2, 3, ..., 9\}$ е различна од 3. Исто така и 3x, $x\in\{2, 3, ..., 9\}$ е различна од 3 (цифра на десетките на бројот 37). Оттука следува дека единствениот број кој го задоволува барањето е 37.

3. Види VIII р.н. VII/2.



4. Бидејќи $\overline{AM} = \overline{AC}$, следува дека триаголникот AMC е рамнокрак.
$\angle CMA = \angle MCA$ и

$$\angle CMA = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Од $\overline{BN} = \overline{BC}$, следува дека триаголникот BCN е рамнокрак .

$$\angle BCN = \angle CNB \text{ и } \angle CNB = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Од триаголникот CMN имаме: $\angle MCN + \angle CMA + \angle CNB = 180^\circ$.

$\angle MCN + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 180^\circ$, бидејќи $\alpha+\beta = 90^\circ$ следува: $\angle MCN = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

VIII одделение

1. Пресметај $a^4+b^4+c^4$, ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$.

2. Докажи дека симетралата на аголот ACB во триаголник ABC ја дели спротивната страна AB на две отсечки што се пропорционални со другите две страни на триаголникот.

3. По завршувањето на една кино претстава, дел од гледачите заминале дома со 6 автобуси, при што во секој автобус влегле ист број на гледачи. Останатите, кои биле за 15% повеќе, заминале пеш. Колку вкупно гледачи имало во салата, ако се знае дека таа може да прими најмногу 400 гледачи, а со автобуси заминале повеќе од 150 гледачи?

4. Ако острiот агол на еден ромб е 30^0, тогаш неговата страна е геометриска средина од дијагоналите. Докажи!

VIII одделение

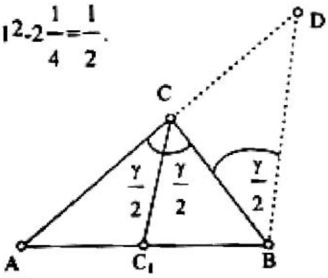
1. Дадено е: $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$.

Од $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ следува $(ab+ac+bc)=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=-\frac{1}{2}$.

Од $(ab+ac+bc)^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$, следува $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Од $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$, следува

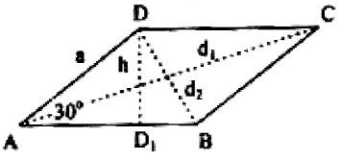
$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$, т.е. $a^4+b^4+c^4=1^2-2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.



2. Низ темето B да повлечеме права p паралелна со симетралата CC_1. $p \cap AC=\{D\}$. Триаголникот BCD е рамнокрак ($\angle CDB=\angle ACC_1=\frac{\gamma}{2}$; $\angle C_1CB=\angle CBD$; агли со паралелни краци), $\overline{CD}=\overline{CB}$. Од паралелноста на правите CC_1 и BD следува пропорционалност на отсечките: $\overline{AC_1}:\overline{C_1B}=\overline{AC}:\overline{CD}$, т.е. $\overline{AC_1}:\overline{CB_1}=\overline{AC}:\overline{CB}$.

3. I - начин: Нека x е бројот на патници во еден автобус. Тогаш со автобус си заминале вкупно 6x. Пеш заминале $6x+0{,}15\cdot 6x=6{,}9x$. Бројот x е природен број делив со 10, бидејќи $(6{,}9\cdot x)\in N$. Од $6x>150$ и $6x+6{,}9x\le 400$, следува дека $25<x\le 31\frac{1}{129}$. Бидејќи $10|x$, следува дека $x=30$. Со автобус заминале $6x=6\cdot 30=180$. Вкупно патници биле $180+207=387$.

II - начин: Нека со автобуси заминале x гледачи, тогаш $6|x$. Пеш заминале $x+0{,}15x=\frac{23}{20}x$, што значи $20|x$. Од ова следува дека x е содржател на 20 и 6, т.е. $x\in\{60, 120, 180, 240, ...\}$. Ако $x\ge 240$, тогаш $2x+0{,}15x\ge 400$. Значи $x\le 180$, па од $x>150$ следува $x=180$. Вкупно гледачи биле $180+\frac{23}{20}\cdot 180=387$.



4. Нека DD_1 е висина на ромбот ABCD со страна a. Од ΔADD_1 имаме $h=\frac{a}{2}$, како страна во правоаголен триагоник спроти агол од 30°. Плоштината на ромбот е: $P=a\cdot h$ или $P=\frac{d_1d_2}{2}$ (d_1 и d_2 се дијагоналите на ромбот). Следува дека $a\cdot h=\frac{d_1d_2}{2}$, т.е. $a^2=d_1\cdot d_2$.