Верижни разломци

Душан Ђукић

1° Увод; развој рационалног броја у верижни разломак

Дефиниција. Прост верижни разломак је израз облика

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}\,, \tag{$*$}$$

где су $a_1, a_2, \dots$ природни бројеви и a_0 цео број.

Израз $(*)$ често пишемо као $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ ради компактности. У овом запису не подразумевамо обавезно да су a_i цели бројеви.

Постоје и општи верижни разломци у којима a_i нису обавезно цели и бројиоци разломака нису обавезно једнаки 1:

Дефиниција. Општи верижни разломак је израз облика

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \cdots}}}\,.$$

Осим ако другачије нагласимо, под појмом верижног разломка подразумеваћемо прост верижни разломак.

Верижни разломци су један од начина представљања рационалних и, уопште, реалних бројева, који је посебно значајан у теорији бројева.

Пример. Број $\frac{26}{11}$ има тачно два представљања у облику (простог) верижног разломка $(*)$. Пошто је $0 \leq \frac{26}{11} - a_0 \leq 1$, мора бити $a_0 = 2$. Даље, $a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots} = \frac{1}{26/11 - a_0} = \frac{11}{4}$, па и a_1 мора бити једнако 2; због $a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots} = \frac{1}{11/4 - a_1} = \frac{4}{3}$ је $a_2 = 1$ и $a_3 + \frac{1}{\cdots} = 3$. У завршном кораку, међутим, имамо две могућности: може бити $a_3 = 3$ при чему се верижни разломак ту завршава, а може бити и $a_3 = 2$ и $a_4 = 1$ као последњи члан. Добијамо

$$\frac{26}{11} = 2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}\,,$$

тј. $\frac{26}{11} = [2, 2, 1, 3] = [2, 2, 1, 2, 1]$.

У претходном примеру представљање верижним разломком је јединствено ако захтевамо да се развој не завршава јединицом - у том случају друго представљање отпада.

Теорема 1. Сваки рационалан број се може на тачно један начин развити у коначан верижни разломак $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ у коме је $a_n \neq 1$.

Ако допустимо да се развој заврши јединицом, постоји још тачно један начин, и то $[a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1]$.

Доказ. Означимо рационални број са p/q. Користимо индукцију по q. Тврђење је тривијално за $q = 1$. Претпоставимо да је $q > 1$ и да је тврђење тачно за све рационалне бројеве са имениоцима мањим од q. Мора бити $a_0 = [p/q]$, па имамо $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\left(\frac{q}{p - a_0 q}\right)}$, при чему се по индукцијској претпоставци разломак $\frac{q}{p - a_0 q} \geq 1$ може развити у верижни разломак у тачно један, односно два начина, што је крај доказа. $\square$

Верижни разломци нису погодни за основне рачунске операције. Ипак, није тешко извести операције $x \mapsto 1/x$ и $x \mapsto -x$ помоћу њих, коришћењем једнакости:

$$\begin{array}{ll} [a_0, a_1, \ldots, a_n] \cdot [0, a_0, a_1, \ldots, a_n] = 1 & \text{за } a_0 \geq 1, \text{ и} \\ [a_0, a_1, \ldots, a_n] + [-1 - a_0, 1, a_1 - 1, a_2, \ldots, a_n] = 0 & \text{за } a_1 > 1. \end{array}$$

Обе једнакости се једноставно доказују. На пример, ако је $x = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ и $a_1 > 1$, тада је $[-1 - a_0, 1, a_1 - 1, a_2, \ldots, a_n] = -1 - a_0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{(x-a_0)^{-1}-1}} = -x$.

Пример. Из $\frac{15}{11} = [1, 2, 1, 3]$ добијамо $\frac{11}{15} = [0, 1, 2, 1, 3]$, $-\frac{15}{11} = [-2, 1, 1, 1, 3]$ и $-\frac{11}{15} = [-1, 3, 1, 3]$.

Како одредити чему је једнако $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$? На пример, за $n = 0, 1, 2$ лако се добија

$$[a_0] = \frac{a_0}{1}, \quad [a_0, a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \quad [a_0, a_1, a_2] = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1},$$

али за веће n нам је потребан практичнији начин.

Дефиниција. Израз $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ зовемо *k-тим конвергентом* за $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, а израз $a'_k = [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ *k-тим комплетним количником* ($n \geq k$).

Јасно је да је $x = [a_0, \ldots, a_n] = [a_0, \ldots, a_{k-1}, [a_k, \ldots, a_n]] = [a_0, \ldots, a_{k-1}, a'_k]$.

Теорема 2. Верижни разломак $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ је једнак $\frac{p_n}{q_n}$, где низови (p_n) и (q_n) задовољавају

$$\begin{array}{lll} p_{-1} = 1, & p_0 = a_0, & p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_{-1} = 0, & q_0 = 1, & q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{array} \quad \text{за } 2 \leq k \leq n.$$

Доказ. Тврђење је тачно за $n \leq 1$. Нека је $n \geq 2$. Користимо индукцију по n. Како је $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \ldots, a_n] = [a_0, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}]$, по индукцијској претпоставци за $n-1$ имамо

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + p_{n-3}}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + p_{n-3}} = \frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + (p_{n-1} - a_{n-1}p_{n-2})}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + (q_{n-1} - a_{n-1}q_{n-2})} = \frac{\frac{1}{a_n}p_{n-2} + p_{n-1}}{\frac{1}{a_n}q_{n-2} + q_{n-1}}$$

што даје тврђење за n. □

Последица. $x = \dfrac{a'_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a'_k q_{k-1} + q_{k-2}}$ за $2 \leq k \leq n$. □

Следећи идентитет даје везу између верижног разломка и "обрнутог" парњака.

Теорема 3. Ако је $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, онда је $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$.

Доказ. За $n = 0$ тврђење је тривијално. Користимо индукцију по n. Претпоставимо да важи за $n-1$, дакле $[a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0] = \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}$. Тада је

$$[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0] = a_n + \frac{1}{[a_{n-1}, \ldots, a_0]} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

по претходној теореми. □

Теорема 2 даје $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$. Такође имамо $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = a_n(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$. Понављањем поступка за $n-1, \ldots, 1$ добијамо

Теорема 4. $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ и $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$. Еквивалентно,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} \quad \text{и} \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}. \ \square$$

Последица 1. Конвергенти $\frac{p_n}{q_n}$ простог верижног разломка су нескративи: нзд$(p_n, q_n) = 1$. □

Последица 2. $\dfrac{p_0}{q_0} < \dfrac{p_2}{q_2} < \dfrac{p_4}{q_4} < \cdots < \dfrac{p_n}{q_n} < \cdots < \dfrac{p_3}{q_3} < \dfrac{p_1}{q_1}$. □

Пример. Конвергенти разломка $\frac{116}{43} = [2,1,2,3,4] = \frac{p_4}{q_4}$ су

$$\frac{p_3}{q_3} = [2,1,2,3] = \frac{27}{10}, \quad \frac{p_2}{q_2} = [2,1,2] = \frac{8}{3}, \quad \frac{p_1}{q_1} = [2,1] = \frac{3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{2}{1},$$

и при том је $\frac{2}{1} < \frac{8}{3} < \frac{116}{43} < \frac{27}{10} < \frac{3}{1}$.

Низови $(p_i)_{i=0}^4 = (2,3,8,27,116)$ и $(p_i)_{i=0}^4 = (1,1,3,10,43)$ задовољавају

$$\begin{aligned} &p_4 = 4p_3 + p_2, \quad p_3 = 3p_2 + p_1, \quad p_2 = 2p_1 + p_0 \quad \text{и} \\ &q_4 = 4q_3 + q_2, \quad q_3 = 3q_2 + q_1, \quad q_2 = 2q_1 + q_0. \end{aligned}$$

Такође је $p_4q_3 - p_3q_4 = 116 \cdot 10 - 27 \cdot 43 = -1$, $p_3q_2 - p_2q_3 = 27 \cdot 3 - 8 \cdot 10 = 1$ и $[4,3,2,1,2] = \frac{116}{27} = \frac{p_4}{p_3}$.

Из теореме 4 следи да је

$$x = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{q_0q_1} - \frac{1}{q_1q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_n}.$$

Такође имамо $\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_kq'_{k+1}}$, што нам заједно са $q'_{k+1} \geq q_{k+1} > q_k$ даје

Теорема 5. $\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2}$. □

Теорема 4 нам омогућава да опишемо парове природних бројева x, y за које је $ax - by = \pm 1$, где су a и b дати природни бројеви. Заиста, ако је $\frac{a}{b} = [a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ и $\frac{y}{x} = [a_0, \ldots, a_{k-1}]$, онда је $ax - by = (-1)^k$. Ово је заправо само другачији запис Еуклидовог алгоритма.

Приметимо да на основу теореме 1 постоје тачно два развоја $\frac{a}{b}$ у верижни разломак, и њихове дужине се разликују за 1. Тако можемо по жељи подесити парност броја k.

Теорема 6. Ако су a, b, c, d природни бројеви са $ad - bc = \pm 1$ и $b > d$, и ако је

$$\frac{a}{b} = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_n - 1, 1] \quad (a_n > 1),$$

онда је $\frac{c}{d} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ и $ad - bc = (-1)^{n-1}$, или $\frac{c}{d} = [a_0, a_1, \ldots, a_n - 1]$ и $ad - bc = (-1)^n$. □

Ова својства верижних разломака можемо искористити за решавање линеарних диофантских једначина. Наиме, решавање таквих једначина по правилу се своди на линеарне једначине $ax - by = c$.

Пример. Наћи опште решење диофантске једначине $62x + 45y + 35z = 4$.

Решење. Нађимо прво једно решење (x', y') једначине $62x' + 45y' = 1$. Како је $\frac{62}{45} = [1,2,1,1,1,5]$ и $[1,2,1,1,1] = \frac{11}{8}$, имамо $62 \cdot 8 - 45 \cdot 11 = (-1)^4 = 1$, тј. $(x', y') = (8, -11)$. Вратимо се полазној једначини и препишимо је у облику $62x + 45y = 4 - 35z$. За фиксирано z, једно њено решење је $(x, y) = (8(4 - 35z), -11(4 - 35z))$. Опште решење је онда $(x, y, z) = (8(4 - 35z) + 45t, -11(4 - 35z) - 62t, z)$. По жељи га можемо записати као нпр. $(5u - 10v + 32, -10u + 13v - 44, 4u + v)$ за $u = t - 6z$, $v = z - 4u$

2° Представљање ирационалног броја

Видели смо да рационалним бројевима одговарају коначни верижни разломци. Ирационалним бројевима одговарају бесконачни.

Ирационалан број можемо да представимо у облику (бесконачног) верижног разломка на исти начин као и рационалне бројеве. Важи $a_0 = [x]$ и $a_n = [a'_n] = \frac{1}{a'_{n-1} - a_{n-1}}$ за $n \geq 1$, што значи да је свако a_n једнозначно одређено. Наравно, ово представљање нема много смисла ако добијени верижни разломак не конвергира броју x.

Теорема 7. Представљање ирационалног броја у облику (простог) верижног разломка је јединствено.

Доказ. Управо смо видели да је ово представљање највише јединствено.

Нека је горњим поступком ирационалан број x развијен у верижни разломак $[a_0, a_1, \dots]$. Посматрајмо низ $x_n = [a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. Због начина конструкције низа (a_i), број x лежи између x_n и x_{n+1} за свако n. Како по теоремама 4 и 5 важи $x_0 < x_2 < \dots < x < \dots < x_3 < x_1$ и $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \to 0$, низ x_n конвергира и његов лимес мора бити управо x. $\square$

Пример. Посматрајмо бесконачни верижни разломак $x = [1, 2, 1, 2, 1, \dots]$. Његову вредност можемо да одредимо без тешкоћа јер је периодичан. Због $[a_0, a_1, \dots,] = [a_2, a_3, \dots]$ имамо $x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{x}} = \frac{3x+1}{2x+1}$, одакле добијамо квадратну једначину $2x^2 - 2x - 1 = 0$ чије решење у интервалу $(1, 2)$ је једнако $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Претходна теорема нам каже да низ конвергената $\frac{p_n}{q_n}$ конвергира броју $x = \frac{a'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}}$, где су a'_n комплетни количници. При том x лежи између два узастопна конвергента $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и $\frac{p_n}{q_n}$. Број t за који је $x = \frac{tp_n + p_{n-1}}{tq_n + q_{n-1}}$ је једнозначно одређен са $t = a'_{n+1}$, дакле $t > 1$. Важи и обратно тврђење које је корисно као лема.

Теорема 8. Ако за природне бројеве a, b, c, d и реалан број $t > 1$ важи $b > d$, $|ad - bc| = 1$ и $x = \frac{ta+c}{tb+d}$, онда су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ узастопни конвергенти броја x.

Доказ. Нека је $\frac{a}{b} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$. По теореми 6 (или теореми 1) можемо да подесимо n тако да буде $(-1)^{n-1} = ad - bc$ и $\frac{c}{d} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$.

Сетимо се да је $x = \frac{ta+c}{tb+d} = [a_0, \dots, a_n, t]$. Како је $t > 1$, можемо га развити у верижни разломак као $t = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ $(a_{n+1} \geq 1)$. Тада имамо развој $x = [a_0, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots]$ и у њему су узастопни конвергенти $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и $\frac{p_n}{q_n}$ управо једнаки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. $\square$

Испоставља се да је $\frac{p_n}{q_n}$ заправо најбоља апроксимација броја x разломцима са имениоцима не већим од q_n.

Теорема 9. Ако је $q \leq q_n$ $(n > 1)$ природан број и $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, онда је $|p - qx| > |p_n - q_n x|$.

Доказ. За почетак, покажимо да је $|p_{n-1} - q_{n-1}x| > |p_n - q_n x|$. Пошто је $x = \frac{p_n a'_{n+1} + p_{n-1}}{q_n a'_{n+1} + q_{n-1}}$, имамо

$$|p_{n-1} - q_{n-1}x| = \frac{a'_{n+1}}{q_n a'_{n+1} + q_{n-1}} > \frac{1}{q_n a'_{n+1} + q_{n-1}} = |p_n - q_n x|.$$

Посматрајмо сада произвољне p, q $(q \leq q_n)$. Будући да је $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$, постоје цели бројеви u, v такви да је $p = u p_{n-1} + v p_n$ и $q = u q_{n-1} + v q_n$ - заиста, решавањем овог система једначина добијамо $u = \pm(p q_n - q p_n)$ и $v = \pm(p q_{n-1} - q p_{n-1})$. Тада је и $p - qx = u(p_{n-1} - q_{n-1}x) + v(p_n - q_n x)$.

Знамо да су $p_{n-1} - q_{n-1}x$ и $p_n - q_n x$ различитог знака (последица теореме 4), а због $0 < q \leq q_n$, то су и u и v, или $uv = 0$. Следи да су $u(p_{n-1} - q_{n-1}x)$ и $v(p_n - q_n x)$ истог знака, и према томе $|p - qx| = |u| \cdot |p_{n-1} - q_{n-1}x| + |v| \cdot |p_n - q_n x| \geq |p_n - q_n x|$. $\square$

Последица. Под горњим претпоставкама је $|x - \frac{p}{q}| > |x - \frac{p_n}{q_n}|$. $\square$

По теореми 5 је $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$. Следеће тврђење је извесно побољшање ове оцене.

Теорема 10. Међу два узастопна конвергента за x, бар један задовољава $|\frac{p}{q} - x| < \frac{1}{2q^2}$.

Доказ. Пошто x лежи између $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, важи

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x\right| + \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

па је бар једна од неједнакости $|\frac{p_n}{q_n} - x| < \frac{1}{2q_n^2}$ и $|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$ тачна. $\square$

Претходно тврђење показује да за ирационалан број x постоји бесконачно много рационалних бројева $\frac{p}{q}$ за које је $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$. Испоставља се да теорема 10 описује све овакве разломке $\frac{p}{q}$.

Теорема 11. Ако разломак $\frac{p}{q}$ задовољава $|\frac{p}{q} - x| < \frac{1}{2q^2}$, онда је $\frac{p}{q}$ конвергент за x.

Доказ. Развијмо p/q у верижни разломак $[a_0, a_1, \dots, a_n]$; при том по теореми 1 можемо да подесимо парност n тако да $(-1)^{n-1}(\frac{p}{q} - x)$ буде позитивно.

Као и обично, означимо са $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$ и $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ конвергенте за $\frac{p}{q}$. Напишимо $x = \frac{tp_n+p_{n-1}}{tq_n+q_{n-1}}$. Ако бисмо имали $t > 1$, по теореми 8 би следило да су $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ конвергенти за x. То заиста имамо, јер је

$$\frac{1}{2q_n^2} > (-1)^{n-1}\left(\frac{p}{q} - x\right) = (-1)^{n-1}\frac{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_n(tq_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n(tq_n + q_{n-1})} > \frac{1}{(t+1)q_n^2}\ ,$$

дакле $t + 1 > 2$, тј. $t > 1$. $\square$

Напомена. По Хурвицовој теореми постоји бесконачно много рационалних бројева $\frac{p}{q}$ за које је $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$. Сви они су конвергенти за x.

3° **Квадратни ирационални бројеви**

У претходној глави видели смо пример бесконачног периодичног верижног разломка за $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. У складу с тим, очекивано је да и сваки периодичан верижни разломак одговара решењу квадратне једначине са целобројним коефицијентима.

Теорема 12. Сваки периодичан верижни разломак представља квадратни ирационалан број.

Доказ. Претпоставимо да је $x = [a_0, a_1, \dots, a_m, \langle a_{m+1}, \dots, a_n\rangle]$, са периодом $a_{m+1}, \dots, a_n$. Тада је $a'_{m+1} = a'_{n+1}$, па имамо

$$x = [a_0, \dots, a_m, a'_{m+1}] = \frac{a'_{m+1}p_m + p_{m-1}}{a'_{m+1}q_m + q_{m-1}} = [a_0, \dots, a_m, \dots, a_n, a'_{m+1}] = \frac{a'_{m+1}p_n + p_{n-1}}{a'_{m+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Одавде добијамо квадратну једначину по x: $-a'_{m+1} = \frac{p_{m-1}-q_{m-1}x}{p_m-q_mx} = \frac{p_{n-1}-q_{n-1}x}{p_n-q_nx}$, дакле $(q_{m-1}q_n - q_{n-1}q_m)x^2 - (p_{m-1}q_n + p_mq_{n-1} - p_nq_{m-1} - p_{n-1}q_m)x + (p_{m-1}p_n - p_{n-1}p_m) = 0$. $\square$

Последица. $[\langle a_0, a_1, \dots, a_n\rangle] = \dfrac{p_n - q_{n-1} \pm \sqrt{(p_n + q_{n-1})^2 + 4(-1)^n}}{2q_n}$. $\square$

Важи и други смер, иако је доказ мало тежи.

Теорема 13. Развој сваког квадратног ирационалног броја у верижни разломак је периодичан почев од неке тачке.

Доказ. Нека је $x = [a_0, a_1, \dots]$ решење квадратне једначине $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ са целобројним коефицијентима a, b, c. За свако n важи $x = [a_0, a_1, \dots, a_n, a'_{n+1}] = \frac{p_na'_{n+1}+p_{n-1}}{q_na'_{n+1}+q_{n-1}}$, одакле добијамо да a'_{n+1} задовољава квадратну једначину $P_n(a'_{n+1}) = A_na'^2_{n+1} + B_na'_{n+1} + C_{n+1} = 0$, где је

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & ap_n^2 + bp_nq_n + cq_n^2, \\ B_n & = & 2ap_np_{n-1} + b(p_nq_{n-1} + p_{n-1}q_n) + 2cq_nq_{n-1}, \\ C_n & = & ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2. \end{array}$$

Проценимо коефицијенте A_n, B_n, C_n. Ако ставимо $P(t) = (t-x)(t-y)$ (где је $y = -\frac{b}{a} - x$ такође ирационално), важи $A_n = q_n^2P(\frac{p_n}{q_n}) = q_n^2(\frac{p_n}{q_n} - x)(\frac{p_n}{q_n} + \frac{b}{a} + x)$, па је $|A_n| < q_n^2 \cdot$

$\frac{1}{q_n^2}(2|x|+|\frac{b}{a}|+1) = 2|x|+|\frac{b}{a}|+1$. Аналогно је $|C_n| < 2|x|+|\frac{b}{a}|+1$. Најзад, лако се проверава да је $B_n^2 - 4A_nC_n = \pm(b^2-4ac)$, одакле је $|B_n| < \sqrt{A_nC_n + b^2 - 4ac}$.

Према томе, за сваки од коефицијената A_n, B_n, C_n, па тако и за полином P_n, има само коначно много могућности, па за неке различите k, m, n важи $P_k = P_m = P_n$. То значи да су a'_{k+1}, a'_{m+1} и a'_{n+1} нуле истог квадратног полинома, па су неке две исте. Ако је без смањења општости $a'_{m+1} = a'_{n+1}$, развој броја x је исти после m-тог и после n-тог места, тј. периодичан је. $\square$

Испитајмо сада развој $\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots]$, где је d природан број који није квадрат. По претходној теореми, овај развој је периодичан почев од неког места.

Пример. $\sqrt{2} = [1, \langle 2\rangle]$, $\sqrt{3} = [1, \langle 1, 2\rangle]$, $\sqrt{5} = [2, \langle 4\rangle]$, $\sqrt{6} = [2, \langle 2, 4\rangle]$, $\sqrt{7} = [2, \langle 1, 1, 1, 4\rangle]$, $\sqrt{8} = [2, \langle 1, 4\rangle]$, $\sqrt{46} = [6, \langle 1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12\rangle]$, итд.

Такође, за $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+1} = [n, \langle 2n\rangle]$, $\sqrt{n^2+2n} = [n, \langle 1, 2n\rangle]$ и $\sqrt{n^2+2} = [n, \langle n, 2n\rangle]$.

Провера је директна.

Запажамо извесне правилности у развојима $\sqrt{n}$. На пример, сви су периодични почев од другог места, последњи члан периода је једнак $2[\sqrt{d}]$, а остали чланови чине палиндром.

Теорема 14. За сваки природан број d који није квадрат, развој $\sqrt{d}$ у верижни разломак је облика $[a_0, \langle a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0\rangle]$. За све n важи $a_n \le 2a_0 = 2[\sqrt{d}]$, при чему је $a_n = 2[\sqrt{d}]$ ако и само ако је $|p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2| = 1$.

Доказ. Нека је $\sqrt{d} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. За почетак, ако је $[a_0, a_1, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$, имамо $a_{n+1} < a'_{n+1} = \frac{q'_{n+1} - q_{n-1}}{q_n} < \frac{q'_{n+1}}{q_n} = \frac{1}{q_n(p_n - q_n\sqrt{d})} = \frac{1}{p_n^2 - dq_n^2}(\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{d}) < \frac{1}{p_n^2 - dq_n^2}(2[\sqrt{d}]+2)$. Специјално, ако је $|p_n^2 - dq_n^2| > 1$, одавде је $a_{n+1} < 2[\sqrt{d}]$.

Познато нам је да Пелова једначина $x^2 - dy^2 = 1$, а самим тим и једначина $|x^2 - dy^2| = 1$, има бесконачно много решења (x, y) у скупу природних бројева. Свако решење (x, y) задовољава $|\frac{x}{y} - \sqrt{d}| = \frac{1}{y}|x - y\sqrt{d}| = \frac{1}{y(x+y\sqrt{d})} < \frac{1}{2y^2}$, па је, према теореми 11, $\frac{x}{y}$ конвергент за $\sqrt{d}$, тј. $\frac{x}{y} = [a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ за неко n. Осим тога, тада је $p_n^2 - dq_n^2 = \pm 1$ истог знака као $\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}$, па теорема 4 даје $p_n^2 - dq_n^2 = (-1)^{n-1}$. Показаћемо да је $[a_1, \dots, a_n] = [a_n, \dots, a_1]$ и $a_{n+1} = 2a_0$.

Имамо $[a_1, \dots, a_n] = \frac{q_n}{p_n - a_0q_n}$ и $[a_1, \dots, a_{n-1}] = \frac{q_{n-1}}{p_{n-1} - a_0q_{n-1}}$. На основу теореме 3 добијамо да је $[a_n, \dots, a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$. Довољно је да покажемо да је $q_{n-1} = p_n - a_0q_n$. У ствари, показаћемо да је $\frac{dq_n - a_0p_n}{p_n - a_0q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

Пре свега, приметимо да је $q_n > p_n - a_0q_n$ и $|p_n(p_n - a_0q_n) - q_n(dq_n - a_0p_n)| = 1$. Одредимо број t за који је $\frac{tp_n + (dq_n - a_0p_n)}{tq_n + (p_n - a_0q_n)} = \sqrt{d}$. Како је ова једнакост еквивалентна са $t(p_n - q_n\sqrt{d}) = (a_0 + \sqrt{d})p_n - (a_0\sqrt{d} + d)q_n = (a_0 + \sqrt{d})(p_n - q_n\sqrt{d})$, добијамо $t = a_0 + \sqrt{d} > 1$. Овим је показано да су све претпоставке теореме 8 испоштоване, па из ње следи да су $\frac{dq_n - a_0p_n}{p_n - a_0q_n}$ и $\frac{p_n}{q_n}$ узастопни конвергенти за $\sqrt{d}$, што смо и желели.

Сада је $[\langle 2a_0, a_1, \dots, a_1\rangle] = \frac{p_n + a_0q_n - q_{n-1} - \sqrt{(p_n + a_0q_n + q_{n-1})^2 + 4(-1)^n}}{2q_n}$ по последици теореме 12, што се због $q_{n-1} = p_n - a_0q_n$ и $p_n^2 + (-1)^n = dq_n^2$ своди на $\frac{a_0q_n + \sqrt{p_n^2 + (-1)^n}}{q_n} = a_0 + \sqrt{d}$. Следи да је $[a_0, \langle a_1, a_2, \dots, a_1, 2a_0\rangle] = \sqrt{d}$ и $a_{n+1} = 2a_0$. $\square$

Последица 1. Пар природних бројева (x, y) је решење једначине $|x^2 - dy^2| = 1$ ако и само ако је, за неко $n \in \mathbb{N}$, разломак $\frac{x}{y}$ n-ти конвергент за $\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots]$ и $a_{n+1} = 2[\sqrt{d}]$. При том је $x^2 - dy^2 = (-1)^{n-1}$. $\square$

Последица 2. Једначина $x^2 - dy^2 = -1$ има целобројних решења ако и само ако верижни разломак за $\sqrt{d}$ има период непарне дужине. $\square$

Пример. Пронађимо минимално решење Пелове једначине $x^2 - 61y^2 = 1$ (овај случај је постао познат због изузетне величине свог минималног решења).

Уз мало рачуна налазимо $\sqrt{61} = [7, \langle 1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14\rangle]$. Период верижног разломка је 11, па нам $\frac{x}{y} = [7,1,4,3,1,2,2,1,3,4,1]$ одређује минимално решење (x, y) једначине $x^2 - 61y^2 = -1$, дакле $(x, y) = (29718, 3805)$. Најзад, најмање решење (x_0, y_0) одговарајуће Пелове једначине добијамо ако период напишемо двапут, дакле $\frac{x_0}{y_0} = [7,1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14,1,4,3,1,2,2,1,3,4,1]$: то је $(x_0, y_0) = (1766319049, 226153980)$.

4° Задаци

1. Постоји ли функција $f : \mathbb{Q} \to \{-1, 1\}$ која задовољава $f(x)f(y) = -1$ за све различите x, y за које је $xy = 1$ или $x + y \in \{0, 1\}$?

   Решење. Постоји. Нека је $0 < x = [a_0, a_1, \dots, a_n]$, $a_n > 1$. Број $n = n(x)$ је добро дефинисан за свако $x \in \mathbb{Q}_+$. Дефинишимо $f(x) = (-1)^n$, $f(-x) = -f(x)$ и $f(0) = 1$. Показаћемо да ова функција f задовољава све услове.

   Ако је $x + y = 0$, $f(x)f(y) = -1$ тривијално важи.

   Нека је $xy = 1$; претпоставимо без смањења општости да је $x > y > 0$. Тада је $1 < x = [a_0, \dots, a_n]$ са $a_0 \geq 1$ и $y = 0+1/x = [0, a_0, \dots, a_n]$, па следи $f(x)f(y) = (-1)^n(-1)^{n+1} = -1$.

   Нека је сада $x + y = 1$. Ако је $x \geq 1$, имамо $f(y) = -f(x-1) = f(x)$ и одатле $f(x)f(y) = -1$. Претпоставимо сада без смањења општости да је $\frac{1}{2} < x < 1$. Тада је $x = [0, 1, a_2, \dots, a_n] = \frac{1}{1+1/t}$, где је $t = [a_2, \dots, a_n]$, и $y = 1 - x = \frac{1}{1+t} = [0, a_2, \dots, a_n]$ и опет $f(x)f(y) = (-1)^n(-1)^{n-1} = -1$.

2. Нека је $x = [a_0, a_1, \dots]$ ирационалан број и $a_n \leq a$ за свако n. Ако је $c > 0$ такво да $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{cq^2}$ важи за бесконачно много разломака $\frac{p}{q}$, доказати да је $c \leq \sqrt{a^2 + 4a}$.

3. Кажемо да су бројеви x и y еквивалентни, $x \sim y$, ако је $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ за неке целе бројеве a, b, c, d са $|ad - bc| = 1$.

   (a) Показати да је $\sim$ релација еквиваленције.

   (b) Доказати да су свака два рационална броја еквивалентна.

   (c) Доказати да су бројеви $x = [a_0, \dots, a_k, c_0, c_1, c_2, \dots]$ и $y = [b_0, \dots, b_l, c_0, c_1, c_2, \dots]$ еквивалентни.

   (d) Нека је $x = [a_0, \dots, a_k, a'_{k+1}]$ и $y \sim x$. Доказати да постоје цели бројеви P, Q, R, S за које је $y = \frac{Pa'_k+R}{Qa'_k+S}$.

   (e) Доказати да је $Q > S > 0$ за довољно велико k.

   (f) Ако су x и y еквивалентни бројеви, доказати да њихови верижни развоји имају облик $x = [a_0, \dots, a_k, c_0, c_1, c_2, \dots]$ и $y = [b_0, \dots, b_l, c_0, c_1, c_2, \dots]$.

4. Ако $d \mid 2n$, доказати да је $\sqrt{n^2 + d} = [n, \langle \frac{2n}{d}, 2n\rangle]$.
   Такође, ако $d \mid 2n$, $d < n$, доказати да је $\sqrt{n^2 - d} = [n, \langle 1, \frac{2n}{d} - 2, 1, 2n-2\rangle]$.

5. (a) Ако $d \mid 2n$ и $d > 1$, доказати да једначина $x^2 + 1 = y^2(n^2 + d)$ нема целобројних решења (x, y).

   (b) Доказати да не постоје природни бројеви x, y, z, $z > 1$, за које је $x^2 - y^2z + 1$ позитивно и дељиво са $2xyz$.

6. Нека су $\frac{p_n}{q_n}$ конвергенти општег верижног разломка $a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \cdots}}$. Дефинишимо $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$. Доказати једнакости

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} \end{aligned} \quad \text{и} \quad p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \cdots b_n.$$

7. Доказати Ојлерову формулу: ако је $x = c_0 + c_0c_1 + c_0c_1c_2 + \cdots$ конвергентан ред, онда је

$$x = \frac{c_0}{1 - \frac{c_1}{1+c_1 - \frac{c_2}{1-c_2-\frac{c_3}{1+c_3-\cdots}}}}.$$

8. Користећи Ојлерову формулу, доказати следеће идентитете:

$$e^x = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+x-\frac{x}{2+x-\frac{2x}{3+x-\frac{3x}{4+x-\cdots}}}}}, \quad \ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1-\frac{x^2}{x^2+3-\frac{(3x)^2}{3x^2+5-\frac{(5x)^2}{5x^2+7-\cdots}}}}, \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2+\frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\cdots}}}$$

9. (a) Низови a_n и b_n су задати рекурентно: $a_0 = b_1 = 1$, $a_1 = b_0 = 0$, $a_{n+1} = (2n-1)a_n + a_{n-1}$, $b_{n+1} = (2n-1)b_n + b_{n-1}$. Доказати да редови $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ и $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!}$ конвергирају за $|x| < \frac{1}{2}$ и дивергирају за $|x| > \frac{1}{2}$. То исто важи и за $A'(x)$ и $B'(x)$.

(b) Доказати да функције $A(x)$ и $B(x)$ задовољавају диференцијалну једначину $f(x) + f'(x) = (1-2x)f''(x)$.

(c) Доказати да су функције $A(x)$ и $B(x)$ облика $Ce^{\sqrt{1-2x}} + De^{-\sqrt{1-2x}}$ за неке константе C, D.

(d) Показати да је $A(x) = \operatorname{ch}\left(1 - \sqrt{1-2x}\right)$ и $B(x) = \operatorname{sh}\left(1 - \sqrt{1-2x}\right)$.

(e) Претпоставимо да редови $S(x) = s_0 + s_1x + \cdots$ и $T(x) = t_0 + t_1x + \cdots$ конвергирају за $|x| < r$, али дивергирају за $x = r$. Ако постоји $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = L$, доказати да је $\lim_{x\to r} \frac{S(x)}{T(x)} = L$.

(f) Испитати да ли редови $A(x), B(x), A'(x), B'(x)$ конвергирају у $x = \frac{1}{2}$.

(g) Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = [1, 3, 5, 7, 9, \ldots] = \frac{e^2+1}{e^2-1}$.

Београд, 2011