1-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2005 год
младшая лига

Задача №1. В прямоугольной таблице 9×9 отмечены 40 клеток. Горизонтальный или вертикальный ряд из 9 клеток называется *хорошим*, если в нем отмеченных клеток больше, чем не отмеченных. Какое наибольшее суммарное количество хороших (горизонтальных и вертикальных) рядов может иметь данная таблица?

Задача №2. Даны целые числа m, n такие, что $0 \leq m \leq 2n$. Докажите, что число $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$ является полным квадратом тогда и только тогда, когда $m = n$.

Задача №3. На плоскости дано множество A из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что для любых двух различных точек $a, b \in A$ существует прямая, разбивающая A на два подмножества по n элементов и такая, что a и b лежат по разные стороны от этой прямой.

Задача №4. Для любых положительных действительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} \geq 1.$$

Задача №5. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке D, а точка M - середина этой стороны. Докажите, что точка M, центр вписанной окружности и середина отрезка CD лежат на одной прямой.

Задача №6. Найдите все простые числа p, q, не превошодящие 2005 и такие, что $p^2 + 4$ делится на q, а $q^2 + 4$ делится на p.

1-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2005 год
старшая лига

Задача №1. Докажите, что уравнение $x^5 + 31 = y^2$ не имеет решения в целых числах.

Задача №2. Дано действительное число r такое, что для некоторой последовательности $\{a_n\}$ положительных действительных чисел неравенство

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1} \leq r a_m$$

выполняется для всех натуральных чисел m. Докажите, что $r \geq 4$.

Задача №3. Пусть $SABC$ - правильная треугольная пирамида, т.е. $SA = SB = SC$ и $AB = BC = AC$. Найдите геометрическое место точек D $(D \neq S)$ пространства, удовлетворяющих уравнению

$$|\cos\delta_A - 2\cos\delta_B - 2\cos\delta_C| = 3,$$

где угол $\delta_X = \angle XSD$ для каждого $X \in \{A, B, C\}$.

Задача №4. Точка X внутри выпуклого четырехугольника называется *наблюдаемой* из стороны YZ этого четырехугольника, если основание перпендикуляра из X на прямую YZ принадлежит замкнутому отрезку $[YZ]$. Точка внутри выпуклого четырехугольника называется *k-точкой*, если она наблюдаема в точности из k сторон четырехугольника (например, каждая точка внутри квадрата является 4-точкой). Докажите, что если внутри выпуклого четырехугольника существует 1-точка, то там существует и k-точка для каждого $k \in \{2, 3, 4\}$.

Задача №5. Для любых положительных действительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{d}{b+2c} + \frac{a}{c+2d} + \frac{b}{d+2a} \geq \frac{4}{3}.$$

Задача №6. Найдите все простые числа p, q, не превошодящие 2005 и такие, что $p^2 + 8$ делится на q, а $q^2 + 8$ делится на p.