Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус

Ставра Радојковиќ
Н и ш

НЕШТО ЗА МАКСИМУМОТ

Определувањето на максимумот (најголемата вредност на функцијата) по правило е доста опсежна работа и без знаење на вишата математика е речиси нерешлив проблем. Меѓутоа, постојат проблеми што се сведуваат на едноставно пресметување што може да го прави и ученик од основното училиште.

Најнапред да решиме една конкретна задача.

Бројот 20 да го поделиме на два собирока, така што нивниот производ да биде најголем.

За почеток да избереме целобројни вредности за x и y, така што да е $x + y = 20$ и да ги определиме нивните производи.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$x \cdot y$	19	36	51	64	75	84	91	96	99	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19

Од табелата може да се заклучи дека доколку едниот од собироците (x) расте, другиот (y) се намалува, а нивниот производ во првата половина на таблицата расте од 0 до 100, а во втората опаѓа од 100 до 0. Исто така може да се заклучи:

$0<x<1$ и $20>y>19$ $==>$ $0<xy<19$

$1<x<2$ и $19>y>18$ $==>$ $19<xy<36$

$2<x<3$ и $18>y>17$ $==>$ $36<xy<51$

и т.н. за секој интервал.

Очигледно е дека најголемата вредност производот ќе ја добие ако е $x = y$.

Ова е општо важечка вистина и може да се искаже вака:

Ако збирот на две променливи x и y е константен ($x + y = a$), тогаш нивниот производ прима најголема вредност (максимум) тогаш и само тогаш ако променливите примат еднакви вредности.

Да го пресметаме сега тој производ.

Нека е $x + y = a$, за $x = y = \frac{a}{2}$ се добива:

$$p = x \cdot y = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Значи, најголемиот производ е еднаков на четвртината од квадратот на збирот од променливите.

Тоа го потврдува и нашиот пример.

$x + y = 20$, за $x = y = 10$ се добива:

$$p = x \cdot y = 10 \cdot 10 = 100 = \frac{20^2}{4}$$

Да го примениме сега горното на неколку примери:

Пример 1: Со жица долга 2000 метри со четири реда е заградена некоја правоаголна парцела. Колкава најголема плоштина може да зафати таквата парцела?

Решение: Со x и y нека ги обележиме страните на правоаголникот. Според условот на задачата имаме:

$4 \cdot (2x + 2y) = 2000$

$8 \cdot (x + y) = 2000$

$x + y = 250.$

Од друга страна имаме:

$P = x \cdot y$

Според горната теорема, бидејќи збирот на величините x и y е константен (250), нивниот производ има најголема вредност само ако тие се еднакви, т.е.

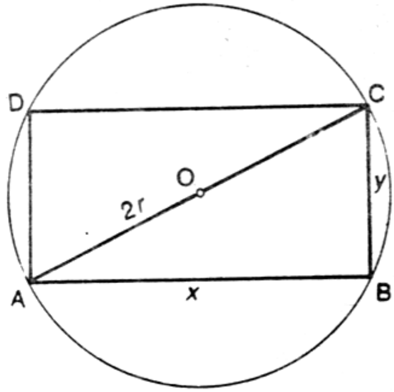
$x = y = 125$, па се добива: $P = 125 \cdot 125$ $P = 15625\ m^2$.

Пример 2. Во кружница со радиус r, да се впише правоаголник со максимална плоштина. Определи ја плоштината на тој правоаголник.

Решение: Страните на правоаголникот впишани во кружница со радиус r нека бидат x и y. Правоаголникот има плоштина $P = xy$, (црт. 1).

Според Питагоровата теорема $x^2 + y^2 = 4r^2$. Според теоремата x^2y^2 ќе има најголема вредност само ако $x^2 = y^2 = 2r^2$.

Според тоа е $x^2 \cdot y^2 = 4r^4$, а од друга страна е $x^2y^2 = (x \cdot y)^2 = P^2$, значи имаме за $x = y = r\sqrt{2}$, па се добива $P = \sqrt{4r^4}$ $P = 2r^2$.



црт. 1

(Бидејќи се работи за позитивни вредности со кои се изразува плоштината, без опасност да згрешиме од P^2 со едноставно определување на квадратниот корен се добива P).

Пример 3. Во триаголник со страни c и соодветна висина h_c да се впише правоаголник со максимална плоштина, така што двете темиња на правоаголникот да бидат на страната c, а другите темиња од правоаголникот да бидат на другите две страни од триаголникот. Колкава е плоштината на тој правоаголник?

Решение:

Поради тоа што триаголниците ABC и MNC на црт. 2 се слични се добива:

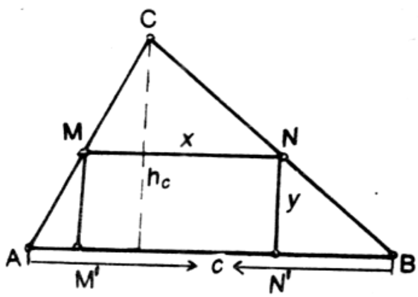
$c : h_c = x : (h_c - y)$, односно

$$x = \frac{c}{h_c} \cdot (h_c - y)$$

од другата страна е:

$P = x \cdot y$

$P = \frac{c}{h_c} \cdot (h_c - y) \cdot y$ односно



црт. 2

$\frac{h_c}{c} \cdot P = y \cdot (h_c - y)$ бидејќи $y + (h_c - y) = h_c$ производот на десната страна ќе добие најголема вредност за $y = \frac{h_c}{2}$, односно

$x = \frac{c}{h_c} \cdot (h_c - \frac{h_c}{2}) = \frac{c}{2}$ па имаме:

$$P_{max} = \frac{c}{2} \cdot \frac{h_c}{2}$$

$$P_{max} = \frac{c \cdot hc}{4}$$

Пример 4. Во топка со радиус R да се впише конус со најголем (максимален) волумен. Да се определи волуменот на тој конус.

Решение: Цртежот 3 претставува оскин пресек на топката и впишаниот во неа конус. Од шрафираниот триаголник според Питагоровата теорема се добива

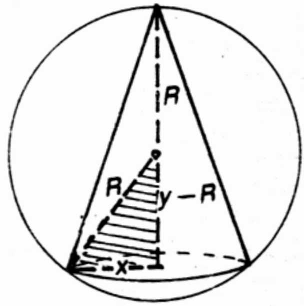
$x^2 + (y - R)^2 = R^2$ односно

$x^2 = 2\,Ry - y^2$

$V_{конус} = \frac{\pi}{3}x^2y$

$\frac{3}{\pi}V_{конус} = (2Ry - y^2) \cdot y = y \cdot y\,(2R - y)$

$\frac{6}{\pi}V = y \cdot y \cdot (4R - 2y)$



црт. 3

бидејќи е $y + y + 4\,R - 2y = 4R$, следува дека компонентите се еднакви за да се добие максимален производ.

$y = 4R - 2y$ односно

$3y = 4R$

$y = \frac{4R}{3}$ односно

$x^2 = 2R \cdot \frac{4R}{3} - \frac{16R^2}{9}$

$x^2 = \frac{8R^2}{9}$ и $x = \frac{2R}{3}\sqrt{2}$

Оттука имаме:

$$V_{max} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{8R^2}{9} \cdot \frac{4R}{3}$$

$$V_{max} = \frac{32\pi R^3}{81}$$